

拡張型 Precedence Network モデルの線形計画法による解析

ANALYSIS OF THE REVISED PRECEDENCE NETWORK MODEL AS LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

山本 幸司*

By Koshi YAMAMOTO

Precedence Network model originally developed by Crandall, K. C. has been revised as to permit two types of time lag values for each FS, FF, SS, SF relation. Though the revised Precedence Network model can be, of course, solved by introducing forward pass and backward pass calculation algorithm of PERT, formulating as Linear Programming problem is proposed to both cases that job-interruption is not permitted and freely permitted.

First of all, the revised PN model is compared with PERT model from some points of view and then theoretical inquiry is observed for the solution of PERT model as LP problem. The revised PN model is also formulated as LP problem and applied to a small project network.

Keywords : precedence network, linear programming, scheduling model

1. はじめに

PERT モデルは本来土木工事の工程計画モデルとして開発されたものではないが、わが国の建設業界でも広範に普及している。しかし、その利用に際してはいくつかの問題点が指摘されており、とりわけ「各作業の順序関係ならびに工程ネットワークの記述方法に自由度を欠く」ことは、今後ますます大規模化、複雑化する土木工事の工程計画モデルとしては不十分とも考えられる。

この問題を解決する方法の1つとして、Precedence Network モデル（以下 PN モデル）があるが、本研究では従来のモデルをより汎用性のあるものに拡張するとともに、PERT モデル本来の解析法を準用する方法だけでなく、これが線形計画法 (LP) によっても解析できることを明らかにする。また、PERT モデルの LP による解法についても改めて論理的な検討を加え、PN モデルと PERT モデルとの比較分析もあわせて行うことにする。

PN モデルが LP によって定式化できることは、各作業の所要日数や作業間順序関係の感度分析が容易に行えることを意味し、工期と工費との関係を分析する CPM

のパラメトリック・プログラミング解法へも発展できるため、その意義は非常に大きいといえる。

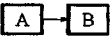



2. 拡張型 PN モデル

(1) 従来型 PN モデル

Precedence Network モデルとは、Table 1 に示すような4種類の順序関係と、「何日以上経過しなければ～できない」という時間遅れを認めたスケジューリングモデルであり^{1),2)}、PERT モデルは FS 関係のみが許され、かつ、時間遅れがないことから、PN モデルの特殊なケースとみなされる。

PN モデルも PERT モデルと同様に、まず forward pass アルゴリズムによって各作業の ES (最早開始時刻)

Table 1 Definition of relationship in PN model.

順序関係の形状	形状・遅れ時間の表現方法ならびに定義
	FS = n 作業Bは作業Aの終了後n日以上経過しないと開始できない
	SS = n 作業Bは作業Aの開始後n日以上経過しないと開始できない
	FF = n 作業Bは作業Aの終了後n日以上経過しないと終了できない
	SF = n 作業Bは作業Aの開始後n日以上経過しないと終了できない

* 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

値を、次に backward pass アルゴリズムによって LF (最遅終了時刻) 値を求め、これらの結果を用いて EF (最早終了時刻), LS (最遅開始時刻), TF (トータルフロート), FF (フリーフロート) 値を計算できる。ところで、PERT/Time モデルでは各作業の中断を認めると工期の遅延をもたらす可能性が強いが、PN モデルでは 2. (3) で述べるように作業中断は大きな意義をもつ。このような作業中断を認める場合についても PERT モデルの解法を準用した計算方法が Wiest らによって提案されているが³⁾、彼らの方法は SF 順序関係の場合を含んでおらず、また作業中断を認める場合に中断時期を強制的に指定するアルゴリズムとなっている。しかしスケジューリングモデルとしては、中断時期や中断回数に関してもっと自由度をもたせるべきであると考え、これら 2つの問題点を克服するアルゴリズムを開発した^{4),5)}。

(2) 拡張型 PN モデル

より複雑な作業間順序関係を的確に表現するためには、「何日以上経過しなければ～できない」という時間遅れだけではなく、「何日以内に～しなければならない」という時間遅れも必要である。たとえば、Table 1 の FS 関係の場合ならば、「作業 B は作業 A の終了後、 n 日以内に開始しなければならない」という順序関係である。これによって 8 通り (4 種類の順序関係 \times 2 種類の時間遅れ) の順序関係が可能となるため、土木工事で出現する複雑な順序関係にも十分対応可能となる。以下では第 1 の時間遅れを \overline{FS} 、第 2 の時間遅れを \underline{FS} のように記述するとともに、第 1 の時間遅れのみを認める場合

を従来型 PN モデル、第 2 の時間遅れも認める場合を拡張型 PN モデルとよぶことにする。

拡張型 PN モデルも forward pass, backward pass によって ES, EF, LS, LF, TF, FF 値を求めることができるが、アルゴリズム上の場合分けがかなり複雑となる。しかし作業中断を認める場合についても、すでにコンピュータ・プログラムが開発されている⁶⁾。

(3) PN モデルと PERT モデルの比較

すでに指摘したように、PERT モデルは PN モデルの特殊なケースであることから、両者はいくつかの類似点をもつ一方で、本質的な相違点も存在する。そこで、さまざまな観点から両モデルを比較した結果をとりまとめたのが Table 2 である。

表において、PERT モデルや作業中断のない PN モデルでは、各作業の TF 値が $(LS-ES)$ もしくは $(LF-EF)$ として算出できるのに対し、作業中断を認める場合の PN モデルでは、開始時刻に関する余裕日数 $(LS-ES)$ と終了時刻に関する余裕日数 $(LF-EF)$ の値が異なる場合が多い。特に SS 関係と FF 関係によって LS, ES や LF, EF 値が決まるときにこのような状態が発生する。またその終了時刻に関して順序関係上の制約をもたない作業 (すなわち FF, SF 関係のない作業) でも発生する。

なお、PN モデルにおいてクリティカルな作業の所要日数短縮が工期延伸をもたらす可能性があること、ならびに作業中断を認めると工期を短縮する可能性があることはすでに証明されている⁶⁾。

Table 2 Comparison of PERT model and PN model.

	PERT モデル	PN モデル
① ネットワーク表示方法	アロー型もしくはイベント型	イベント型のみ
② ネットワークの性質	フィードバックループは認められない 各作業ペアには単一の順序関係のみ	同左 各作業ペアに複数の順序関係が可能
③ 順序関係の種類	FSのみ	FS, SS, SF, FF
④ 順序関係の時間遅れ	認めない	認める
⑤ 計算手順	forward pass, backward passで計算	同左
⑥ 解析の難易度	容易	やや複雑
⑦ クリティカルな状態	作業間に存在	順序関係間に存在
⑧ トータルフロートの計算	$LS-ES (=LF-EF)$	作業中断を認めないときは、同左 認めるときは、 $LS-ES (\neq LF-EF)$
⑨ 工期短縮方法	クリティカルパス上の作業の所要日数を短縮	同左、しかしクリティカル作業の所要日数短縮が工期延伸につながることもある
⑩ 作業中断の影響	工期延伸の可能性大	工期延伸の可能性はあるが、逆に工期を短縮する場合もある
⑪ モデルの拡張性	PERT/Manpower, PERT/Cost	PN/Manpower, PN/Cost

3. LP による PERT モデルの解析法の改善

(1) 従来の解析法の問題点

PERT モデルを線形計画問題 (以下 LP) として定式化し、シンプレックス法によって解析する方法は比較的早くから提案されている⁷⁾。このように PERT モデルを LP によって解析するメリットとしては、

- ① 各作業の所要日数が工期に及ばず影響を、感度分析によって比較的容易に分析することができること、
- ② 工期と工費の関係を分析する CPM の解析法としてのパラメトリック・プログラミングに発展できること、

などが考えられる。しかし LP による PERT モデルの解析法は、最短工期を求めるためのものがほとんどで、通常は以下のような定式化となっている⁸⁾。

$$\begin{cases} \text{目的関数: } Z = s_m \rightarrow \min & \dots\dots\dots (1) \\ \text{制約条件: } s_j - s_i \geq D_{ij} \\ \quad \quad \quad s_i \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 i, j : ノード番号 ($=1 \sim m$)

s_i : ノード i の最早結合点時刻 (= 作業 (i, j) の最早開始時刻 (ES_{ij}))

D_{ij} : 作業 (i, j) の所要日数

指摘するまでもなく、この定式化は最終ノード m の最早結合点時刻 s_m の最小化を目的とするため、クリティカルパス上の作業は時刻 ES での着工が保証されるものの、クリティカルでない作業は目的関数に影響しないため、ES で着工する保証がない。また、従来は LF 値を求めるための LP による定式化が論理的根拠をもった形で提案されていないため、LP による解析結果を利用しての TF, FF 値の算出が困難であった。

(2) 解析法の改善

PERT モデルを LP として定式化する場合、本来は、条件①: 各作業の開始・終了時刻に関するもの、

$$x_i + D_{ij} \leq f_{ij} \dots\dots\dots (3)$$

条件②: 作業間の順序関係に関するもの、

$$f_{ij} \leq x_j \dots\dots\dots (4)$$

という 2 種類の制約条件を考えなければならない。ここに、 x_i : ノード i の最早結合点時刻 (= 作業 (i, j) の ES 値), f_{ij} : 作業 (i, j) の EF 値, D_{ij} : 作業 (i, j) の所要日数, x_j : ノード j の最早結合点時刻 (= 作業 (j, k) の ES 値), 作業 (j, k) は作業 (i, j) の後続作業である。

ここでもし作業中断を認めなければ、式 (3) はすべて等式化される。先に示した条件式 (2) は等号条件式 (3) を式 (4) へ代入したものであることは説明を要しない。

ところで、従来の定式化ではクリティカルでない作業

が時刻 ES で開始できる保証のないことを述べたが、この問題を解決するためには、目的関数式 (1) を、

$$Z = x_1 + x_2 + \dots + x_m \rightarrow \min \dots\dots\dots (5)$$

という形に置き換えればよい。これによって、各作業 (i, j) の ES 値 (すなわち x_i) が可能な限り最小化されることは明らかである。ただし、式 (1) の定式化では最適解の目的関数値がそのまま最短工期を与えるのに対し、式 (5) では Z の値が論理的な意味をもたず、最適解を構成する x_m の値が最短工期 T となる。

以上をまとめると、作業中断を認めない場合の ES 値を求める PERT モデルは

$$\begin{cases} \text{目的関数: } Z = x_1 + x_2 + \dots + x_m \rightarrow \min \\ \text{制約条件: } x_j - x_i \geq D_{ij} \\ \quad \quad \quad x_i \geq 0 \quad (i=1 \sim m) \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

と定式化され、双対シンプレックス法によって容易に解析できることが明らかとなった。また、任意の条件式のスラック変数が正値をもつときは、それが当該作業の FF 値を意味することも FF の定義から容易に理解できる。

次に LF 値を求める問題についても、開始ノード 1 の最遅結合点時刻 y_1 の最大化問題としてではなく、

$$\begin{cases} \text{目的関数: } W = y_m + y_{m-1} + \dots + y_1 \rightarrow \max \\ \text{制約条件: } y_j - y_i \geq D_{ij}, \quad y_j \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 y_j : ノード j の最遅結合点時刻 (= 作業 (i, j) の LF 値)

と定式化されなければならない。なお式 (7) の y_m 値は、通常、式 (6) の最小化問題によって求まる最短工期 T と等しく置くことが多いため、目的関数式から y_m を除去し、制約条件式の中の y_m を定数 T に置換した後、シンプレックス法によって解析すればよい⁹⁾。ただし、この場合も式 (7) の W 値は論理的な意味をもたない。

最後に TF 値についても、式 (6) および式 (7) によって x_i, y_i が算出されると、

$$TF_i = y_i - (x_i + D_i) = (y_i - D_i) - x_i \dots\dots\dots (8)$$

によって容易に求めることができる。

以上によって PERT モデルが完全に LP 問題として定式化され、解析できることが明らかになった。

(3) 簡単な適用例とその考察

いま Fig.1 に示すような 9 作業から成る仮想工程ネットワーク¹⁰⁾に対して、3.(2) で提案した LP による解析を試みる。

まず ES 値を求めるための定式化を考える。その目的関数は式 (6) より、

$$Z = x_1 + x_2 + \dots + x_7 \rightarrow \min \dots\dots\dots (9)$$

となる。また制約条件式は、たとえば作業 (1, 2) に対しては、式 (3), (4) より、

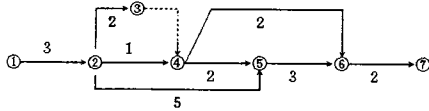


Fig. 1 Example of project network as PERT model.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	定数項
-1	1						≥ 3
	-1	1					≥ 2
	-1		1				≥ 1
	-1			1			≥ 5
		-1	1				≥ 0
			-1	1			≥ 2
			-1		1		≥ 2
				-1	1		≥ 3
					-1	1	≥ 2

Fig. 2 Constraints of min Z problem for PERT model.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 3 &= f_{12} \\ f_{12} &\leq x_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow x_2 - x_1 \geq 3$$

という形で得られる。このようにして、すべての作業 (i, j) に関する制約条件式を作成した結果をまとめたのが Fig. 2 である。

これを解くと、 $x_1=0, x_2=3, x_3=5, x_4=5, x_5=8, x_6=11, x_7=13, s_1=1, s_2=1, s_7=4$ を得る。ここに、 s_p は p 番目の条件式のスラック変数であり、Fig. 2 と前節での考察結果から、フリーフロートとして、 $FF_{23}=1, FF_{45}=1, FF_{46}=4$ となることがわかる。これより、 $ES_{12}=0, ES_{23}=ES_{24}=ES_{25}=3, ES_{34}=5, ES_{45}=ES_{46}=5, ES_{56}=8, ES_{67}=11$ であり、最短工期 $T (=x_7)$ は 13 日となる。

次に、LF 値を求めるための定式化を考える。その目的関数は式 (7) より、

$$W = y_6 + y_5 + \dots + y_1 \rightarrow \max \dots \dots \dots (10)$$

となり、制約条件式は、たとえば作業 (6, 7) に関しては、

$$y_6 + 2 \leq y_7 \rightarrow y_6 \leq 11$$

が得られる。これは前節での考察結果に基づき、 $y_7 (=T)$ に 13 を代入したものである。このようにしてすべての作業 (i, j) に関する制約条件式をまとめたのが Fig. 3 である。

これを解くと、 $y_1=0, y_2=3, y_3=6, y_4=6, y_5=8, y_6=11$ が得られ、 y の定義から、 $LF_{67}=13, LF_{46}=LF_{56}=11, LF_{25}=LF_{45}=8, LF_{24}=LF_{34}=6, LF_{23}=6, LF_{12}=3$ となる。

以上の結果から、各作業の TF 値も、 $TF_{12}=0, TF_{23}=1, TF_{24}=3, TF_{25}=0, TF_{34}=1, TF_{45}=1, TF_{46}=4, TF_{56}=0, TF_{67}=0$ と求まり、作業 (1, 2), (2, 5), (5, 6), (6, 7) がクリティカルパスを構成する。なお、これら

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	定数項
					1	≤ 11
		1	-1			≤ 0
				-1	1	≥ 3
			-1	1		≥ 2
						≥ 2
	-1			1		≥ 5
	-1		1			≥ 1
	-1	1				≥ 2
-1	1					≥ 3

Fig. 3 Constraints of max W problem for PERT model.

の値は Fig. 1 の工程ネットワークを通常の PERT モデルのアルゴリズムで解いた場合と完全に一致した。

ところで、ここでは LF 値を求めるときの目的関数 W を式 (10) のような形で提案したが、いま仮にこれを $W = y_1$ と置いて解くと、 $y_1=0, y_2=3, y_3=5, y_4=6, y_5=8, y_6=11$ となり、上述の計算結果と比較して y_3 の値が正しく求まっていない。ちなみに、ES 値を求める定式化において、目的関数式 (9) を $Z = x_7$ と仮定したときの最適解は、先述の最適解と一致したが、偶然の結果とみなすべきで、LF 値を求めるための定式化と斉合性を保つならば、これらの目的関数はやはり式 (6), (7) の形で与えるべきである。

4. LP による拡張型 PN モデルの解析法

(1) 作業中断を認めない場合の解析法

PN モデルでは 2. (3) において考察したように、作業中断の可否によって工程ネットワークの性質が大きく変化するため、まず作業中断を認めない場合について検討する。なお、PN モデルではイベント型のネットワーク表示法をとるため、 x_j, y_j はそれぞれ作業 j の最早開始時刻 ES_j 、最遅終了時刻 LF_j を表わすことになる。

PN モデルでも、LP で定式化する際には 3. (2) で示した PERT モデルの場合と同様に、2 種類の制約条件を考えなければならない。たとえば、Fig. 4 のような部分工程ネットワークに対して、最短工期 T と各作業の ES を求める線形計画問題は、

$$\left. \begin{aligned} \text{条件①: } & x_1 + D_1 \leq f_1 \\ & x_2 + D_2 \leq f_2 \\ \text{条件②: } & x_2 - x_1 \leq S_1 S_2 \\ & f_1 + \overline{F}_1 \overline{F}_2 \leq f_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

という形で制約条件が定式化される。ここに、 D_j : 作業 j の所要日数、 f_j : 作業 j の EF 値、 $S_i S_j$: 作業 i, j 間の SS 関係の時間遅れの値、 $\overline{F}_i \overline{F}_j$: 作業 i, j 間の FF 関係の時間遅れの値である。

ここで、作業中断を認めない場合は式 (11) の第 1, 第 2 式が等号化するため、これらを第 3, 第 4 式へ代入

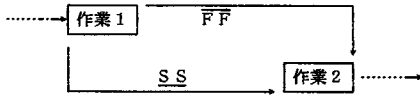


Fig. 4 Example of partial Precedence Network.

することにより、変数と条件式の数を減らすことができる。また目的関数式は PERT モデルの場合の式 (5) と全く同様に、

$$Z = x_1 + x_2 + \dots + x_m \rightarrow \min \dots \dots \dots (12)$$

と表わすことができる。

次に LF を求める線形計画問題の制約条件式を Fig. 4 の場合について定式化すると、

$$\left. \begin{array}{l} \text{条件①: } e_1 + D_1 \leq y_1 \\ \quad \quad e_2 + D_2 \leq y_2 \\ \text{条件②: } e_2 - e_1 \leq S_1 S_2 \\ \quad \quad y_1 + F_1 F_2 \leq y_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 e_j : 作業 j の LS 値となる。この場合も作業中断を認めないときは式 (13) の第 1, 第 2 式が等号化するため、これらを第 3, 第 4 式へ代入することにより、変数と条件式の数を減らすことができる。また目的関数式は、先の式 (7) と同様に、

$$W = y_m + y_{m-1} + \dots + y_1 \rightarrow \max \dots \dots \dots (14)$$

となるが、この場合も式 (12) の最小化問題で得られる最短期 T と y_m とを等しく置くことを付記しておく。

ところで、任意の作業ペアに対して複数の順序関係が存在する場合は、式 (11), 式 (13) に例示した条件②についても当該作業ペアに対して複数の制約条件式が成立するが、当然最も厳しい条件式のみが有効となる。

以上によって作業中断を認めない場合の PN モデルは LP によって定式化できることが明らかにされた。

(2) 作業中断を認める場合の解析法

この場合の定式化も本質的には作業中断を認めない場合と同じであるが、異なるのは式 (11), 式 (13) において、条件①が不等号のまま制約条件式の中に組み込まれることである。したがって、 $x_j (=ES_j)$ を求める線形計画問題では $f_j (=EF_j)$ が、また $y_j (=LF_j)$ を求める問題では $e_j (=LS_j)$ が決定変数として制約条件式の中に残ることになる。

もう 1 つの留意点は、ある作業 p がその終了時刻 EF, LF に対して何の順序関係ももたない (すなわち、FF, SF 関係が存在しない) 場合、LF を求める線形計画問題において、 $y_p \leq T$ という関係式を制約条件式の中に盛り込まなければならないことである。

これら 2 点に留意すれば、作業中断を認める場合の LP による定式化と解法については格別の説明を要しない。

(3) 簡単な適用例と考察

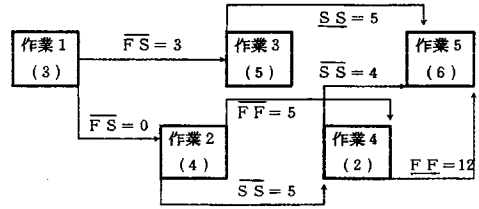


Fig. 5 Example of project network as PN model.

いま Fig. 5 に示すような 5 作業、7 順序関係からなる仮想工程ネットワークに対して 4. (1), 4. (2) で提案した LP による解析を試みる。

a) 作業中断を認めない場合

まず各作業の ES 値と最短期 T を求めるための定式化を考える。その目的関数式は式 (12) より、

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min \dots \dots \dots (15)$$

となる。次に制約条件式は式 (11) の考え方をを用いることにより、

条件①に関して

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 3 \leq f_1, \quad x_2 + 4 \leq f_2, \quad x_3 + 5 \leq f_3 \\ x_4 + 2 \leq f_4, \quad x_5 + 6 \leq f_5 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

条件②に関して

$$\left. \begin{array}{l} \overline{F_1 S_2} = 0 \rightarrow f_1 + 0 \leq x_2 \\ \overline{F_1 S_3} = 3 \rightarrow f_1 + 3 \leq x_3 \\ \overline{S_2 S_4} = 5 \rightarrow x_2 + 5 \leq x_4 \\ \overline{F_2 F_4} = 5 \rightarrow f_2 + 5 \leq f_4 \\ \overline{S_3 S_5} = 5 \rightarrow x_3 + 5 \geq x_5 \\ \overline{S_4 S_5} = 4 \rightarrow x_4 + 4 \leq x_5 \\ \overline{F_4 F_5} = 12 \rightarrow f_4 + 12 \geq f_5 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

が得られる。ここに作業中断を認めないときは式 (16) がすべて等号化するため、これらを式 (17) へ代入し、 $f_1 \sim f_5$ を消去すると、式 (17) は順に、

$$\left. \begin{array}{l} x_2 - x_1 \geq 3 \\ x_3 - x_1 \geq 6 \\ x_4 - x_2 \geq 5 \\ x_4 - x_2 \geq 7 \\ x_5 - x_3 \leq 5 \\ x_5 - x_4 \geq 4 \\ x_5 - x_4 \leq 8 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

と変形できる。ここで 4. (1) での考察に基づいて同一作業ペアに関する条件式の有無をチェックすると、式 (18) の第 3, 第 4 式の関係から第 3 式を除去すべきであることがわかる。

以上によって、この問題は Fig. 6 に示すような 6 つの不等号制約条件式と 5 つの決定変数をもつ線形計画問題として定式化できた。これを双対シンプレックス法で解けば、 $x_1=0, x_2=3, x_3=9, x_4=10, x_5=14$ となる。これらを式 (16) へ代入すれば、 $f_1=3, f_2=7, f_3=14,$

$f_4=12, f_5=20$ が得られ、最短工期 T は 20 日と求まる。

次に LF 値を求めるための定式化について考えると、まず目的関数は式 (14) から、

$$W = y_5 + y_4 + y_3 + y_2 + y_1 \rightarrow \max \dots \dots \dots (19)$$

となる。ここで y_5 に $T (=20)$ を代入し、式 (16)~(18) の場合と同様に制約条件を定式化していくと、Fig. 7 を得る。なお、図中の第 7 式は作業 3 の最遅終了時刻 y_3 を計算工期内に抑えるために付加したものである。これを解けばただちに $y_1=3, y_2=7, y_3=20, y_4=12, y_5=20$ を得、最遅開始時刻も $e_1=0, e_2=3, e_3=15, e_4=10, e_5=14$ と求まる。

以上の結果、作業 3 のみが TF として 6 日 ($e_3 - x_3 = y_3 - f_3$) をもつことがわかる。

b) 作業中断を認める場合

各作業の ES 値と最短工期 T を求める問題の制約条件式は、式 (16) が不等号条件式のまま残ることに注意

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数項
-1	1				≥ 3
-1		1			≥ 6
	-1		1		≥ 7
		-1		1	≤ 5
			-1	1	≥ 4
			-1	1	≤ 8

Fig. 6 Constraints of min Z problem for PN model without job-interruption.

y_1	y_2	y_3	y_4	定数項
-1	1			≥ 4
-1		1		≥ 8
	-1		1	≥ 5
		1		≥ 14
			1	≤ 12
			1	≥ 8
		1		≤ 20

Fig. 7 Constraints of max W problem for PN model without job-interruption.

すれば a) と同様であり、Fig. 8 のようになる。また目的関数式も同様に考えればよいが、最終作業に中断が発生する可能性を考えれば式 (15) のままではなく、これに最終作業の最早終了時刻 f_5 項を追加し、

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + f_5 \rightarrow \min \dots \dots \dots (20)$$

とすればよい。これを解くと、 $x_1=0, x_2=3, x_3=7, x_4=8, x_5=12, f_1=3, f_2=7, f_3=12, f_4=12, f_5=18$ が得られ、作業 4 で中断が生じることがわかる。そして最短工期 T は 18 日となり、作業中断を認めることによって工期を 2 日短縮することが可能となった。このような事態が発生する可能性はすでに Table 2 に示したとおりである。

次に LF 値を求める問題の定式化については、目的関数は式 (19) のままであり、 y_5 に $T=18$ を代入して制約条件を順次定式化すればよい。ただし Fig. 5 において作業 3 に対してはその終了時刻に関する順序関係が存在していないため、4. (2) での考察結果に基づいて、 $y_3 \leq 18$ という条件式を追加しておかなければ LP 問題として解不能となる。また作業 4 に関しても $F_4 F_5$ 関係しかもたないため、 $y_4 \leq 18$ という条件式が必要となる。いまこの場合の制約条件式を図示したのが Fig. 9 である。これを解くと、 $e_1=0, e_2=3, e_3=13, e_4=8, e_5=12, y_1=3, y_2=13, y_3=18, y_4=18, y_5=18$ が得られ、作業 2、作業 4 に中断が発生することになる。

Fig. 10 は仮想ネットワークに対する計算結果をバーチャートで示したものであるが、PN モデルの性質上、各作業の作業中断日数と開始日、終了日は算出されるものの、具体的にその作業をいつ中断すべきかに関してまでは明らかにできない。また、中断を認める場合と認めない場合とで TF 値が異なることはすでに 2. (3) で指摘したとおりであるが、このような小さな仮想ネットワークに対しても、作業 4 において、

作業中断を認めない場合：TF₄=0

作業中断を認める場合：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	定数項
-1					1					≥ 3
	-1					1				≥ 4
		-1					1			≥ 5
			-1					1		≥ 2
				-1					1	≥ 6
	1				-1					≥ 0
		1				-1				≥ 3
	-1		1							≥ 5
						-1		1		≥ 5
		-1		1						≤ 5
			-1	1						≥ 4
							-1	1		≤ 12

Fig. 8 Constraints of min Z problem for PN model with job-interruption.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	y_1	y_2	y_3	y_4	定数項
				1					\leq 12
	-1				1				\leq 0
		-1		1					\leq 5
								1	\leq 18
							1		\leq 20
-1					1				\leq 3
	-1					1			\leq 4
		-1					1		\leq 5
			-1					1	\leq 2
		1			-1				\leq 3
-1			1						\leq 5
						-1		1	\leq 5
			-1	1					\leq 4
								1	\leq 6

Fig.9 Constraints of max W problem for PN model with job-interruption.

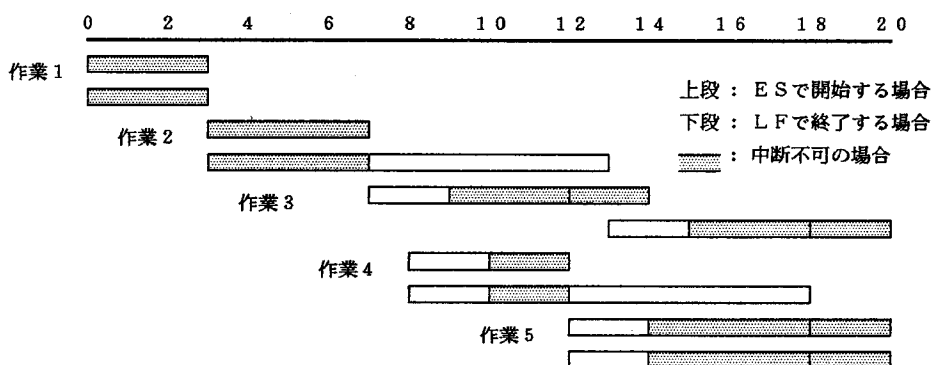


Fig.10 Calculated results shown as bar-chart.

開始時刻に関して $TF_4=0$

終了時刻に関して $TF_4=6$

となり、このことが立証された。

これらの結果は Fig.5 の工程ネットワークを 2.(2) で触れた方法で解いた場合と完全に一致した。

なお、3. ならびに 4. では十分に触れなかったが、Fig.2, Fig.3 ならびに Fig.6~Fig.9 に示した適用例から明らかのように、PN モデルを LP で定式化する場合、制約条件式の係数行列は、1, 0, -1 という要素しかもたない。したがって、シンプレックス法のアルゴリズムから、各作業の所要日数ならびに作業間順序関係の時間遅れが整数値ならば、ES, EF, LS, LF, TF, FF も必ず整数値となる。

5. おわりに

拡張型 PN モデルが従来型 PN モデルを、また従来型 PN モデルが PERT モデルを包含することから、拡張型 PN モデルも PERT モデルの forward pass, backward pass アルゴリズムによって解析可能なことは容易

に想像できる。しかし、PERT モデルの最短期探索問題が LP で解析可能であるのに対し、拡張型 PN モデルの場合もそれが可能かどうかについては、いままでも未検討であった。

そこで本研究では、まず PERT モデルと PN モデルをさまざまな観点から比較検討し、特に TF の性質や作業中断の可否が及ぼす影響が異なることを明らかにした。

次に PERT モデルの LP による定式化と解法について検討し、従来においては論理的考察が不十分であった LF 値を求める問題に対する定式化の方法を明らかにし、論理的考察を行った。

最後に拡張型 PN モデルも、作業中断を認める場合と認めない場合とで定式化が異なるものの、LP による解析が可能であることを明らかにし、簡単な仮想ネットワークへの適用を試みた。これによって、拡張型 PN モデルにおいても、各作業の所要日数や作業間順序関係の時間遅れに関する感度分析が可能となった。

今後の課題としては、LP で定式化したときの制約条

件式の係数行列が特殊な形状 (1, 0, -1 という要素のみで, 比較的疎な行列) をしていることから, より効率的な解法について検討することが必要である。なお紙面の都合上, 本論文では言及しなかったが, 作業間の順序関係 (種類と時間遅れ) および各作業の所要時間をインプットすることにより, 工程ネットワークを自動作図し, さらに線形計画問題の定式化自体もコンピュータ処理する方法を開発中である。

最後に本研究を遂行するに際し, 名古屋工業大学昭和63年度卒業生 村瀬安彦君 (現在, 矢作建設工業 (株) 勤務) の協力を得たことを付して, 同君に感謝します。

参 考 文 献

- 1) Ahuja, H. N. : Project Management, pp. 64~85, John Wiley & Sons, 1984.
- 2) Crandall, K. C. : Project Planning with Precedence Lead/Lag Factors, Project Management Quarterly, Vol. 4, No. 3, pp. 18~27, 1973.
- 3) Wiest, J. P. and Levy, F. K. : A Management Guide to PERT/CPM, pp. 134~146, Prentice-Hall, 1977.
- 4) 山本幸司・福岡敬介・池守昌幸 : Precedence Network/Man-day モデルの開発に関する基礎的研究, 土木計画学研究・講演集, No. 7, pp. 461~468, 1985.
- 5) Yamamoto, K. and Yoshikawa, K. : Two Resource-constrained Scheduling Models Solving the Problems of PERT/Manpower, Proc. of 4th International Symposium on Organization and Management of Construction, Vol. 3, pp. 1041~1049, CIB, 1984.
- 6) 山本幸司・井上俊輝・池守昌幸・福岡敬介 : Precedence Network の拡張とコンピュータ処理に関する研究, 土木計画学研究・論文集, No. 4, pp. 77~84, 1986.
- 7) Charnes, A. and Cooper, W. : A Network Interpretation and a Directed Subdual Algorithm for Critical Path Scheduling, J. of Industrial Engineering, Vol. 13, No. 4, pp. 213~219, 1962.
- 8) たとえば, H. M. ワグナー (森村英典, ほか監訳) : オペレーションズ・リサーチ入門2 (ネットワークモデル), pp. 69~72, 培風館, 1976.
- 9) たとえば, 平本 巖・長谷 彰 : 線形計画法, 培風館, 1973.
- 10) 吉川和広 : 最新土木計画学, pp. 163~167, 森北出版, 1975.

(1989. 7. 20・受付)