

# 圧密を受ける多孔質飽和弾性土内の円形覆工トンネルの 時間依存挙動の解析

## TIME DEPENDENT ANALYSIS OF SATURATED POROELASTIC CONSOLIDATION AROUND A CIRCULAR LINING TUNNEL

平島 健一\*・川上哲太郎\*\*・小田切 寛\*\*\*

By Kenichi HIRASHIMA, Tetsutaro KAWAKAMI and Hiroshi ODAGIRI

The analysis of the interaction between a circular tunnel lining and the surrounding saturated poroelastic soil is presented by use of the exact theory for the treatment of the lining. The method of analysis is performed by Laplace Transforms of the governing equations with respect to time and by numerical inversions of them. A parametric study is carried out to investigate the effects of the elastic properties of both the lining and the soil, the thickness of the lining, and the magnitude of applied initial stress states of the soil upon the behaviour of the lining. The comparison between the exact theory due to the Authors and the shell theory for the treatment of the lining is made by numerical results and graphical representations.

*Keywords*: time dependent analysis, saturated poroelastic consolidation, circular lining tunnel, Laplace Transforms, interaction problem

### 1. 緒 言

多孔質の飽和弾性土中にトンネルを掘削する場合、トンネル壁周囲に巻き立て覆工（以下、覆工とよぶ）を設置することは掘削トンネルの強度や安定性を向上させる点からきわめて有効な手段である。この覆工は、また周囲の土に対する支持だけでなく、地下水のトンネル通路内への浸水を防ぐ役割も果たす。当然のことながら、土木技術者にはこの覆工をより合理的に設計するために覆工に作用する荷重の見積りやたわみを予知することが要求されるが、第一近似としては、トンネル周囲の土は線形等方性の多孔質飽和弾性体として理想化し、覆工の材料も完全弾性体（一般には補強材）であると仮定するのがよい。また一般に、トンネルの掘削は掘削に伴う空洞形成による応力集中や応力変動をもたらすことから、土全体にわたって過剰間隙水圧を発生させることになる。掘削の初期段階では、土はこの過剰間隙水圧が消散される時間をもたない単一段階（非排水状態）の弾性体とし

て反応する。その後、過剰間隙水圧が消散し始め、最終的にすべての過剰間隙水圧が完全に消えるまで土は圧密される。そして再び土は単一段階（完全排水状態）の弾性体として反応するのが普通である。

本論文においては、覆工を有するトンネルの場合の覆工と多孔質飽和弾性土の間の相互作用について時間依存状態の解析を行うことを目的としたものである。覆工上の荷重は覆工外周部と接した、それを取り囲む土要素の粘弾性的挙動によるものであり、したがって、覆工の挙動は周囲の多孔質飽和弾性土内の圧密による時間依存に関係することになる。

従来までの研究によると覆工の挙動については、覆工の外周面と内周面の応力を区別せず、厚さ方向に応力を集積した断面力を用いた初等的なシェル理論によって考えられてきた<sup>1),2)</sup>。しかしながら、より正確な覆工上の荷重の見積りやたわみの予知ができることが望ましいことはいうまでもない。本論文においては、土の圧密による覆工の時間的挙動を初等的シェル理論による近似解と覆工の厚さの影響を考慮した厳密な境界条件を満たす厳密解との相違を比較検討し、初等理論の信頼性を定量的に評価する。また本理論に基づき、覆工と土の接触面における変位や応力分布を明らかにする。

\* 正会員 工博 山梨大学教授 工学部土木工学科  
(〒400 甲府市武田4-3-11)

\*\* 正会員 工博 山梨大学助手 工学部土木工学科  
(同上)

\*\*\* 甲府市役所 (〒400 甲府市丸の内1-18-1)

2. 問題設定

まず、多孔質飽和弾性土内に開削されたトンネルの軸は水平とし、かつトンネル径に比較してその長さが十分長いものとすれば、問題は平面ひずみ状態として取り扱うことができる。また、原位置初期応力状態が乱されることなく、円形の巻き立て覆工厚分のスリット状空洞が開削され、そこに覆工を施工配置した後、覆工内壁面での直応力およびせん断応力が除去されるものとする。これは実際上の問題として、覆工が切羽面の前方の粘性土層内へ水平に押し込まれた後に、内面土砂を除去するような場合に相当する。あるいは通常の岩盤地山のように空洞開削後、ある時間が経過してから覆工を施工配置するような場合には、施工配置後の時点からの原位置変動応力状態が対象荷重となる。いずれの場合とも原位置での初期ないし変動応力状態が問題設定の荷重となるが、以下では、一応前者の場合に限定した記述を行うことにする。さらに、トンネルはその直径に比較してある程度深い場所に掘削されるものとすれば、トンネル掘削以前の地中の原位置（初期）応力状態は、鉛直方向に働く主応力  $\sigma_v$  と水平方向に働く主応力  $\sigma_H$  であり、それらの応力は一様であると仮定することができる。ここで、水平応力は、鉛直応力との比率  $N$  を用いて以下のように表わすこととする。

$$\sigma_H = N\sigma_v \dots\dots\dots (1)$$

有効応力については、次のように表わされる。

$$\sigma'_v = \sigma'_v + p_0, \quad \sigma'_H = \sigma'_H + p_0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\sigma'_v, \sigma'_H$  はそれぞれ鉛直、水平方向の有効応力成分であり、 $p_0$  は原位置（初期）間隙水圧である。以下、通常地盤問題の取り扱いにおけると同じように圧縮応力を正とする。また、静止土圧係数  $K_0$  は次のように定義される。

$$\sigma'_H = K_0 \sigma'_v \dots\dots\dots (3)$$

ところで、間隙水を伴う土地盤に関して湿潤密度を  $\gamma$  とすると、式（1）の  $N$  と式（3）の  $K_0$  は、次の関係にあることが導かれる。

$$N = K_0 - \frac{\gamma_w}{\gamma} (K_0 - 1) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\gamma_w$  は間隙水の単位体積重量である。

円形の巻き立て覆工に関して、図-1 に示すように極座標系によって原位置（初期）応力状態を定式化するのが最も都合が良い。

このような座標系を設定すると、円形境界上に働く各応力は一般性を失うことなく次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_m + \sigma_a \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_m - \sigma_a \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta} &= -\sigma_a \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

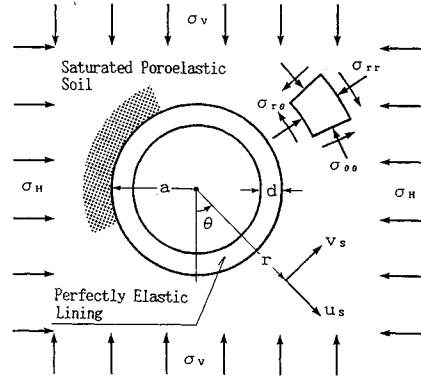


図-1 座標系と円形覆工の幾何学的配置

ここに、

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_v + \sigma_H), \quad \sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_v - \sigma_H) \dots\dots\dots (6)$$

ここでの問題は、完全弾性体としての覆工と周囲の多孔質飽和弾性圧密土との間の構造相互作用の時間依存を対象とすることであるが、解析を容易にするために、原位置（初期）応力状態を2つの部分の和、すなわち、平均応力  $\sigma_m$  の部分と、軸差応力  $\sigma_a$  の部分の和として考える。この問題に対する境界条件は以下のとおりである。すなわち、まず通常の場合として、覆工はコンクリート等の稠密性の高い建設材料から構成されることから、弾性土と比べて相対的に不透水性と仮定することができる。したがって過剰間隙水圧  $p$  に関する境界条件は一般性を失うことなく次のように設定できる。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \text{ at } r = a \dots\dots\dots (7)$$

次に応力成分に対しては、上述のように2つの部分に分解したことから、次式のように、 $r = a$  において2つに区分した形の境界条件となる。

Case 1 平均応力の部分：

$$\sigma_{rr} = \sigma_m, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \text{ at } r = a \dots\dots\dots (8)$$

Case 2 軸差応力の部分：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_a \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta} &= -\sigma_a \sin 2\theta \text{ at } r = a. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

なお、覆工の内側半径  $r = a - d (= b)$  においては応力自由の境界条件が成立するから次式で与えられる。

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \text{ at } r = b \dots\dots\dots (10)$$

ここで、解析にあたっては時間を次式の無次元形で表わすことにする。

$$T_0 = Ct/a^2 \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $t$  は掘削時からの経過時間、 $C$  は圧密係数、 $a$  は図-1 に示したトンネル半径を表わす。

### 3. 解析過程

#### (1) 多孔質飽和弾性土の挙動

##### a) 任意時刻における挙動

平面ひずみ状態における等方性弾性体に関する基礎方程式は極座標系を用いて、以下のように示される。

(つり合い方程式)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

(構成方程式)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} - p &= -(\lambda e_v + 2 G_s e_{rr}), \\ \sigma_{\theta\theta} - p &= -(\lambda e_v + 2 G_s e_{\theta\theta}), \\ \sigma_{r\theta} &= -G \gamma_{r\theta}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

ここに、 $\lambda$ と $G_s$ は弾性土に関するラメ定数である。

(幾何学関係式)

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_s}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u_s}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_s}{\partial \theta}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_s}{\partial \theta} + \frac{\partial v_s}{\partial r} - \frac{v_s}{r}, \\ e_v &= e_{rr} + e_{\theta\theta}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

(圧密方程式)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 e_v &= \frac{1}{C} \frac{\partial e_v}{\partial t}, \\ \nabla^2 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

弾性土に関して、

$$C = \frac{\kappa}{\gamma_w} (\lambda + 2 G_s) = \frac{\kappa}{\gamma_w} 2 G_s \frac{1 - \nu_s}{1 - 2 \nu_s}. \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 $\kappa$ は等方性の透水係数、 $\gamma_w$ は間隙水の単位体積重量、 $\nu_s$ は土地盤に関するポアソン比、 $u_s$ および $v_s$ はそれぞれ変位の半径方向および円周方向成分である。

以下の解析に必要なラプラス変換を、たとえば体積ひずみ $e_v$ について考えて次のように表わすものとする。

$$\bar{e}_v = \int_0^\infty \exp(-st) e_v(t) dt. \dots\dots\dots(17)$$

したがって上付きのバーがその量のラプラス変換を表わすことになる。

上記の基礎方程式に体積ひずみ $e_v$ と回転 $\omega$ を導入し、式(15)のラプラス変換を実行したものを組み合わせると次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2 G_s) \frac{\partial e_v}{\partial r} - \frac{G_s}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} &= \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \nabla^2 \bar{e}_v &= \frac{s}{C} \bar{e}_v, \\ (\lambda + 2 G_s) \frac{1}{r} \frac{\partial e_v}{\partial \theta} + G_s \frac{\partial \omega}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} e_v &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_s) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_s}{\partial \theta}, \\ \omega &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u_s}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_s). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

いま、関数 $\phi(r, \theta, t)$ を次式：

$$p = G_s \phi + (\lambda + 2 G_s) e_v. \dots\dots\dots(20)$$

を満たすようなものとして導入すれば、式(12)は次のような簡潔な形式で表示できることになる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \\ \nabla^2 \bar{e}_v = \frac{s}{C} \bar{e}_v. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

上記の基礎方程式の解は先に与えられた境界条件を考慮して次の形に仮定して求めることにする。

$$\left. \begin{aligned} [u_s, p, \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, e_v, \phi] \\ = [U, P, S_{rr}, S_{\theta\theta}, E_v, \Phi] \cos n\theta, \\ [v_s, \sigma_{r\theta}, \omega] = [V, S_{r\theta}, \Omega] \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

以下では、 $U, V$ を変位係数、 $S_{rr}, S_{\theta\theta}, S_{r\theta}$ を応力係数とよぶことにする。また、 $P, E_v, \Phi, \Omega$ もそれぞれ $p, e_v, \phi, \omega$ の係数である。

上式において、境界条件のうちのCase 1は $n=0$ 、Case 2は $n=2$ にそれぞれ対応することが容易に推定できる。さて、このとき式(21)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{n}{r} \Omega = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad -\frac{n}{r} \Phi = \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 \bar{E}_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{E}_v}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \bar{E}_v = \frac{s}{C} \bar{E}_v. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_v &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{U}) + \frac{n}{r} \bar{V}, \\ \Omega &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V) + \frac{n}{r} U. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

式(23)<sub>3</sub>は、 $n$ 次の変形ベッセル型の方程式であり、したがって一般解は次の形で与えられる。

$$\bar{E}_v = A_1 K_n \left[ \sqrt{\frac{s}{C}} r \right] + A_2 I_n \left[ \sqrt{\frac{s}{C}} r \right]. \dots\dots\dots(25)$$

ここに、 $I_n, K_n$ は $n$ 次の変形ベッセル関数である。式(23)<sub>1,2</sub>は、コーシー型の微分方程式に変形できるので、解は次の形で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= A_3 r^{-n} - A_4 r^n, \\ \Omega &= A_5 r^{-n} + A_6 r^n. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

変位係数および応力係数のラプラス変換に対し、式(25)、(26)を解けば、それらの一般解は6つの独立解によって表わされる。さらに、式(27)において $r \rightarrow \infty$ と置いたとき、考えている変位係数および応力係数の力学量のラプラス変換が有限値でなければならない制限条件から式を変形整理すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ r\bar{P}/2G_s \\ r\bar{S}_{rr}/2G_s \\ r\bar{S}_{\theta\theta}/2G_s \\ r\bar{S}_{r\theta}/2G_s \end{bmatrix}^T = \mathbf{M} [C_1, C_2, C_3]^T \quad \dots\dots\dots(27)$$

ここに、行列  $\mathbf{M}$  は付録 A の式 (A・1) で与えられ、 $C_1, C_2, C_3$  は境界条件から決定される定数であり、 $a, \beta$  は式 (A・2) で定義される。

覆工トンネルの場合、 $r=a$  における挙動が重要であるから、特に弾性圧密土の内部境界 ( $r=a$ ) で以下のような量を定義することとする。

$$\begin{aligned} & [X(t), Y(t), Z(t), R(t), T(t), S(t)] \\ & = [U(a, t), V(a, t), P(a, t), S_{rr}(a, t), S_{r\theta}(a, t), \\ & \quad \frac{\chi}{\gamma_w} \int_0^t \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=a} dt] \quad \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

ここに、 $S(t)$  は弾性土とトンネル覆工接触面の単位面積から流出される間隙水の全容積を示す。ラプラス変換を、式 (19) の最後の式に適用すれば、その結果は次のようになる。

$$\bar{S} = \frac{a^2}{\beta^2(\lambda+2G_s)} \left[ \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} \right]_{r=a} \quad \dots\dots\dots(29)$$

しかし、ここで仮定しているような不透水性の覆工トンネルにおいては、 $(\partial P/\partial r)=0$  であることは明らかである。

$n>1$  の場合は、式 (27) が次式の形に変形できる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{R}-\bar{T} \\ \bar{Z} \\ \bar{R}+\bar{T} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\bar{S}} \begin{bmatrix} R_0-T_0 \\ Z_0 \\ R_0+T_0 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{2G_s}{a} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & 0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}-\bar{Y} \\ 2\bar{S} \\ \bar{X}+\bar{Y} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= (n-1) \left\{ 1 - \left[ \frac{2G_s}{\lambda+2G_s} \right] \frac{4n(q+n)}{\beta^4 D} \right\}, \\ \Phi_{12} &= -\Phi_{21} = \frac{-2(q+n)}{\beta^2 D}, \\ \Phi_{22} &= \left[ \frac{\lambda+2G_s}{2G_s} \right] \frac{1}{(n-1)D} - \frac{q+n}{\beta^2 D}, \\ \Phi_{33} &= n+1. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(31)$$

また、 $R_0, T_0, Z_0$  はそれぞれ初期時刻 ( $t=0$ ) での  $R, T, Z$  の値を示している。

不透水トンネル覆工の場合には、 $S=0$  であるから上式はより簡単となる。

式 (30) は  $n>1$  の場合に有効であり、したがって Case 2 に対応する解析式となる。

原位置 (初期) 平均応力分である Case 1 の問題は  $n=0$  に対応しており、この場合は弾性土の挙動が時間に独立であって、次式によって支配される。

$$\begin{aligned} R &= R_0 + \left[ \frac{2G_s}{a} \right] X, \quad Z = Z_0, \\ Y &= T = S = 0. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(32)$$

**b) 初期時刻 ( $t=0$ ) における挙動**

この場合には  $T_0=0$  であることより  $e_v=0$  となるのは明らかであるから、式 (25) の  $A_1, A_2$  は恒等的に零となる。また、 $r \rightarrow \infty$  での有限性条件を考慮し、さらに、 $r=a$  を代入整理すると最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R-T \\ R+T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_0-T_0 \\ R_0+T_0 \end{bmatrix} \\ &+ \left[ \frac{2G_s}{a} \right] \begin{bmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X-Y \\ X+Y \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

式 (26) は、 $n>1$  の場合に対して有効である。 $n=0$  の場合は以下のようになる。

$$\begin{aligned} R &= R_0 + \left[ \frac{2G_s}{a} \right] X, \quad Z = Z_0, \\ Y &= T = S = 0. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(34)$$

**c) 圧密終了時刻 ( $t=\infty$ ) における挙動**

$r \rightarrow \infty$  の場合、 $\nabla^2 e_v=0$  が成り立つから式 (23)<sub>3</sub> はラプラス交換を実行しない形で次のようになる。

$$\frac{\partial^2 E_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_v}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} E_v = 0. \quad \dots\dots\dots(35)$$

この一般解は次のようになる。

$$E_v = A_1 r^{-n} + A_2 r^n. \quad \dots\dots\dots(36)$$

したがって、求めるべき問題の解は a)  $T_0=$  任意の場合の解を導き出す段階で式 (23)<sub>3</sub>, (25) を用いたものの代わりに式 (35), (36) を用いれば、 $T_0=\infty$  の一般解が各係数をラプラス交換しない形で最終的に以下のように求められる。

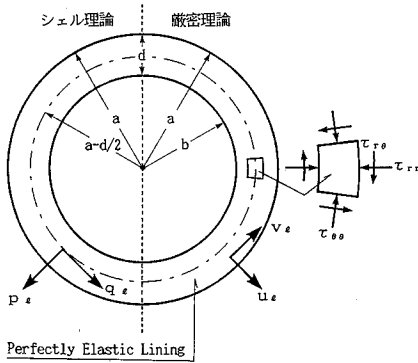
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R-T \\ R+T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_0-T_0 \\ R_0+T_0 \end{bmatrix} + \left[ \frac{2G_s}{a} \right] \\ &\cdot \begin{bmatrix} n-1 & \frac{\lambda+G_s}{\lambda+3G_s} & 0 \\ 0 & n+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X-Y \\ X+Y \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

式 (37) は  $n>1$  の場合に対して有効である。 $n=0$  の場合は前項 b) で示した式 (34) で与えられる。

**(2) トンネル覆工の挙動**

**a) シェル理論を適用した場合<sup>1),2)</sup>**

ここでは、覆工は厚さ  $d$  で、半径  $a$  の外面において環状の断面をもち、 $d \ll a$  が仮定できるものとすれば、円筒シェル理論を適用して問題を近似的に解析できることになる。その場合には、 $r=a$  と  $r=a-d$  ( $\equiv b$ ) での状態を区別することなく断面力として取り扱えばよい。いま、図-2 の左半分に示すように弾性覆工の平面ひずみ状態での覆工の中心線で代表させた場合の覆工に



図一 シェル理論および弾性理論を適用した覆工のモデル

作用する荷重および変位を形式的にそれぞれ次式で表示する。

$$\left. \begin{aligned} [p_i, u_i] &= [P_i, U_i] \cos n\theta, \\ [q_i, v_i] &= [Q_i, V_i] \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

Carter ら<sup>2)</sup>は  $n > 1$  の場合に対し上式のように設定すれば、覆工は以下の剛度関係となることを示した。

$$\left. \begin{aligned} \begin{cases} P_i - Q_i \\ P_i + Q_i \end{cases} &= \begin{bmatrix} S_A & (n-1)^2 & 1-n^2 \\ 1-n^2 & S_B & (n+1)^2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{S_B}{2} n^2 \begin{bmatrix} (n-1)^2 & n^2-1 \\ n^2-1 & (n+1)^2 \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{Bmatrix} U_i - V_i \\ U_i + V_i \end{Bmatrix}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} S_A &= E_i^* \frac{d}{a^2}, \quad S_B = \frac{E_i^* d^3}{12 a^4}, \\ E_i^* &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

式 (39) は Case 2 ( $n=2$ ) に対して有効であるが、Case 1 ( $n=0$ ) については Carter らは以下のように設定した。

$$P_i = S_A U_i, \quad Q_i = V_i = 0. \dots\dots\dots(41)$$

**b) 弾性弾性理論を適用した場合**

ここでは前述のようなシェル理論を適用した近似手法によらず弾性弾性理論を適用して覆工に作用する変位と応力の関係式を求め、図一の右半分に示すように弾性覆工の二次元的状態を考える。

境界条件としては覆工の外周および内周において次のように設定する。

$$\left. \begin{aligned} [\tau_{rr}, u_i] &= [P_i, U_i] \cos n\theta, \\ [\tau_{r\theta}, v_i] &= [Q_i, V_i] \sin n\theta \text{ at } r=a, \\ \tau_{rr} = \tau_{r\theta} &= 0 \text{ at } r=b. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

上記のように応力、変位を設定するとたとえば、文献2)により弾性体としての覆工に作用する応力と変位の一般式が求められるので、これに境界条件式 (42) を代入整

理すれば、最終的に次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} P_i - Q_i \\ P_i + Q_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i - V_i \\ U_i + V_i \end{Bmatrix}. \dots\dots\dots(43)$$

上式中の  $a_{ij}$  は付録Aの式 (A.3) および式 (A.4) に示した値をとる。この式は Case 2 ( $n=2$ ) に対して有効であるが、Case 1 ( $n=0$ ) に対しては、たとえば文献3)により次のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} P_i &= \frac{E_i \{(a/b)^2 - 1\}}{a \{(1+\nu_i) + (1-\nu_i)(a/b)^2\}} U_i, \\ Q_i &= V_i = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

**(3) 相互作用問題**

相互作用問題に関する解は、弾性土と覆工の接触面で設定される境界条件、すなわち、 $r=a$  での条件で与えられる応力および変位の境界条件に関して、以下のように2つの面極端な場合を想定する。

**[I] Perfectly Rough Interface**

弾性土と覆工の境界面では、境界面を横切る半径方向および円周方向変位ならびに半径方向直応力およびせん断応力が完全に連続していることを意味する。

**[II] Perfectly Smooth Interface**

半径方向の変位は連続しているが、境界面でのせん断応力がゼロであることを意味する。

実際には、弾性土と覆工の間で起こるすべり等により、これらの両極間のどこかで境界面条件が定まるであろう。したがって、ここで、上記のように条件 [I] および [II] の両方を設定するのは上下限の解を想定していることに起因している。

弾性弾性理論を適用した場合、上記の境界条件より導かれる相互作用問題に関する解は次のようになる。

**a) 任意時刻における相互作用**

**[I] Perfectly Rough Interface (完全結合境界)**

Case 1 ( $n=0$ ) : この場合は連続の条件  $P_i = -R$  から式 (32) と式 (44) を組み合わせることにより、時間に独立な解が次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} X = U_i &= -\sigma_m \frac{a}{2 G_s + S_0 a}, \quad Z = Z_0, \\ Y = V_i &= T = Q_i = 0, \\ R &= -P_i = \sigma_m + \left[ \frac{2 G_s}{a} \right] X. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

Case 2 ( $n=2$ ) : この場合は連続の条件  $P_i = -R$ ,  $Q_i = T$  から式 (31) と式 (43) を組み合わせることにより次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X} - \bar{Y} \\ \bar{X} + \bar{Y} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{S} \begin{Bmatrix} 2 \sigma_a \\ 0 \end{Bmatrix}. \dots\dots\dots(46)$$

ここに、 $S_{ij}$  は付録Aの式 (A.5) で与えられる。間隙水圧については式 (21) より次式で表わされる。

$$\bar{Z} = \frac{Z_0}{S} + \left[ \frac{2G_s}{a} \right] \phi_{21}(\bar{X} - \bar{Y}) \dots\dots\dots(47)$$

[II] Perfectly Smooth Interface (完全すべり境界)

Case 1: この場合は [I] の解と同じであり, 式 (45) で与えられる。

Case 2: この場合は  $T=Q_i=0$ ,  $P_i=-R$  であるから, 解は付録Aの式 (A・6), (A・7) の形で求められる。

b) 初期時刻 ( $T_0=0$ ) における相互作用

c) 圧密終了時刻 ( $T_0=\infty$ ) における相互作用

これらの場合についても容易に解析式を誘導することができるが, 紙面の都合上ここでは省略する。

4. 数値計算結果および考察

前章において, 覆工と圧密を受ける弾性土の相互作用について境界面での変位や応力のフーリエ係数式がラプラス変換の形で導出された。したがって, ラプラス逆変換を実行する必要があるが, ここでは数値逆変換を行って得られた結果を示し, 考察を行う。

なお, 前章において, 覆工の厳密解の理論式を示したが, それらはすべて平面応力状態としたものであり, したがって, 本論文での平面ひずみ状態の場合には, それらの式中のヤング係数およびポアソン比を次のように置き換えて計算を行う必要がある。

$$E_i \rightarrow E_i^* = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}, \quad \nu_i \rightarrow \nu_i^* = \frac{\nu_i}{1-\nu_i}$$

(1) 媒介変数の変動による影響

この節で考慮する媒介変数は以下の3通りである。

- ①  $d/a$ : 境界面の半径に対する覆工厚の比
- ②  $E_i^*/G_s$ : 弾性土のせん断弾性係数に対する覆工の弾性定数の比
- ③ 境界面条件: [I] Perfectly Rough Interface (完全結合境界)

[II] Perfectly Smooth Interface (完全すべり境界)

弾性土のポアソン比  $\nu_s$  に関しては, Carter らのシェル理論の結果との比較ならびに解析を容易にするために  $\nu_s=0$  とし, また覆工のポアソン比に関しては, 解析を行うにあたって,  $\nu_i=0.20$  として数値計算を行った。なお, 時間的依存の無次元尺度となる  $T_0$  は式 (11) で定義したものをを用いた。

実際問題で考える場合には, 式 (11) 中の  $C, a$  は既知の定数として与えられるので, 任意の時間  $t$  に対する時間係数  $T_0=Ct/a^2$  は自動的に定められることになる。

a) 覆工厚比 ( $d/a$ ) の効果

表-1に Case 1 ( $n=0$ ) の場合の  $d/a$  に対する覆工の諸係数の値を示した。これは,  $E_i^*/G_s=100$  とおいた

表-1  $d/a$  に対する覆工の半径方向の変位係数および応力係数 (Case 1)

d/a	$2G_s U_i / \sigma_m a$		$P_i / \sigma_m a$	
	シェル理論	厳密理論	シェル理論	厳密理論
0.00	-1.000	-1.000	-0.000	-0.000
0.01	-0.667	-0.665	-0.333	-0.335
0.02	-0.500	-0.496	-0.500	-0.504
0.03	-0.400	-0.395	-0.600	-0.605
0.04	-0.333	-0.327	-0.667	-0.673
0.05	-0.286	-0.278	-0.714	-0.722
0.06	-0.250	-0.242	-0.750	-0.758
0.07	-0.222	-0.213	-0.778	-0.787
0.08	-0.200	-0.191	-0.800	-0.809
0.09	-0.182	-0.172	-0.818	-0.828
0.10	-0.167	-0.156	-0.833	-0.844
0.11	-0.154	-0.143	-0.846	-0.857
0.12	-0.143	-0.132	-0.857	-0.868
0.13	-0.133	-0.122	-0.867	-0.878
0.14	-0.125	-0.114	-0.875	-0.886
0.15	-0.118	-0.106	-0.882	-0.894
0.16	-0.111	-0.100	-0.889	-0.900
0.17	-0.105	-0.094	-0.895	-0.906
0.18	-0.100	-0.089	-0.900	-0.911
0.19	-0.095	-0.084	-0.905	-0.916
0.20	-0.091	-0.079	-0.909	-0.921

$E_i^*/G_s=100.0, \nu_s=0.0, \nu_i=0.20$

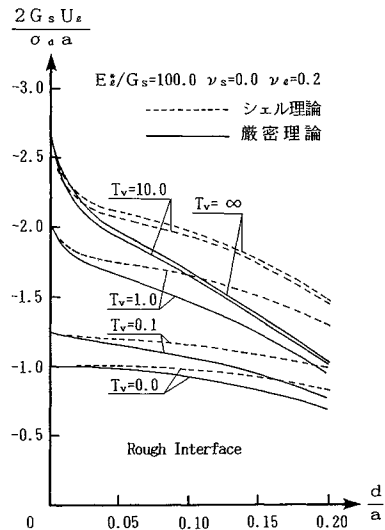


図-3 覆工の半径方向変位係数 (Case 2)

数値計算結果である。この場合, 覆工の円周方向変位係数およびせん断応力係数は恒等的に零である。半径方向変位係数については  $d/a$  が増加するにつれて絶対値は減少している。シェル理論を適用した場合の値と厳密理論を適用した場合の値とは前者の方が幾分, 絶対値は大きく,  $d/a=0.20$  では厳密理論に対して約 15% の差が生じている。しかし, 変位係数自体が小さい値をとるため, この差はあまり考慮する必要はない。半径方向応力係数については,  $d/a$  の増加とともに絶対値は増加している。シェル理論と厳密理論との差は最大でも 1.5% 以上には達しない程度である。なお, Case 1 の解は当然のことながら, 時間に依存せず覆工の挙動は時間的に変化はない。

次に, Case 2 ( $n=2$ ) の場合について, 同じく  $E_i^*/G_s=100$  として数値計算を行った。図-3に Rough In-

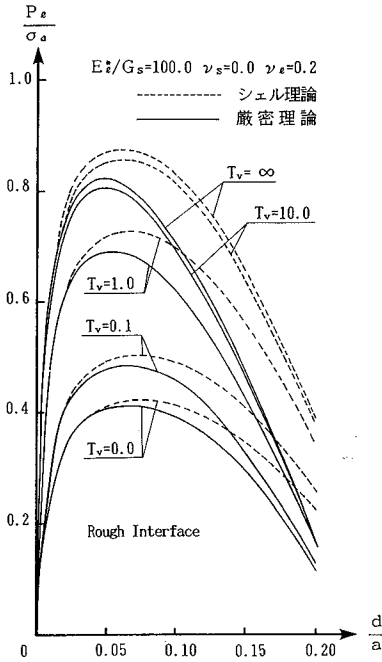


図-4 覆工の半径方向応力係数 (Case 2)

terface の場合の変位係数の変動結果が示されている。この図より、時間が経過するにつれて変位が大きくなり、また  $d/a$  の増加とともに絶対値が減少している。さらに顕著な現象として、時間の経過とともに  $d/a$  の変化による影響が大きくなっている。たとえば、半径方向変位係数をみると、 $T_v = \infty$  では、 $d/a$  の 0.20 の増加によって絶対値がおよそ 1.80 減少しているのに対し、 $T_v = 0$  ではわずか 0.25 減少しているだけである。シェル理論を適用した場合と厳密理論を適用した場合の差異は、どの時間においても前者の方が変位係数の絶対値は大きくなっている。 $d/a$  の増加、すなわち覆工厚の増加とともに両理論間の差異は大きくなる傾向が認められる。また、同じ覆工厚をとってみても、時間の経過とともに同様の傾向が認められる。具体的には  $d/a = 0.20$  のところでは、両理論値の差は  $T_v = \infty$  で 0.439、 $T_v = 0$  で 0.143 である。なお、これと同様の傾向は Smooth Interface の場合にも認められる。図-4 に Rough Interface の場合の応力係数の変動を示したが、この図より、 $d/a$  が 0.05~0.10 の間で極値をとっていることが観察できる。このことは、覆工厚の有効性について判断をする 1 つの目安であり、すなわち  $d/a$  が 0.10 以上では応力に対して有効性が相対的に小さくなっていくことがわかる。次に、シェル理論を適用した場合と厳密理論を適用した場合との差異は、変位係数の場合と同様なことがいえるが、ここに示さなかった、せん断応力係数に

表-2  $E_t^*/G_s$  に対する覆工の半径方向の変位係数および応力係数 (Case 1)

$E_t^*/G_s$	$2G_s U_r / \sigma_a a$		$P_r / \sigma_a$	
	シェル理論	厳密理論	シェル理論	厳密理論
0	-1.000	-1.000	0.000	0.000
1	-0.952	-0.949	-0.048	-0.051
10	-0.667	-0.650	-0.333	-0.350
$10^2$	-0.167	-0.156	-0.833	-0.844
$10^3$	-0.020	-0.018	-0.980	-0.982
$10^4$	-0.002	-0.002	-0.998	-0.998
$10^5$	0.000	0.000	-1.000	-1.000
$\infty$	0.000	0.000	-1.000	-1.000

$d/a=0.1, \nu_s=0.0, \nu_e=0.20$

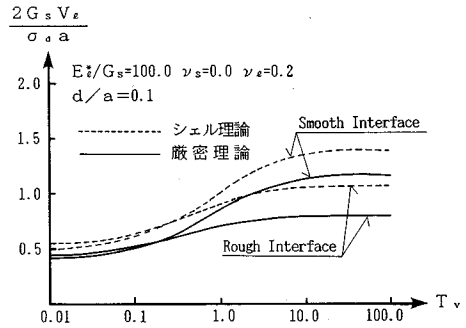


図-5 覆工の円周方向変位係数 (Case 2)

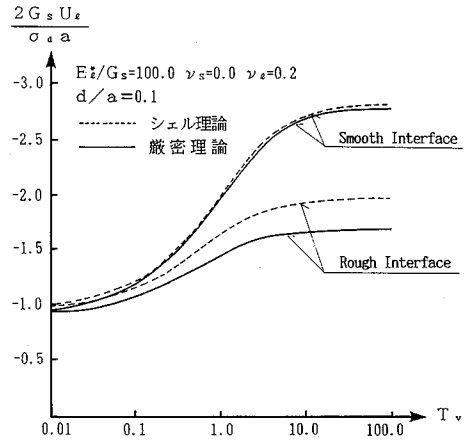


図-6 覆工の半径方向変位係数 (Case 2)

ついては、やや異なった傾向がみられる。すなわち、せん断応力係数では同じ覆工厚をとった場合、両理論の差は時間の経過とともに減少する。これはほかの係数の場合と逆の傾向であり、さらに厳密理論値の方がシェル理論値よりも大きくなっているのも逆の傾向である。この指摘は Smooth Interface の場合にも認められている。

b) 弾性定数比 ( $E_t^*/G_s$ ) の効果

表-2 に Case 1 ( $n=0$ ) での Rough Interface の場合の  $E_t^*/G_s$  に対する覆工の諸係数値を示した。これは  $d/a=0.1$  とおいた結果であり、媒介変数  $E_t^*/G_s$  の値が 0 (すなわち剛性なしの素掘り、または完全に剛な地

盤)から $\infty$  (すなわち、完全に剛な覆工、または剛性なしの地盤)までの範囲にわたって解析を行った。この表をみると  $E^*/G_s$  の増加 (すなわち、覆工の剛性の相対的增加) につれて変位は減少していることがわかる。また時間に対する依存の影響は、 $E^*/G_s$  の増加とともに小さくなっている。シェル理論と厳密理論との差異は  $E^*/G_s=10^2\sim 10^3$  付近で最も大きくなることが推測される。

c) 境界条件の変化の効果

図—5, 6 に境界面を Perfectly Rough Interface と Perfectly Smooth Interface に仮定した場合の両条件の変位係数の図を示した。これらは  $E^*/G_s=100$ ,  $d/a=0.10$  とおいた結果のものである。図—5 で明らかなように、半径方向変位は Smooth の方がどの時間経過に対しても大きくなっており時間的変化率も大きい。円周方向については、この傾向にあるとは必ずしもいえず、圧密初期  $T_v=0\sim 0.1$  の範囲では Rough の方が大きくなっていることが注目される。

具体的な現実的問題として考えると、Rough の場合も Smooth の場合も、 $T_v=10$  ぐらいで圧密が落ち着くことから、実用上で  $C=1.0\times 10^{-3}$  (cm<sup>2</sup>/s),  $a=5$  (m),  $d=50$  (cm) とした場合、覆工設置後約 80 (年) で挙動が落ち着くことになる。また圧密による挙動変化が著しいのは、 $T_v=0.1\sim 10$  の間であることから、同じ今の例でいうと、覆工設置後 288 (日) 以降に主要な挙動を示すといえよう。

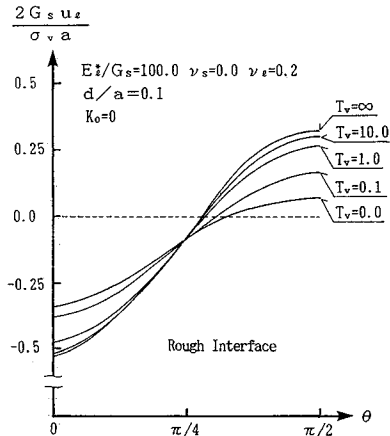
(2) 解の合成 (Case 1 と Case 2 の重ね合わせ)

これまでの節では、問題の処理を 2 つの成分に分けて取り扱ってきた。しかし、最終的に必要とされるのは、この 2 つの成分を合成解として組み合わせたものである。このことを実際問題として議論し原位置 (初期) 応力状態の影響を説明するために、これまでと同様に  $E^*/G_s=100$ ,  $\gamma_s=0$ ,  $\gamma_r=0.20$  とし、原位置 (初期) 応力の大きさの比が異なる 3 種のを考える。その値として、土圧係数  $K_0$  の選択によって、①  $K_0=0$ , ②  $K_0=0.5$ , ③  $K_0=2.0$  を設定し、正規圧密粘土から過圧密粘土までの範囲にわたったものを設定した。これらの 3 種類の原位置 (初期) 応力状態を表—3 に示した。なお、2 つの成分の合成は単に線形的にそれぞれの結果の和として与えられることになる。

それぞれの例に対して、Case 1 と Case 2 の解の合成結果が表—4, 5 に示されている。これらの表においては、Rough Interface および Smooth Interface の場合の実際の変位  $u_r$ ,  $v_r$  および応力  $p_r$ ,  $q_r$  の  $\theta$  に対する変化を求めたものを示した。 $\theta=0^\circ$  および  $\theta=\pi$  は、それぞれトンネルの底部および頂部に対応するが、結果として、変位についてはトンネル上のどの位置でもシェル理論を適

表—3 3種の例に対する初期応力の値

Quantity	Example		
	①	②	③
$K_0=\sigma_H/\sigma_v$	0.0	0.5	2.0
$N=\sigma_H/\sigma_v$	0.5	0.75	1.5
$\sigma_m/\sigma_v$	0.75	0.875	1.25
$\sigma_a/\sigma_v$	0.2	0.125	-0.25
$p_0/\sigma_v$	0.5	0.5	0.5



図—7 覆工の半径方向変位 (厳密解)

用した場合の値の方が、厳密理論を適用した値よりも大きく、逆に応力については厳密理論を適用した値の方が大きくなっている。この結果はたとえば、 $K_0=0.5$  で  $T_v=\infty$  の場合の例を挙げると、応力の差は最大でも 5 % 弱であるのに対して変位の差は 30 % を越える部分がある。また両理論の差は時間の経過とともに大きくなってゆき、Rough Interface および Smooth Interface の場合ともトンネル上のどの位置でも大きくなっている。

図—7 に Rough Interface の場合の弾性厳密理論を適用した場合の結果が図示されている。この図およびここには示されていない結果から全体として以下のように要約できる。

- (1)  $K_0=1$  の結果は静水圧状態であることから、時間およびトンネル上の  $\theta$  方向位置の両方に対し関係なく独立している。
- (2)  $K_0=0\sim 0.75$  ( $\sigma_H<\sigma_v$ ) の結果は、 $\theta=\pi/2$  を境にして  $K_0=2.0$  ( $\sigma_H>\sigma_v$ ) の結果の位相面に対して反対側に位相面をなす。
- (3) 初期において、最も大きい圧力状態である  $K_0=2.0$  の場合の極大値に変位および応力の最大値が一致する。
- (4) それぞれの  $\theta$  に対する値の変化は、正弦関数的であり、曲線の結節点は  $\theta=\pi/4, 3\pi/4$ , ある



表—4 代表的な時刻における覆工の諸量 (Perfectly Rough Interface の場合)

(a)  $T_v (=Ct/a^2)=0$  の場合

土 庄 係 数		① $K_0=0.0$			② $K_0=0.5$			③ $K_0=2.0$		
無次元量	区別 $\theta$	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
$2G_{stz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	-0.359	-0.125	0.119	-0.268	-0.146	-0.024	0.035	-0.209	-0.453
	厳密理論	-0.347	-0.117	0.113	-0.251	-0.137	-0.022	0.035	-0.195	-0.425
$2G_{svz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	0.000	0.134	0.000	0.000	0.067	0.000	0.000	-0.134	0.000
	厳密理論	0.000	0.111	0.000	0.000	0.055	0.000	0.000	-0.111	0.000
$p_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	-0.520	-0.625	-0.729	-0.677	-0.729	-0.781	-1.146	-1.041	-0.937
	厳密理論	-0.534	-0.633	-0.732	-0.689	-0.739	-0.788	-1.154	-1.055	-0.956
$q_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	0.000	0.227	0.000	0.000	0.113	0.000	0.000	-0.227	0.000
	厳密理論	0.000	0.258	0.000	0.000	0.129	0.000	0.000	-0.258	0.000

(b)  $T_v (=Ct/a^2)=1$  の場合

土 庄 係 数		① $K_0=0.0$			② $K_0=0.5$			③ $K_0=2.0$		
無次元量	区別 $\theta$	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
$2G_{stz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	-0.538	-0.125	0.287	-0.352	-0.146	-0.060	0.204	-0.209	-0.621
	厳密理論	-0.483	-0.117	0.248	-0.319	-0.137	-0.046	0.170	-0.195	-0.561
$2G_{svz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	0.000	0.226	0.000	0.000	0.113	0.000	0.000	-0.226	0.000
	厳密理論	0.000	0.176	0.000	0.000	0.088	0.000	0.000	-0.176	0.000
$p_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	-0.448	-0.625	-0.802	-0.641	-0.729	-0.817	-1.218	-1.041	-0.864
	厳密理論	-0.467	-0.633	-0.791	-0.660	-0.739	-0.817	-1.212	-1.055	-0.897
$q_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	0.000	0.383	0.000	0.000	0.192	0.000	0.000	-0.383	0.000
	厳密理論	0.000	0.411	0.000	0.000	0.205	0.000	0.000	-0.411	0.000

(c)  $T_v (=Ct/a^2)=\infty$  の場合

土 庄 係 数		① $K_0=0.0$			② $K_0=0.5$			③ $K_0=2.0$		
無次元量	区別 $\theta$	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
$2G_{stz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	-0.617	-0.125	0.366	-0.392	-0.146	-0.100	0.283	-0.209	-0.700
	厳密理論	-0.538	-0.117	0.304	-0.347	-0.137	-0.074	0.226	-0.195	-0.616
$2G_{svz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	0.000	0.269	0.000	0.000	0.135	0.000	0.000	-0.269	0.000
	厳密理論	0.000	0.203	0.000	0.000	0.101	0.000	0.000	-0.203	0.000
$p_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	-0.414	-0.625	-0.835	-0.624	-0.729	-0.834	-1.252	-1.041	-0.831
	厳密理論	-0.452	-0.633	-0.814	-0.648	-0.739	-0.829	-1.236	-1.055	-0.873
$q_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	0.000	0.457	0.000	0.000	0.228	0.000	0.000	-0.457	0.000
	厳密理論	0.000	0.473	0.000	0.000	0.237	0.000	0.000	-0.473	0.000

$d/a=0.1, E_t/G_s=100.0, \nu_s=0.0, \nu_e=0.20$

いは  $\theta=0, \pi/2$  に対応する。

### 5. 結 言

本論文において、圧密を受ける多孔質飽和弾性土と円形覆工の相互作用問題の解析を行った。覆工上の載荷はトンネル内部および覆工と飽和弾性土との接触部における要素の移動によるものであり、覆工の挙動はこの飽和弾性土の圧密によって時間に依存して変化することになる。本論文の目的は覆工の時間的挙動を解析的に求めることであり、その近似的取り扱い手法として最近提案されている Carter らのシェル理論による解<sup>1),2)</sup>とここで提案した弾性厳密理論による解の比較検討を試みたものである。解析に際して覆工と多孔質飽和弾性土の接触面での境界条件として2種のを考え、さらに3つの媒介変数を選定して定量的な考察を行った。それらの結果から結論として以下のことが明らかになった。

(1) 変位については、シェル理論を適用した場合の方が大きく、逆に応力については弾性厳密理論

表—5 代表的な時刻における覆工の諸量 (Perfectly Smooth Interface の場合)

(a)  $T_v (=Ct/a^2)=0$  の場合

土 庄 係 数		① $K_0=0.0$			② $K_0=0.5$			③ $K_0=2.0$		
無次元量	区別 $\theta$	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
$2G_{stz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	-0.369	-0.125	0.119	-0.268	-0.146	-0.024	0.035	-0.209	-0.453
	厳密理論	-0.360	-0.117	0.126	-0.258	-0.137	-0.015	0.048	-0.195	-0.438
$2G_{svz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	0.000	0.122	0.000	0.000	0.061	0.000	0.000	-0.122	0.000
	厳密理論	0.000	0.102	0.000	0.000	0.051	0.000	0.000	-0.102	0.000
$p_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	-0.634	-0.625	-0.616	-0.734	-0.729	-0.724	-1.032	-1.041	-1.051
	厳密理論	-0.644	-0.633	-0.623	-0.744	-0.739	-0.733	-1.045	-1.055	-1.066
$q_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	厳密理論	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

(b)  $T_v (=Ct/a^2)=1$  の場合

土 庄 係 数		① $K_0=0.0$			② $K_0=0.5$			③ $K_0=2.0$		
無次元量	区別 $\theta$	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
$2G_{stz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	-0.631	-0.125	0.381	-0.399	-0.146	0.107	0.297	-0.209	-0.715
	厳密理論	-0.620	-0.117	0.386	-0.388	-0.137	0.115	0.308	-0.195	-0.698
$2G_{svz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	0.000	0.254	0.000	0.000	0.127	0.000	0.000	-0.256	0.000
	厳密理論	0.000	0.212	0.000	0.000	0.106	0.000	0.000	-0.212	0.000
$p_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	-0.644	-0.625	-0.606	-0.738	-0.729	-0.719	-1.022	-1.041	-1.060
	厳密理論	-0.655	-0.633	-0.611	-0.749	-0.738	-0.728	-1.033	-1.055	-1.077
$q_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	厳密理論	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

(c)  $T_v (=Ct/a^2)=\infty$  の場合

土 庄 係 数		① $K_0=0.0$			② $K_0=0.5$			③ $K_0=2.0$		
無次元量	区別 $\theta$	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
$2G_{stz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	-0.831	-0.125	0.581	-0.499	-0.146	0.207	0.497	-0.209	-0.915
	厳密理論	-0.816	-0.117	0.582	-0.486	-0.137	0.213	0.504	-0.195	-0.894
$2G_{svz}$ $\sigma_{\nu d}$	シェル理論	0.000	0.354	0.000	0.000	0.177	0.000	0.000	-0.354	0.000
	厳密理論	0.000	0.295	0.000	0.000	0.147	0.000	0.000	-0.295	0.000
$p_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	-0.651	-0.625	-0.598	-0.742	-0.729	-0.716	-1.015	-1.041	-1.068
	厳密理論	-0.663	-0.633	-0.603	-0.754	-0.739	-0.723	-1.025	-1.055	-1.085
$q_e$ $\sigma_{\nu}$	シェル理論	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	厳密理論	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

$d/a=0.1, E_t/G_s=100.0, \nu_s=0.0, \nu_e=0.20$

を適用した場合の方が大きい。一般に、変位に対する差の方が応力に対する差よりも大きく、したがって変位についてのシェル理論を適用した場合の解の有効性がより劣ったものとなる。

(2) 両理論の差はすべての変位および応力に対して時間とともに増加してゆく。

(3) 変位は、覆工厚とトンネル半径の比  $d/a$  の値の増加とともに減少する。ここで用いた数値の範囲では、応力は  $d/a=0.05\sim 0.10$  で極値を示し、この範囲で覆工の応力分担が最も大きい。

(4)  $d/a$  の増加とともに、シェル理論による解と弾性厳密理論による解との差は増加してゆく。この差は、 $r=a$  (外周面) と  $r=a-d$  (内周面) での断面力が等しいとするシェル理論の仮定より生ずるものである。

(5) ここで用いた数値の範囲では、圧密に対する覆工の挙動変化は、 $T_v=Ct/a^2=0.1\sim 10$  の間で最も著しく、 $T_v=10$  あたりで落ち着く。

付 録 A

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\beta K'_n(\alpha)}{\beta^2 K_n(\beta)} \frac{1}{4} \left[ \frac{n}{n-1} \right] \left[ \frac{a}{r} \right]^{n-1} & \left[ \frac{a}{r} \right]^{n+1} \\ -n \left[ \frac{a}{r} \right] \left\{ \frac{K_n(\alpha)}{\beta^2 K_n(\beta)} \right\} \frac{1}{4} \left[ \frac{n-2}{n-1} \right] \left[ \frac{a}{r} \right]^{n-1} & \left[ \frac{a}{r} \right]^{n+1} \\ \left[ \frac{\lambda+2G_s}{2G_s} \right] \left[ \frac{a}{r} \right] \left\{ \frac{K_n(\alpha)}{K_n(\beta)} \right\} & \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{r} \right]^{n-1} & 0 \\ -\frac{\{n^2(a/r)K_n(\alpha) - \beta K'_n(\alpha)\}}{\beta^2 K_n(\beta)} & \left[ \frac{n+2}{4} \right] \left[ \frac{a}{r} \right]^{n-1} & (n+1) \left[ \frac{a}{r} \right]^{n+1} \\ \frac{\{(a/r)\beta^2 + (a/r)n^2\} K_n(\alpha) - \beta K'_n(\alpha)}{\beta^2 K_n(\beta)} & -\left[ \frac{n-2}{4} \right] \left[ \frac{a}{r} \right]^{n-1} & -(n+1) \left[ \frac{a}{r} \right]^{n+1} \\ -\frac{n\{(a/r)K_n(\alpha) - \beta K'_n(\alpha)\}}{\beta^2 K_n(\beta)} & \left[ \frac{n}{4} \right] \left[ \frac{a}{r} \right]^{n-1} & (n+1) \left[ \frac{a}{r} \right]^{n+1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.1)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \beta r / \alpha, \\ \beta &= \sqrt{(s/C)} \cdot a. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.2)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{B_2 C_1 - B_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \\ a_{12} &= \frac{B_2 D_1 - B_1 D_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \\ a_{21} &= \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_2 B_1 - A_1 B_2}, \\ a_{22} &= \frac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{A_2 B_1 - A_1 B_2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.3)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \left\{ \frac{(3-\nu_l)}{4} \xi'_{n-2} + \frac{(1+\nu_l)}{4} \eta_n \right\}, \\ B_1 &= \left\{ \frac{(1+\nu_l)(n-1)}{4} \xi'_{n-2} - \frac{(1+\nu_l)(n-1)}{4} \eta_n \right\}, \\ C_1 &= \left\{ -\frac{(n-1)E_l}{4a} \xi'_{n-2} + \frac{(n-1)E_l}{4a} \eta_n \right\}, \\ D_1 &= \left\{ -\frac{(n^2-1)E_l}{4a} \xi'_{n-2} + \frac{(n^2-1)E_l}{4a} \eta_n \right\}, \\ A_2 &= \left\{ -\frac{(1-\nu_l)(n+1)}{4} \eta_{m+2} + \frac{(1+\nu_l)(n+1)}{4} \eta_n \right\}, \\ B_2 &= \left\{ \frac{(3-\nu_l)}{4} \eta_{m+2} + \frac{(1+\nu_l)}{4} \xi_n \right\}, \\ C_2 &= \left\{ -\frac{(n^2-1)E_l}{4a} \eta_{m+2} + \frac{(n^2+1)E_l}{4a} \eta_n \right\}, \\ D_2 &= \left\{ -\frac{(n-1)E_l}{4a} \eta_{m+2} + \frac{(n+1)E_l}{4a} \xi_n \right\}, \\ \xi_n &= \left[ \frac{b}{a} \right]^n, \quad \eta_n = \left[ \frac{a}{b} \right]^n = \frac{1}{\xi_n}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.4)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \Phi_{11} \left[ \frac{2G_s}{a} \right] + \frac{B_2 C_1 - B_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad S_{12} = \frac{B_2 D_1 - B_1 D_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \\ S_{21} &= \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_2 B_1 - A_1 B_2}, \quad S_{22} = \Phi_{33} \left[ \frac{2G_s}{a} \right] + \frac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{A_2 B_1 - A_1 B_2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} = \bar{U}_i &= \frac{-\sigma_a \Phi_{33}}{S(\Phi_{11} + \Phi_{33})}, \\ \bar{Y} &= \left[ \frac{\Phi_{11} - \Phi_{33}}{\Phi_{11} + \Phi_{33}} \right] \bar{X} + \frac{\sigma_a a}{S G_s (\Phi_{11} + \Phi_{33})}, \\ \bar{V}_i &= \left[ \frac{M_1 - M_2}{M_3 + M_4} \right] \bar{U}_i, \\ \bar{Z} &= \frac{Z_0}{S} + \left[ \frac{2G_s}{a} \right] \Phi_{21} (\bar{X} - \bar{Y}). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.6)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{A_2(C_1 + D_1) - A_1(C_2 + D_2)}{A_2 B_1 - A_1 B_2}, \\ M_2 &= \frac{B_2(C_1 + D_1) - B_1(C_2 + D_2)}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \\ M_3 &= \frac{A_2(C_1 - D_1) - A_1(C_2 - D_2)}{A_2 B_1 - A_1 B_2}, \\ M_4 &= \frac{B_2(C_1 - D_1) - B_1(C_2 - D_2)}{A_1 B_2 - A_2 B_1}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.7)$$

参 考 文 献

- 1) Carter, J.P. and Booker, J.R. : Elastic consolidation around a deep circular tunnel, Int. J. Solids Structures, Vol. 18, No. 12, pp. 1059~1074, 1982.
- 2) Carter, J.P. and Booker, J.R. : Elastic consolidation around a lined circular tunnel, Int. J. Solids Structures, Vol. 20, No. 6, pp. 589~608, 1984.
- 3) 丹羽義次・小林昭一・平島健一：埋設型光弾性ゲージによる応力測定法に関する二三の考察，発電水力，No. 96, pp. 5~13, 1968.
- 4) 細野敏夫：BASICによる高速ラプラス逆変換，共立出版。

(1988. 8. 15・受付)