

## 一様湾曲流路の流れの三次元解析

## THEORETICAL STUDY ON FLOWS IN UNIFORMLY-CURVED BENDS

山坂昌成\*・池田駿介\*\*・酒寄建之\*\*\*

By Masashige YAMASAKA, Syunsuke IKEDA and Kenji SAKAYORI

A mathematical model which describes three-dimensional fully-developed flow in mildly curved channel is presented. The side boundary layer is included in the analysis, and the secondary flow is treated to be impervious at the side walls. It is found that the advective transport of fluid momentum due to secondary flow induces accumulation of longitudinal fluid velocity near the outer bank. The analysis makes it possible to treat the excess of shear stress at the outer bank due to curvature. The model is supported by available laboratory data.

Keywords: curved channel, secondary flow, lateral momentum transport, redistribution of main flow

## 1. 序 論

発達した河道湾曲部では外岸が浸食され、内岸側で堆積が発生することが知られている。このような側岸浸食を定量化するには側岸近傍の流れの流速分布などの構造を知る必要があるが、従来の研究のほとんどはその対象が流路中央部に限られており流路中央部の解を側岸にまで外挿することによって、湾曲に起因する偏倚流速を求め、この偏倚流速と側岸浸食速度を関係づけ、河道蛇行の発達を論じていた<sup>1)~3)</sup>。一方、平坦固定床の上の流れについては、Smith・McLean<sup>4)</sup>、池内・玉井<sup>5)</sup>が平面二次元流れについて詳細な理論を展開し、蛇行水路においては、主流速の最大値はメトリック効果により内岸側で発生し、外岸側へは移らないことを結論づけている。ところが、平坦固定床をもつ一様湾曲水路の実験(吉川・池田・北川<sup>6)</sup>)では、メトリック効果が大きいにもかかわらず、最大主流速はしだいに外岸側へ移行していき、主流速は外岸近傍で急激に大きくなるのが観測されている。この原因は平面二次元流の解析において、2次流に

よる横断方向への運動量の移流輸送を無視したことによると考えられる。2次流による横断方向への運動量輸送量  $M$  は、

$$M = \int_0^{\pi} \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} d\bar{z}$$

で表わされるが、一般に  $\bar{u}$  は鉛直方向に一様ではないので、正の外岸向きの運動量輸送が発生する。ここに  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  は後出するように、それぞれ主流、二次流の流速である。この運動量輸送によって主流速の横断分布が影響を受けることを、放物線形断面の湾曲流れを例に挙げ、最初に説明したのは Rozovskii<sup>7)</sup> である。このような断面形においては、断面境界を便宜的にすべて底面であるとみなした扱いが可能であるが、側壁面と底面との分離が必要な矩形断面水路について、横断方向への正味の運動量輸送に及ぼす側壁の影響を強調したのは、Kalkwijk and De Vriend<sup>8)</sup>、De Vriend<sup>9)</sup> である。彼らの理論では、煩雑な流れの三次元数値解析を必要とした。わが国では石川・金<sup>10)</sup> がこれらの研究とは独立に、湾曲部へ流入し、流速分布が変形していく過程を矩形断面水路の層流の場合について近似解を求めている。しかし、横断方向への運動量輸送を考慮したこれらの解も、数値解では曲率や川幅/水深比に対し側岸近傍(特に外岸近傍)の流速分布やせん断力がどのように変化するかについて関数関係

\* 正会員 工博 金沢工業大学助教授 工学部土木工学科  
(〒921 金沢南局区内野々市町扇が丘7-1)

\*\* 正会員 工博 埼玉大学教授 工学部建設基礎工学科  
(〒338 浦和市下大久保255)

\*\*\* 正会員 工修 大成建設

が明らかではなく、また、石川・金の解は横断方向には線形速度分布を仮定しており、側壁による効果の詳細は不明である。

以上のように、湾曲部の水理については主流の横断方向分布およびそれに伴う側壁の効果が不明のままに残されており、本研究では、今後側岸浸食現象を明らかにするために、2次流による運動量輸送および側壁の効果を考慮して主流の横断方向速度分布を求め、同時にこのとき2次流も側壁で0となるよう理論解を求める。このように解析がやや複雑であるために本研究では平坦床を有する長方形断面一様湾曲流路において流下方向に十分に発達した領域についての解を求める。

2. 流れの基礎方程式

流下方向に変化のない一様湾曲流路の流れを支配する運動量方程式、連続式は図-1に示す座標系および記号の定義を用いると（ $z$ は流路中心で底面に接する平面から垂直上向きにとられた座標）、それぞれ無次元化された次式によって表わされる。

$$v \frac{\partial u}{\partial n} + \nu(1-\nu n)uv + \beta w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\beta}{Fr^2}(1-\nu n)i_0 + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu(1-\nu n) \frac{\partial u}{\partial n} - \nu^2 u(1-2\nu n) \right\} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \dots (1)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial n} - \nu u^2(1-\nu n) + \beta w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \nu(1-\nu n) \frac{\partial v}{\partial n} - \nu^2 v(1-2\nu n) \right\} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \dots (2)$$

$$v \frac{\partial w}{\partial n} + \beta w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\beta}{Fr^2} - \beta \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu(1-\nu n) \frac{\partial w}{\partial n} \right\} + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \dots (3)$$

$$\nu v(1-\nu n) + \frac{\partial v}{\partial n} + \beta \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots (4)$$

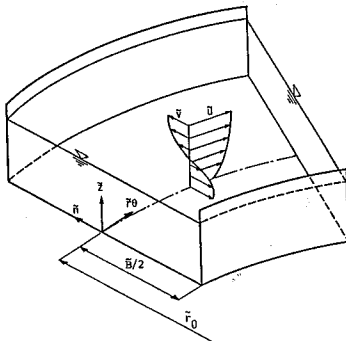


図-1 座標系および記号の定義

ここに、 $u = \tilde{u}/\tilde{U}_0$ ,  $v = \tilde{v}/\tilde{U}_0$ ,  $w = \tilde{w}/\tilde{U}_0$ ,  $z = \tilde{z}/\tilde{h}_0$ ,  $n = \tilde{n}/(\tilde{B}/2)$ ,  $r_0 = \tilde{r}_0/(\tilde{B}/2)$ ,  $\beta = (\tilde{B}/2)/\tilde{h}_0$ ,  $Fr^2 = \tilde{U}_0^2/(\tilde{g}\tilde{h}_0)$ ,  $p = \tilde{p}/(\rho\tilde{U}_0^2)$ ,  $Re = \tilde{U}_0\tilde{h}_0/\tilde{\epsilon}$ であり、 $\tilde{U}_0$ は代表流速（ここでは流路中央の鉛直平均流速）、 $\tilde{h}_0$ は代表水深（ここでは平均水深）である。ここで $\sim$ は次元量であることを意味し、 $\tilde{g}$ ,  $\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{p}$ はそれぞれ、重力加速度、渦動粘性係数、流体の密度、圧力である。また、 $i_0$ は流路中心の縦断面水面勾配を表わす。後述するように、本研究では流路幅を $\tilde{B}$ 、流路の中心曲率半径を $\tilde{r}_0$ として $\nu \equiv \tilde{B}/(2\tilde{r}_0) \ll 1$ を仮定し、摂動法により $\nu$ の一次のオーダーまでの解を求めるので、式(1)~(4)においては、 $1/\tilde{r}$ ,  $1/\tilde{r}^2$ は $\tilde{n}/\tilde{r}_0$ の一次までの展開にとどめている。式(1)~(4)の境界条件は底面および側面の固定境界面においてslip velocityを許容すると以下ようになる。

$$\text{水面: } \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \dots (5.a, b)$$

$$w = \frac{v}{\beta} \frac{\partial \xi}{\partial n}, p = 0 \dots (5.c, d)$$

$$\text{底面: } u = \chi_b \frac{\partial u}{\partial z}, v = \chi_s \frac{\partial v}{\partial z} \dots (6.a, b)$$

$$w = 0 \dots (6.c)$$

$$\text{側壁: } u = \pm \chi_s \frac{\partial u}{\partial n}, v = 0 \dots (7.a, b)$$

ここに、 $\xi$ は無次元水位上昇量（ $\tilde{\xi}/\tilde{h}_0$ ）であり、 $\chi_b$ ,  $\chi_s$ は広幅水路における一定渦動粘性係数の仮定（たとえばEngelund<sup>11)</sup>）から得られる結果とのanalogyから、摩擦抵抗係数 $C_f$ と関連づけて、以下のように表現される（APPENDIX参照）。

$$\chi_b = \frac{1}{15\sqrt{C_f}} - \frac{1}{3} \dots (8.a)$$

$$\chi_s = \frac{\chi_b}{\beta} \dots (8.b)$$

ここに、添字 $b$ ,  $s$ はそれぞれ底面、側壁における値を表わす。また、式(7)の複号は $n$ に垂直な正の面（ここでは内岸）に対して+、負の面（ここでは外岸）に対して-を取ることを意味する。

3. 摂動法による解析

(1) 基礎方程式の摂動展開

曲率が比較的小さい一様湾曲流路の流れは、0次解を直線流路における解とする摂動展開の形で表現することが可能である。したがって、 $\nu = \tilde{B}/(2\tilde{r}_0) \ll 1$ を仮定すると、式(1)~(4)の $\nu$ に関係する項を展開したとき $\nu$ のべき数が整数となることから、各未知量は以下のように摂動展開できることが期待される。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \nu u_1 + \dots \\ v &= 0 + \nu v_1 + \dots \\ w &= 0 + \nu w_1 + \dots \\ \xi &= 0 + \nu \xi_1 + \dots \\ p &= p_0 + \nu p_1 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

式(9)を式(1)~(4)に代入し、 $\nu$ の各オーダーごとに整理すると、未知変数に関する以下の線形方程式群が得られる。ただし、 $u_1 \sim p_1$ は  $Re_c$ ,  $F_r$ ,  $\beta$  の関数となるので、上式が収束するためには、 $\nu \ll 1$  だけでなく、 $\nu u$ ,  $\nu v$ ,  $\nu w \ll u_0$  等の条件が必要である。式(9)の適用可能範囲の求め方については後述する。

$\nu$  の 0 次:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2} = -\frac{R_{ec}}{F_r^2} i_0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\frac{1}{F_r^2} \dots\dots\dots (12)$$

$\nu$  の 1 次:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2} &= R_{ec} \left( \frac{i_0}{F_r^2} n + w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta} v_1 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial u_0}{\partial n} \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial n^2} = -\frac{R_{ec}}{\beta} \left( u_0^2 - \frac{\partial p_1}{\partial n} \right) \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2} = R_{ec} \frac{\partial p_1}{\partial z} \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial n} + \beta \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

後述するように、さらに高次のオーダーまでの煩雑な解析を行っても、条件によっては摂動展開による解の収束性が悪く、精度が向上しない場合があるので、本研究では  $\nu$  の 1 次のオーダーまでの解析とする。

(2) 0 次 解

0 次解は、矩形断面をもつ直線流路における流れに対応する。水面 ( $z=1$ ) で圧力  $p_0$  がゼロの境界条件のもとに式(11), (12)を解くと圧力分布は

$$p_0 = \frac{1}{F_r^2} (1-z) \dots\dots\dots (17)$$

となる。

次に、式(10)の偏微分方程式を解いて流速分布  $u_0(n, z)$  を求める。式(10)は線形の偏微分方程式であるので、同次方程式

$$\frac{\partial^2 u_{00}}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial n^2} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

の解  $u_{00}$  と非同次方程式

$$\frac{\partial^2 u_{01}}{\partial z^2} = -\frac{R_{ec}}{F_r^2} i_0 \dots\dots\dots (19)$$

の解  $u_{01}$  の和

$$u_0 = u_{00} + u_{01} \dots\dots\dots (20)$$

が式(10)を満足することは明らかである。式(18), (19)を解き  $u_{00}$ ,  $u_{01}$  のそれぞれが、水面、底面における境界条件を満足する解を求めると、

$$u_{00} = \sum_j A_{wj} \cosh(\beta \delta_j n) \cos \delta_j (1-z) \dots\dots\dots (21)$$

$$\left( \text{ただし } \delta_j \tan \delta_j = \frac{1}{\chi_b} \right)$$

$$u_{01} = -\frac{R_{ec} i_0}{F_r^2} \left( \frac{z^2}{2} - z - \chi_b \right) \dots\dots\dots (22)$$

が得られる。式(21)中の級数の係数  $A_{wj}$  は  $u_0 (= u_{00} + u_{01})$  が側壁での境界条件(式(7-a))を任意の  $z$  において満足するように決定されるべきであるが、このためには項数を多くとらなければならない、煩雑であるうえに、 $u_0$  の関数形が複雑になると高次解 ( $u_1, v_1, w_1, \xi_1$ ) の解析が著しく困難となる。そこで、 $u_{00}$  の高次の変動モードは無視して、主要第1項のみを用いて以下のように近似する。

$$u_{00} = A_u \cosh(\beta \delta n) \cos \delta (1-z) \dots\dots\dots (23)$$

ただし、 $\delta$  は  $\delta \tan \delta = 1/\chi_b$  を満足するもののうち絶対値が最も小さい値とする。このような近似を行うと、式(23)の係数  $A_u$  をどのように選んでも、 $u_0$  はすべての  $z$  において同時に側壁における境界条件を満足することはできない。このため、側壁の境界条件を鉛直平均された流速に対して

$$\bar{u}_0 \Big|_{n=\mp 1} = \pm \chi_s \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial n} \Big|_{n=\mp 1} \dots\dots\dots (24)$$

によって近似する。ここに  $\bar{\quad}$  は鉛直平均を表わす。 $\chi_s = 0$  の場合、近似されていない境界条件のもとでは、側壁上のすべての点で  $u_0 = 0$  とならなければならないが、式(23), (24)の近似による影響について、側壁での厳密解が明白な  $\chi_s = 0$  の場合を例にとり以下に述べる。

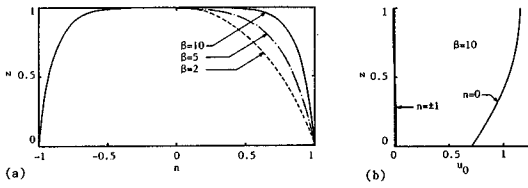
$u_0 = u_{00} + u_{01}$  (ここに  $u_{00}, u_{01}$  はそれぞれ式(23), (22)により与えられる) が式(24)の境界条件を満足するように  $A_u$  を決定し、 $\bar{u}_0|_{n=0} = 1$  を考慮すると、

$$\begin{aligned} u_0(n, z) &= d_1 \left\{ d_2 \left( \frac{z^2}{2} - z - \chi_b \right) \right. \\ &\quad \left. + d_3 \cosh(\beta \delta n) \cos \delta (1-z) \right\} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\frac{R_{ec}}{F_r^2} i_0 = -d_1 d_2 \dots\dots\dots (26)$$

が得られる。ここに、

$$d_1 = \frac{-1}{1 - \frac{1}{\cosh(\beta \delta) + \chi_s \beta \delta \sinh(\beta \delta)}} \dots\dots\dots (27 \cdot a)$$



図—2 平均主流速の横断分布 (a) と主流速の鉛直分布 (b) ( $\chi_b=0.8, \chi_s=0$ )

$$d_2 = \frac{1}{1/3 + \chi_b} \dots\dots\dots (27 \cdot b)$$

$$d_3 = \frac{\delta}{\sin \delta \cosh(\beta\delta) + \chi_s \beta \delta \sinh(\beta\delta)} \dots\dots\dots (27 \cdot c)$$

である。

図—2 は、 $\chi_s=0$  の場合の鉛直平均された流速の横断分布 (a) および、流路中央、側壁における流速の鉛直分布 (b) の一例を示す。同図 (a) より、 $\beta$  (半幅/水深比) が大きくなるほど流路中央部の流速が横断的に一様となり、側壁の影響が中央部まで及ばなくなることがわかる。同図 (b) は、式 (23), (24) の近似を導入した場合、側壁において境界条件をどの程度満足できるかを調べたものである。境界条件を厳密には満足できないが、側壁上の全域でほぼ  $u_0=0$  となっており、実用的には式 (23), (24) の近似が有効であると判断される。

(3) 1 次 解

a) 二次流速  $v_1$  および水位上昇量  $\xi$

$u_1$  を除いた 1 次解,  $v_1, w_1, p_1$  は原理的には式 (14) ~ (16) の連立偏微分方程式をそのまま解くことにより得られるが、解析解を求めることは不可能に近い。本解析では半幅/水深比  $\beta$  が比較的大きな流路を対象としており、これから、式 (15) において鉛直流速  $w_1$  は小さく、静水圧分布を近似的に仮定できる。すなわち、

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

となる。水面 (一次のオーダーでは  $z=1+\nu\xi_1$ ) における圧力の境界条件, 式 (5·d), を用いると、圧力  $p_1$  は、

$$p_1 = \frac{\xi_1}{F_r^2} \dots\dots\dots (29)$$

となる。式 (29) を式 (14) に代入すると、未知量  $v_1$  と  $\xi_1$  に関する以下の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial n^2} = -\frac{R_{ee}}{\beta} \left( u_0^2 - \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial n} \right) \dots\dots\dots (30)$$

この方程式は、 $u_0$  に関する方程式 (10) に似ているが右辺が  $n$  と  $z$  の関数となっているので、厳密解を求めることは容易ではない。本解析では  $\beta \gg 1$  を仮定しているので、非同次方程式の解  $v_{11}$  を求める際に式 (30) の左辺第 2 項を無視する。すなわち、

$$\frac{\partial^2 v_{11}}{\partial z^2} = -\frac{R_{ee}}{\beta} \left( u_0^2 - \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial n} \right) \dots\dots\dots (31)$$

となる。同次方程式の解  $v_{10}$  は、式 (18) と同様に

$$\frac{\partial^2 v_{10}}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v_{10}}{\partial n^2} = 0 \dots\dots\dots (32)$$

に支配される。式 (30) の解を近似的に

$$v_1 = v_{10} + v_{11} \dots\dots\dots (33)$$

とすると、このときの誤差は  $1/\beta^2$  のオーダーとなるので、式 (31)~(33) から求まる解を  $v_1$  の近似解とする。ただし、 $\nu$  の 2 次以上の解析を行う場合には、この誤差が 2 次解と同じ大きさをもつ可能性があるため、1 次解にこの近似法を採用することはできない。

水面、底面の境界条件を満足する式 (32) の解は、式 (21) と同様に無限級数和の形で与えられるが、 $u_{00}$  に対して行った近似と同様に、主要第 1 項のみをとり、

$$v_{10} = A_0 \cosh(\beta\delta n) \cos \delta(1-z) \dots\dots\dots (34)$$

によって近似する。式 (34) 中の  $v_{10}$  は、水面、底面の境界条件を満足しているため式 (33) 中の  $v_{11}$  も独立に水面、底面での境界条件を満足する必要がある。底面の境界条件を満足する式 (31) の解は、 $z$  に依存しない任意関数  $C_1(n)$  を含んで以下のように表わされる。

$$v_{11} = -\frac{R_{ee}}{\beta} \left\{ \int_0^z \int_0^z u_0^2 dz dz - \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial n} \frac{z^2}{2} + C_1(n)(z + \chi_b) \right\} \dots\dots\dots (35)$$

水面の境界条件 (5·b) を考慮すると、 $C_1(n)$  と  $\partial \xi_1 / \partial n$  の関係は

$$\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial n} = \int_0^1 u_0^2 dz + C_1(n) \dots\dots\dots (36)$$

となる。

以上の議論において、任意係数、任意関数はそれぞれ  $A_0$  と  $C_1(n)$  であるが、連続式および側壁の境界条件より、これらが決定され、 $v_1$  と  $\xi_1$  が求まることになる。 $w_1$  の水面、底面の境界条件 ( $\nu$  の 1 次オーダーでは  $w_1=0$ ) のもとに連続式 (16) を底面から水面まで鉛直積分し、 $v_1$  の側壁における境界条件 ( $v_1=0$ ) を考慮すると

$$\int_0^1 v_1 dz = 0 \dots\dots\dots (37)$$

が得られる。 $u_{00}$  を求めた場合と同様に、 $v_{10}$  を主要第 1 項のみで与えているので、 $v_1$  の側壁の境界条件を任意の  $z$  で厳密に満足することはできないが、これを側壁底部 ( $n=\pm 1, z=0$ ) における条件で代表させ、 $v_1(\pm 1, 0)=0$  とする (後に示す計算条件において、実用上十分な精度で  $v_1(\pm 1, z)=0$  を満足することが確認されている)。すなわち、

$$A_0 \cosh(\beta\delta) \cos \delta - \frac{R_{ee}}{\beta} \chi_b C_1(1) = 0 \dots\dots\dots (38)$$

となる。\$C\_1(n)\$ は \$n\$ に関する偶関数となるので、ここでは \$C\_1(1)\$ を用いた。式 (33)~(35) を用いて、式 (37)、(38) を満足するように \$A\_0\$、\$C\_1(n)\$ を決定すると、

$$A_0 = \frac{R_{ec}}{\beta} \frac{\chi_0 C_1(1)}{\cosh(\beta\delta) \cos \delta} \dots\dots\dots (39)$$

$$C_1(n) = \frac{1}{1/3 + \chi_0} \left\{ \frac{f_2(1) - f_1(1)/6}{1 - \delta^2(1/3 + \chi_0)} \frac{\cosh(\beta\delta n)}{\cosh(\beta\delta)} - f_2(n) + \frac{1}{6} f_1(n) \right\} \dots\dots\dots (40)$$

となる。ここに、

$$f_1(n) = \int_0^1 u_0^2 dz = K_1 + K_2 \cosh(\beta\delta n) + K_3 \cosh^2(\beta\delta n) \dots\dots (41)$$

$$f_2(n) = \int_0^1 \int_0^z \int_0^z u_0^2 dz dz dz = M_1 + M_2 \cosh(\beta\delta n) + M_3 \cosh^2(\beta\delta n) \dots\dots (42)$$

である。ここで簡単のために、\$C\_1(n)\$ も式 (41)、(42) と同様の形で、

$$C_1(n) = L_1 + L_2 \cosh(\beta\delta n) + L_3 \cosh^2(\beta\delta n) \dots\dots (43)$$

と表わす。係数 \$K\_1 \sim K\_3\$、\$M\_1 \sim M\_3\$、\$L\_1 \sim L\_3\$ は APPENDIX に示す。

式 (41)、(43) を式 (36) に代入し、\$\int\_{-1}^1 \xi\_1 dn = 0\$ を考慮して \$\xi\_1\$ を求めると、

$$\xi_1 = F_r^2 \left[ \left\{ K_1 + L_1 + \frac{1}{2} (K_3 + L_3) \right\} n + \frac{K_2 + L_2}{\beta\delta} \sinh(\beta\delta n) + \frac{K_3 + L_3}{2\beta\delta} \sinh(\beta\delta n) \cosh(\beta\delta n) \right] \dots\dots\dots (44)$$

が得られる。また \$v\_1\$ は式 (33)~(36) および式 (39)、(40) を用いて

$$v_1 = \frac{R_{ec}}{\beta} \{ v_0(z) + v_{co}(z) \cosh(\beta\delta n) + v_{cc}(z) \cosh^2(\beta\delta n) \} \dots\dots\dots (45)$$

となる。\$z\$ の関数 \$v\_0(z)\$、\$v\_{co}(z)\$、\$v\_{cc}(z)\$ は APPENDIX に示されている。式 (44)、(45) を式 (9) に代入すると

$$\xi = \frac{\tilde{\xi}}{h_0} = \xi_1 \frac{\tilde{B}/2}{\tilde{r}_0} \sim F_r^2 \frac{\tilde{B}/2}{\tilde{r}_0} \dots\dots\dots (46)$$

$$v = \frac{\tilde{v}}{U_0} = v_1 \frac{\tilde{B}/2}{\tilde{r}_0} \sim R_{ec} \frac{\tilde{h}_0}{\tilde{r}_0} \dots\dots\dots (47)$$

となり、無次元水位上昇量はほぼ \$F\_r^2 \frac{\tilde{B}/2}{\tilde{r}\_0}\$ に、無次元

2次流速はほぼ \$R\_{ec} \frac{\tilde{h}\_0}{\tilde{r}\_0}\$ に比例することがわかる。

b) 鉛直流速 \$w\_1\$ および主流速 \$u\_1\$

鉛直方向の運動方程式 (15) を解くにあたっては、\$w\_1\$ を無視したが、すでに \$v\_1\$ が決まっているので、連続

式 (16) を用いて \$w\_1\$ が求まる。底面の境界条件 (\$w\_1 = 0\$) を考慮して、式 (16) を鉛直方向に積分すると、

$$w_1 = -\frac{1}{\beta} \int_0^z \frac{\partial v_1}{\partial n} dz \dots\dots\dots (48)$$

となる。式 (48) に式 (45) を代入し、式 (A·19)、(A·20)、を考慮すると、

$$w_1 = \frac{R_{ec}}{\beta^2} \{ w_{s0}(z) \sinh(\beta\delta n) + w_{sc}(z) \sinh(\beta\delta n) \cosh(\beta\delta n) \} \dots\dots\dots (49)$$

が得られる。ここに、\$w\_{s0}(z)\$、\$w\_{sc}(z)\$ は \$z\$ の関数であり、その詳細は APPENDIX に示されている。

以上で式 (13) の右辺が既知となったので、\$u\_1\$ について式 (13) を与えられた境界条件のもとに解くことが原理的に可能であるが、\$n\$、\$z\$ に関する右辺の関数形が相当複雑であるので、\$u\_1(n, z)\$ の解析解を求めることはきわめて困難である。そこで、本研究では \$u\_1(n, z)\$ の鉛直分布については相似形を仮定し、運動方程式を鉛直平均することにより、\$u\_1\$ の横断分布を求めることとする。水面および底面の境界条件を満足する \$u\_1\$ の鉛直分布は式 (21) の右辺と同様の級数形で表わすことができるが、この級数中の主要第 1 項をとり、

$$u_1(n, z) = u_{1n}(n) \cos \delta(1-z) \dots\dots\dots (50)$$

により近似する。1 次のオーダーの縦断方向運動方程式 (13) を底面から水面まで鉛直積分すると、

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=1} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \int_0^1 u_1 dz = R_{ec} g(n) \dots\dots\dots (51)$$

となる。ここに、

$$g(n) = \int_0^1 \left( \frac{i_0}{F_r^2} n + w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{1}{\beta} v_1 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) dz - \frac{1}{R_{ec}\beta^2} \int_0^1 \frac{\partial u_0}{\partial n} dz \dots\dots\dots (52)$$

である。式 (50) を式 (51) に代入すると、\$u\_{1n}(n)\$ に関する以下の微分方程式が得られる。

$$-\delta^2 u_{1n}(n) + \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2}{dn^2} u_{1n}(n) = \frac{\delta}{\sin \delta} R_{ec} g(n) \dots\dots (53)$$

両側壁 (\$n = \pm 1\$) における \$u\_{1n}(n)\$ の境界条件は、式 (7·a) から

$$n = \pm 1 \quad \text{で} \quad u_{1n} = \mp \chi_s \frac{\partial u_{1n}}{\partial n} \dots\dots\dots (54)$$

となる。式 (53) の右辺の \$g(n)\$ を \$n\$ に関する各関数形ごとに分離して、

$$g(n) = g_1 n + g_2 \sinh(\beta\delta n) + g_3 \sinh(\beta\delta n) \cosh(\beta\delta n) + g_4 \sinh(\beta\delta n) \cosh^2(\beta\delta n) \dots\dots\dots (55)$$

のように表わすと (\$g\_1 \sim g\_4\$ の代数式は APPENDIX 参照)、常微分方程式 (53) の一般解 + 特解は

$$u_{1n} = \frac{\delta}{\sin \delta} R_{ee} \{ q_0 \sin(\beta \delta n) + q_1 n + (q_2 + q_{41}) n \cosh(\beta \delta n) + q_3 \sinh(\beta \delta n) \cosh(\beta \delta n) + q_{42} \sinh(3 \beta \delta n) \} \dots (56)$$

となる。ここに、係数  $q_1 \sim q_{42}$  は式 (55) の記号を用いて、

$$q_1 = -\frac{g_1}{\delta^2}, \quad q_2 = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\delta} g_2, \quad q_3 = \frac{1}{3} \frac{1}{\delta^2} g_3$$

$$q_{41} = \frac{\beta}{8 \delta} g_4, \quad q_{42} = \frac{1}{32 \delta^2} g_4 \dots (57)$$

と表わされる。また一般解の係数  $q_0$  は境界条件式 (54) より決定され、

$$q_0 = -\frac{1}{\sinh(\beta \delta) + \chi_s \beta \delta \cosh(\beta \delta)} \{ (\chi_s + 1) q_1 + (q_2 + q_{41})(\chi_s + 1) \cosh(\beta \delta) + \beta \delta \chi_s \sinh(\beta \delta) + q_3 [\sinh(\beta \delta) \cosh(\beta \delta) + \beta \delta \chi_s \sinh^2(\beta \delta) + \cosh^2(\beta \delta)] + q_{42} \sinh(3 \beta \delta) + 3 \beta \delta \chi_s \cosh(3 \beta \delta) \} \dots (58)$$

となる。

以上で 1 次のオーダーまでの解析が完了した。

APPENDIX に示されるように式 (55) の  $g_2 \sim g_4$  を求めるためには、複雑な積分計算を必要とするので、本研究ではこれを数値的に求めた。

#### 4. 計算結果と実験値との比較

計算結果の検証を行うために、小型円型水路を用いた室内実験が行われた<sup>12)</sup>が、後に簡単に述べるように、水理条件が理論の適用可能範囲外であった。そこで、吉川ら<sup>9)</sup>の実験結果を用いて理論の検証を行うことにする。吉川らの研究では、固定床 3 ケース (Run F 1, F 2, F 3)、移動床 2 ケース (Run M 1, M 2) の実験が行われているが、長方形断面という本理論解析の前提条件に適合する Run F 1, F 2, F 3 との比較を行う。計算に必要なこれらの無次元水理パラメーターを表-1 に示す。図-3 は鉛直平均された主流速の横断分布を示す。同図中の○印は吉川らによる実測値を示し、理論曲線のうち破線は 0 次のオーダーまでの解 ( $u_0$ ) を、実線は 1 次のオーダーまでの解 ( $u_0 + \nu u_1$ ) を示す。Run F 3 を除いて外岸近くで急激に大きくなる分布は精度よく計算されるが、各ケースとも内岸域における運動量輸送による流速低下を理論ではやや大きめに見積る傾向があ

表-1 吉川らの実験条件の概要

Run No.	$\nu$	$\beta$	$C_f$	$F_r$	$\chi_s$	$\chi_o$	Res
F1	0.111	10	0.00557	0.608	0.560	0.0560	207
F2	0.111	9.09	0.00470	0.663	0.639	0.0703	226
F3	0.111	7.94	0.00484	0.656	0.625	0.0788	225

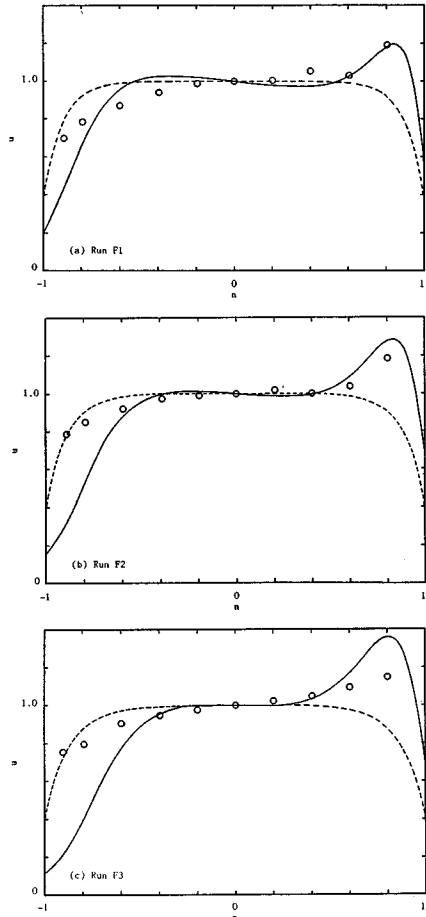
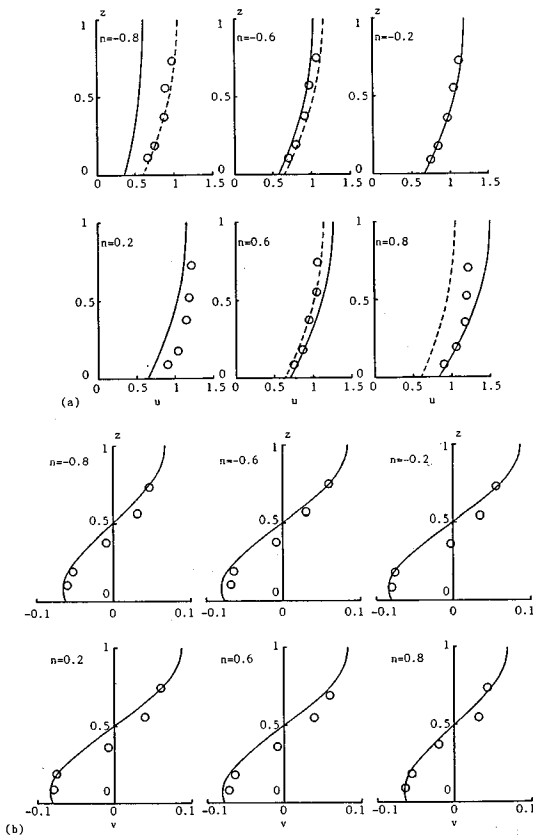


図-3 吉川ら<sup>9)</sup>の実験結果と本理論との比較 (.....: 0 次解, ——: 1 次までの解)

る。これは、式 (30) から非同次解  $v_{11}$  を求める際に、乱れに起因する鉛直断面に作用する垂直応力項を表わす左辺第 2 項の  $(1/\beta^2)(\partial^2 v_{11}/\partial n^2)$  を無視していることから生じていると考えられる。すなわち、側壁のごく近傍ではこの項は無視できず、これを無視した場合には、遠心力と圧力勾配の差をせん断応力のみで受け持つことになるため、2 次流を大きめに見積り、その結果、2 次流による運動量の横断輸送も大きめに見積ることになる。図-3 より、理論の精度は  $\beta$  (半幅/水深比) が小さくなるほど悪くなるのがわかる。Run F 1 で顕著なように、1 次のオーダーまでの理論解で、流路中央部の流速分布がほぼ直線的に内岸から外岸域に向かって減少する原因は、内岸側ほど水面の縦断勾配が急になる湾曲流路の平面幾何形状にある。側壁の影響、2 次流による運動量輸送を無視すると理論解はこの直線を両側岸へ延長した、内岸側が速く、外岸側が遅い直線分布となり、実際の流速分布と大きく異なる。



図—4 主流、2次流の実測値と理論値の比較 (Run F 2)  
(a) 主流, (b) 2次流

主流の鉛直分布、2次流の鉛直分布についての実験値と理論値の対応を Run F 2 を例にとり図—4 に示す。図—3 と同様に理論曲線は破線が 0 次解、実線が 1 次までの解を表す。図—4 (a) に示す主流の鉛直分布は、図—3 (b) の鉛直平均流速の分布からも明らかなように、内岸付近 ( $n = -0.8$ ) で 0 次解の方が実測値との対応が良いが、その他の地点においては、全体的に 1 次までの解が実測値を良く説明できる。なお同図において流路中央付近 ( $n = -0.2, 0.2$ ) では 0 次解が 1 次までの解とほとんど一致するので 0 次解の理論曲線は省略した。同図 (b) に示す 2 次流の鉛直分布では、2 次流がゼロとなる地点が実測値で半水深より底面側に、計算値ではほぼ半水深の高さに位置することを除いて、計算値はほぼ全域的に実測値を良く表現できる。ここで省略した吉川らの Run F 1, F 3 に対しても図—4 (b) に示したと同程度に 2 次流の実測値と計算値の対応は良いが、主流の鉛直分布については、図—3 (c) から推定できるように、Run F 3 に対して内岸近く、外岸近くで実測値と計算値の対応がやや悪い。

Run F 1, F 2, F 3 の水理条件の相違は流量、すなわち、無次元パラメーターでは主に半幅/水深比、 $\beta$  である。以上の検討によりパラメーター  $\beta$  が小さくなるほど (たとえば Run F 3), 主流速の 1 次解の精度が悪くなるのが予想されるので、 $\beta$  がさらに小さな本実験 ( $\beta = 4.93, \nu = 0.167, C_f = 0.00296$ ) について理論値と実測値の比較を試みたところ、鉛直平均流速の 1 次までの解は実測値と大きく異なり、外岸域では最大で平均流速の 2.7 倍程度、内岸域では負の領域が現われ、この水理条件ではもはや本理論は適用できないことがわかった。以上のように、鉛直平均主流速の 1 次解は水理条件 (特に半幅/水深比, 半幅/曲率半径比) によっては、その精度が悪くなるのがわかった。次節では、その原因について考察し、本理論の適用限界を明らかにする。

### 5. 理論の適用限界

前節において、ある水理条件では摂動法による主流速の解析精度が悪くなるのがわかった。式 (9) の摂動展開では、 $u_1, u_2$  がそれぞれ 1 のオーダーである場合には収束するが、 $u_1, u_2$  は水理条件の関数となるのでこの条件が満足されることは保証されない。摂動 1 次項  $\nu u_1, \nu v_1, \nu w_1$  は 3. における理論展開から以下の比例関係がほぼ成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \nu u_1 &\sim \nu \left(\frac{R_{ec}}{\beta}\right)^2 \\ \nu v_1 &\sim \nu \frac{R_{ec}}{\beta} \\ \nu w_1 &\sim \nu \frac{R_{ec}}{\beta^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

(ただし、APPENDIX に示すように幅広水路では本質的に、 $R_{ec} \sim C_f^{-1/2}$  であるが比例定数は、 $\chi_b, \chi_s, \delta$  を介してさらに摩擦係数  $C_f$  の影響を間接的に、また半幅/水深比  $\beta$  の影響を若干受ける。) したがって、 $\nu$  が十分小さく、 $\beta$  が十分大きければ、摂動 1 次項は 1 より十分小さく、摂動展開が収束することが期待されるが、 $R_{ec}$  がかなり大きな値 (前節に示した実験の水理条件では 200~250 程度) をとるため、 $\nu \ll 1, \beta \gg 1$  であっても、摂動 1 次項が比較的大きくなり、摂動展開が収束しなくなる場合があると予想される。とりわけ、主流速の 1 次解は  $(R_{ec}/\beta)$  の 2 乗に比例するため、1 次解までの精度は主流速についての解が最も悪くなる。鉛直平均主流速の横断分布が実測値と大きくかけ離れていて計算された本実験条件についての 2 次流分布の計算精度はそれほど悪くはなかったが、これはこのためである。そこで、主流速の支配方程式 (1) を基礎式とし、この式に摂動法による解を代入した場合に生じる誤差を基準に本解析解の適用限界を検討する。式 (1) の両辺を  $\beta$  で除し、

未知量  $u, v$ , および  $w$  の含まれている項を左辺にまとめ、底面から水面まで鉛直積分すると、左辺は

$$E_l = \int_0^1 \left[ \frac{1}{\beta} \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} + \nu(1-\nu n)uv + \beta w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \frac{1}{Re_c} \left[ \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu(1-\nu n) \frac{\partial u}{\partial n} - \nu^2 u(1-2\nu n) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \right] \right] dz \dots (60)$$

となり、右辺は

$$E_r = \int_0^1 \frac{i_0}{F_r^2} (1-\nu n) dz = \frac{i_0}{F_r^2} (1-\nu n) \dots (61)$$

となる。式 (60) における  $u, v$  および  $w$  が厳密解であれば当然  $E_l = E_r$  が成り立つ。ここで、相対誤差  $E$  を

$$E = \frac{E_l - E_r}{E_r} \dots (62)$$

のように定義する。式 (60) の  $u, v$  および  $w$  にそれぞれ  $u_0 + \nu u_1, \nu v_1$  および  $w_1$  を代入すれば、式 (62) により摂動 1 次解までの相対誤差が計算される。このようにして計算された誤差は、前節で述べた本実験の条件に対してはきわめて大きく、側壁付近ではその絶対値が 1~7 にもなる。Run F1 では  $|n| \geq 0.9$  で誤差が 0.1~0.2 程度となるが他の領域では 0.02 程度である。Run F3 では側壁付近の誤差が若干大きくなり、 $|n| \geq 0.9$  で 0.2~0.5, 他の領域では 0.03 程度となっている。以上より、本実験の条件に対しては、摂動展開による解法は全く適用できず、吉川らによる F シリーズの実験条件に対してはこの解法が有効であると考えられる。しかし、図-3 (c) にみられるように Run F3 に対しては適合度がやや悪く、 $E$  の横断方向の 2 乗平均値の平方根は 0.14 となっている。また、実験値との適合度が高い Run F1, F2 に対しては、それぞれ 0.065, 0.10 となっている。そこで相対誤差  $E$  の横断方向 2 乗平均値の平方根が 0.1 以下を本解析の適用可能範囲とし、摩擦係数  $C_f$  をパラメーターにして、適用限界線を図-5 に示す。同図中の曲線群はそれぞれの  $C_f$  に対して誤差の横断的 2 乗平均値の平方根が 0.1 となる線を示し、これより左下側が適用可能領域である。図中の○印は Run F1, F2 および F3 の水理条件の関係を表わし、これらの条件での  $C_f$  がほぼ 0.005 であることから、F1, F2 については適用可能範囲内にあり、F3 についてはこれから若干はずれることが読み取られる。同図中の●印は本実験条件についての  $\nu$  と  $1/\beta$  の関係を示す。この条件では  $C_f = 0.00296$  であるので、これに対応する  $C_f = 0.003$  の適用限界線と●印の位置関係を見ると、●印

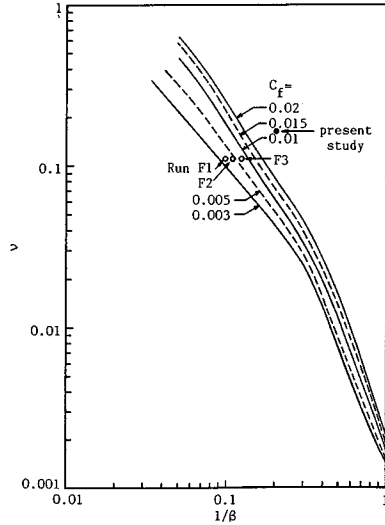


図-5 本理論の適用可能領域図

がこの曲線より右上に大きくずれて位置し、本解析法はこの条件では適用できないことを示している。

$\nu Re_c / \beta \sim (\bar{B} / \bar{r}_0) C_f^{-1/2} (\bar{h}_0 / \bar{B})$  であることを考えれば、実河川では  $\bar{h}_0 / \bar{B}$  がかなり小さく、摂動パラメーターが実験水路の値より相当小さくなるので、図-5 に示した適用条件を満足する実河川は数多く存在すると思われるが、ここでこの解析は底面が平坦の場合に限定されており、実河川では底面が移動床で構成され、2 次流によって外岸の洗掘と内岸の堆積が生じるのが一般的であるので、横断面形状が長方形から外れ、摂動解析の実河川への適用限界を図-5 のみから判断するには至っていないことを付記する。

### 6. 結 論

本研究では側壁面による摩擦の影響と横断面内の 2 次流による運動量の横断方向輸送を考慮して摂動法による一様湾曲流路の流れの解析を摂動 1 次項まで行った。この結果明らかになった点を以下に示す。

(1) 鉛直平均主流速の横断分布は強制渦のように直線的とはならず、外岸域でふくらみをもつ極大値をとる分布となる。流路中央域での分布は外岸側に向かって減少しほぼ直線となる場合があるが、これは 2 次流による運動量輸送によるものではなく、メトリックの効果によるものである。

(2) パラメーター  $\nu, 1/\beta$  が大きくなると、主流速の摂動解は大きな誤差を含むようになるが、この場合でも横断 2 次流の精度は主流の精度ほど悪くはない。

(3) 本解析法の適用限界を縦断方向運動量式に対する解析結果の誤差を基準に明らかにした。この誤差は



$C_f, \nu, 1/\beta$  の大きさに依存し、定性的には  $C_f$  が小さくなるほど、 $\nu, 1/\beta$  が大きくなるほど大きくなる。

謝 辞：本研究は文部省科学研究費試験研究（研究代表者：池田駿介，課題番号：62850095）の補助を受けて行った。また、実験に際しては、当時学部生の菊池雅彦君（現在建設省から山形県に出向）の多大な協力を得た。ここに記して、感謝の意を表します。

APPENDIX

(i)  $\chi_b$  および  $\chi_s$  の導出

幅広一様開水路においては縦断方向の運動方程式は

$$\varepsilon \frac{d^2 \tilde{u}}{dz^2} = -\tilde{g} i_0$$

となる。これを、水面 ( $z = \tilde{h}_0$ ) で、 $d\tilde{u}/dz = 0$  の境界条件のもとに 2 回積分すると、 $\tilde{u}$  は長さの次元をもつ 1 つの積分定数  $\tilde{C}_b$  を含んで

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{u}_*^2}{\varepsilon} \left( z - \frac{z^2}{2\tilde{h}_0} + \tilde{C}_b \right) \quad (A.1)$$

で表わされる。式 (A.1) の表現では底面 ( $z = 0$ ) で slip velocity を許容することになるが、これと底面での速度勾配の関係は式 (A.1) より

$$\tilde{u}_b \equiv \tilde{u} \Big|_{z=0} = \tilde{C}_b \frac{d\tilde{u}}{dz} \Big|_{z=0} \quad (A.2)$$

となる。本文の無次元化の方法に従って、式 (A.2) を無次元化すると

$$u_b = \chi_b \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} \quad (A.3)$$

が得られる。ここに

$$\chi_b = \frac{\tilde{C}_b}{\tilde{h}_0} \quad (A.4)$$

である。渦動粘性係数  $\varepsilon$  を、 $\varepsilon = \alpha \tilde{u}_* \tilde{h}_0$  (本研究では  $\alpha = 1/15$  とした) と仮定し、摩擦係数が定義より  $C_f = (\tilde{u}_*/\tilde{u})^2$  であることを考慮すると、式 (A.1) を鉛直平均することにより

$$\frac{\tilde{C}_b}{\tilde{h}_0} = \chi_b = \frac{\alpha}{\sqrt{C_f}} - \frac{1}{3} \quad (A.5)$$

が得られる。 $C_f$  と、上記の  $\varepsilon$  を用いて定義した  $R_{ee}$  との間には、 $R_{ee} = 1/(\alpha\sqrt{C_f})$  の関係が成り立つ。

一般長方形断面水路においても、式 (A.2) が底面について成り立ち、側壁面においても同様の関係式が成り立つと仮定すると、

$$\tilde{u} \Big|_{\tilde{n}=\pm B/2} = \mp \tilde{C}_s \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} \Big|_{\tilde{n}=\pm B/2} \quad (A.6)$$

となる。これを無次元化すると

$$u \Big|_{n=\pm 1} = \mp \chi_s \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{n=\pm 1} \quad (A.7)$$

となる。ここに

$$\chi_s = \tilde{C}_s / (\tilde{B}/2) \quad (A.8)$$

である。底面と側壁面で粗度が異なる場合の  $\tilde{C}_b$  と  $\tilde{C}_s$  の関係については明らかではないが、表面状態が同一の場合には  $\tilde{C}_s \approx \tilde{C}_b$  がほぼ成り立つと考えられるため、本研究ではこれを採用し、式 (A.4)、(A.8) の関係から

$$\chi_s = \frac{1}{\beta} \chi_b \quad (A.8-b)$$

とする。

(ii) 式 (41)~(43) に現われる係数

$$K_1 = d_1^2 d_2^2 \left( \frac{2}{15} + \frac{2}{3} \chi_b + \chi_b^2 \right) \quad (A.9)$$

$$K_2 = 2 d_1^2 d_2 d_3 \left[ -\left( \frac{\chi_b}{\delta} + \frac{1}{\delta^3} \right) \sin \delta + \frac{1}{\delta^2} \cos \delta \right] \quad (A.10)$$

$$K_3 = d_1^2 d_3^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4\delta} \sin 2\delta \right) \quad (A.11)$$

$$M_1 = d_1^2 d_2^2 \left( \frac{1}{105} + \frac{\chi_b}{15} + \frac{\chi_b^2}{6} \right) \quad (A.12)$$

$$M_2 = 2 d_1^2 d_2 d_3 \left[ \frac{1}{\delta} \left\{ -\frac{\chi_b}{2} + \frac{1}{\delta^2} \left( \chi_b - \frac{5}{2} \right) + \frac{6}{\delta^4} \right\} \sin \delta + \frac{1}{\delta^2} \left( \frac{1}{2} - \chi_b - \frac{6}{\delta^2} \right) \cos \delta \right] \quad (A.13)$$

$$M_3 = d_1^2 d_3^2 \left[ \frac{1}{12} + \frac{1}{8\delta} \left( 1 - \frac{1}{2\delta^2} \right) \sin 2\delta + \frac{1}{8\delta^2} \cos 2\delta \right] \quad (A.14)$$

$$L_1 = d_2 \left( \frac{K_1}{6} - M_1 \right) \quad (A.15)$$

$$L_2 = d_2 \left[ \frac{f_2(1) - \frac{1}{6} f_1(1)}{1 - \delta^2 \left( \frac{1}{3} + \chi_b \right)} \frac{1}{\cosh \beta \delta} + \frac{K_2}{6} - M_2 \right] \quad (A.16)$$

$$L_3 = d_2 \left( \frac{K_3}{6} - M_3 \right) \quad (A.17)$$

(iii) 式 (45), (49) に現われる関数

$$v_0(z) = -d_1^2 d_2^2 \left\{ \frac{z^6}{120} - \frac{z^5}{20} + \frac{1-\chi_b}{12} z^4 + \frac{\chi_b}{3} z^3 + \frac{\chi_b^2}{2} z^2 \right\} + K_1 \frac{z^2}{2} - L_1 \left( -\frac{z^2}{2} + z + \chi_b \right) \quad (A.18)$$

$$v_{co}(z) = \frac{\chi_b C_1(1) \cos \delta (1-z)}{\cos \delta \cosh(\beta \delta)} - 2 d_1^2 d_2 d_3 \left[ \frac{1}{\delta^2} \cdot \left( -\frac{z^2}{2} + z + \chi_b + \frac{3}{\delta^2} \right) \cos \delta (1-z) - \frac{2}{\delta^2} (z-1) \sin \delta (1-z) - \frac{1}{\delta^2} \left( \chi_b + \frac{3}{\delta^2} \right) \cos \delta - \frac{2}{\delta^2} \sin \delta + z \left\{ -\frac{1}{\delta} \left( \chi_b + \frac{1}{\delta^2} \right) \sin \delta \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{\delta^2} \cos \delta \Big] + K_2 \frac{z^2}{2} - L_2 \left( -\frac{z^2}{2} + z + \chi_b \right) \dots\dots\dots (A \cdot 19)$$

$$v_{cc}(z) = -d_1^2 d_3^2 \left[ \frac{z^2}{4} + \frac{z}{4\delta} \sin 2\delta - \frac{1}{8\delta^2} \{ \cos 2\delta (1-z) - \cos 2\delta \} \right] + K_3 \frac{z^2}{2} - L_3 \left( -\frac{z^2}{2} + z + \chi_b \right) \dots\dots\dots (A \cdot 20)$$

$$w_{so}(z) = \frac{\beta \chi_b C_1(1)}{\cos \delta \cosh(\beta \delta)} \{ \sin \delta (1-z) - \sin \delta \} + 2\beta \delta d_1^2 d_2 d_3 \left[ \frac{1}{\delta^3} \left\{ \frac{z^2}{2} - z - \left( \chi_b + \frac{6}{\delta^2} \right) \right\} \sin \delta (1-z) + \frac{3}{\delta^4} (1-z) \cos \delta (1-z) + \frac{1}{\delta^3} \left( \chi_b + \frac{6}{\delta^2} \right) \sin \delta - \frac{3}{\delta^4} \cos \delta - z \left\{ \frac{1}{\delta^2} \left( \chi_b + \frac{3}{\delta^2} \right) \cos \delta + \frac{2}{\delta^3} \sin \delta \right\} + \frac{z^2}{2} \left\{ -\frac{1}{\delta} \left( \chi_b + \frac{1}{\delta^2} \right) \sin \delta + \frac{1}{\delta^2} \cos \delta \right\} \right] - \beta \delta K_2 \frac{z^3}{6} + \beta \delta L_2 \left( -\frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2} + \chi_b z \right) \dots\dots\dots (A \cdot 21)$$

$$w_{sc}(z) = 2\beta \delta d_1^2 d_3^2 \left[ \frac{z^3}{12} + \frac{z^2}{8\delta} \sin 2\delta + \frac{z}{8\delta^2} \cos 2\delta + \frac{1}{16\delta^3} \{ \sin 2\delta (1-z) - \sin 2\delta \} \right] - 2\beta \delta K_3 \frac{z^3}{6} + 2\beta \delta L_3 \left( -\frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2} + \chi_b z \right) \dots\dots\dots (A \cdot 22)$$

(iv) 式 (55) に現われる係数

$$g_1 = \frac{i_0}{F^2 \tau} \dots\dots\dots (A \cdot 23)$$

$$g_2 = \frac{R_{ee}}{\beta^2} \int_0^1 \{ d_1 d_2 (z-1) w_{so}(z) + \beta \delta d_1 d_3 \cos \delta (1-z) v_c(z) \} dz - \frac{1}{R_{ee} \beta^2} \beta d_1 d_3 \sin \delta \dots\dots\dots (A \cdot 24)$$

$$g_3 = \frac{R_{ee}}{\beta^2} \int_0^1 \{ d_1 d_2 (z-1) w_{sc}(z) + \beta \delta d_1 d_3 \sin \delta (1-z) w_{so}(z) + \beta \delta d_1 d_3 \cos \delta (1-z) v_{cc}(z) \} dz \dots\dots\dots (A \cdot 25)$$

$$g_4 = \frac{R_{ee}}{\beta^2} \int_0^1 \{ \delta d_1 d_3 \sin \delta (1-z) w_{sc}(z) + \beta \delta d_1 d_3 \cos \delta (1-z) v_{cc}(z) \} dz \dots\dots\dots (A \cdot 26)$$

参 考 文 献

- 1) Ikeda, S., Parker, G. and Sawai, K. : Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development, J. Fluid Mech., Vol. 112, pp. 363~377, 1981.
- 2) Parker, G. : Theory of meander bend deformation, ASCE, Proc. the conference Rivers '83, pp. 722~732, 1983.
- 3) Hasegawa, K. : Universal bank erosion coefficient for meandering rivers, ASCE, J. Hydraulic Eng., Vol. 115, No. 6, pp. 744~765, 1989.
- 4) Smith, J.D. and McLean, S.R. : A model for flow in meandering streams, AGU, Water Resources Research, Vol. 20, No. 9, pp. 1301~1315, 1984.
- 5) 池内幸司・玉井信行：蛇行水路における水深平均流れ場の遷移特性，土木学会論文報告集，第 334 号，pp. 89~101, 1983.
- 6) 吉川秀夫・池田駿介・北川 明：弯曲水路の河床変化について，土木学会論文報告集，第 251 号，pp. 65~75, 1976.
- 7) Rozovskii, I.L. : Flow of water in bends of open channels, Academy of sciences of U.S.S.R., Kiev, U.S.S.R., 1957, Translated by Y. Prushansky, The Israel program for scientific translations, pp. 92~109, 1961.
- 8) Kalkwijk, J.P. Th. and De Vriend, H.J. : Computation of the flow in shallow river bends, IAHR, J. Hydraulic Research, Vol. 18, No. 4, pp. 327~342, 1980.
- 9) De Vriend, H.J. : Velocity redistribution in curved rectangular channels, J. Fluid Mechanics, Vol. 107, pp. 423~439, 1981.
- 10) 石川忠晴・金 舜範：湾曲部の二次流に関する基礎的研究，土木学会論文集，第 375 号，pp. 143~149, 1986.
- 11) Engelund, F. : Flow and bed topography in channel bends, ASCE, J. Hydraulic Division, Vol. 100, HY 11, pp. 1631~1647, 1974.
- 12) 菊池雅彦・池田駿介・山坂昌成：湾曲部の三次元流れに関する基礎的研究，土木学会第 43 回年次学術講演会講演概要集，第 2 部，pp. 254~255, 1988.

(1989. 3. 8・受付)