

## 乱流モデルによる二次元表層密度噴流の鉛直混合現象の数値計算

CALCULATION OF VERTICAL MIXING IN TWO-DIMENSIONAL TURBULENT  
BUOYANT SURFACE JET WITH TURBULENCE MODELS

室田 明\*・中辻啓二\*\*・藤崎 豊\*\*\*

By Akira MUROTA, Keiji NAKATSUJI and Yutaka FUJISAKI

Applicability of turbulence models to a two-dimensional buoyant surface jet is examined through comparison with experimental data. A  $k-\epsilon$  turbulence model is found to overpredict the turbulent transport of the stresses so as to promote the vertical spreading of buoyant surface jet, because it cannot represent the anisotropy of turbulence. For taking account of the damping effects of the gravitational field and the free surface on the turbulence structure accurately, an algebraic Reynolds stress model (ASM) is examined with corrections to the pressure interaction terms at the free surface. The ASM tested produces a good agreement with measurements on the flow development and turbulence characteristics of buoyant surface jet. The predicted results also show the dependence of turbulence structure on gradient Richardson numbers.

*Keywords*: turbulence model, numerical calculation, buoyant surface jet, stable stratification, free surface

## 1. 緒 言

本研究は、近年機械工学や原子力工学等数多くの分野において利用されている乱流モデルを二次元表層密度噴流の流動解析に適用したものである。

表層密度噴流は密度の異なる流体を水表面に放出したときに観察される流動であり、自由な乱れのせん断流効果と浮力による成層安定効果とが共存する流れ場である。しかも、その上下を水表面と密度境界面の2つの自由境界に挟まれている点に特徴がある。また、それは密度流的に射流から常流へと遷移する流れ場でもある。したがって、開水路流れにみられる跳水現象と同様に、表層密度噴流は下流側の条件によって内部跳水を生起し、さらに成層流へと流動形態を変化させることもある(室田・中辻・中村<sup>1)</sup>参照)。

それゆえ、乱流の数値計算でもっぱら利用されている Patankar-Spalding<sup>2)</sup> の開発した parabolic-type の数値計算コードは適用できない。また、自由水表面の取扱い、乱流の表現、特に乱れに及ぼす浮力効果や自由水表面の

影響の表現、等々、数値計算を実行するに際して数多くの問題点がある。

今まで数多くの高次乱流モデルが提案されてきた。検証実験等を通じてそれらが種々のせん断流場において妥当であるという証明もなされてきた。係数の値もある程度固定化されつつある。土木の分野の乱流計算で残された課題は乱流特性に及ぼす自由水表面と浮力の影響の評価であると考えられる。

Gibson-Lauder<sup>3)</sup> が代数的応力モデルを二次元表層密度噴流に適用して以来、McGuirk-Rodi<sup>4)</sup>、Raithby-Schneider<sup>5)</sup>、Leschziner<sup>6)</sup> や McGuirk-Papadimitriou<sup>7)</sup> 等が三次元あるいは二次元表層密度噴流や内部跳水へ種々の高次乱流モデルの適用を試みている。しかしながら、濃度あるいは温度変動場での乱流計測が困難であるため、信頼に足る実験データが乏しく、予測結果の検証は実験値との定性的比較にとどまっているのが実状である。乱流モデルの高度化に伴い、実験値の精度の向上が要求されるのは必然の結果である。わが国においても二、三の適用例<sup>8),9)</sup>があるが、比較対象とする実験の信頼性に問題があり、結論を得るまでには至っていない。

本研究では、先に発表した二次元表層密度噴流の数値計算プログラム<sup>10)</sup>を基本に、 $k-\epsilon$  二方程式モデルと代数的応力モデル (ASM) の適用を試みる。著者らが長年

\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科  
(〒565 吹田市山田丘 2-1)

\*\* 正会員 工博 大阪大学助教授 工学部土木工学科(同上)

\*\*\* 学生会員 元・大阪大学大学院前期課程学生(同上)

にわたって実施してきた乱流計測結果<sup>11)</sup>と比較することにより、乱流モデルの有効性を検討する。

## 2. 二次元表層密度噴流の基礎方程式

### (1) 平均流動場

非圧縮性流体、ブーシネスク近似、静水圧近似および境界層近似の諸仮定を適用すれば、流速および密度変化をもたらす保存物質（たとえば、塩分濃度、熱）を支配する方程式は次のように表現される。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{uw}) \dots\dots\dots (2)$$

$$0 = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + U \frac{\partial B}{\partial x} + W \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{wb}) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、座標系は静水時の放流水の水面を原点を選び、流下方向に  $x$  軸、鉛直下向きに  $z$  軸をとる。  $U, W$  はそれに対応する平均流速成分、  $u, w$  は乱れ変動成分である。密度  $\rho$  は保存物質の濃度に比例すると仮定する。浮力パラメーター  $B$  は周囲環境水の密度  $\rho_a$  を用いて次式で表わされる。  $b$  は平均浮力  $B$  からの変動成分である。

$$B = g \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a} \geq 0 \dots\dots\dots (5)$$

水深  $z$  における平均圧力  $P$  は式 (3) を水表面 ( $z = -\zeta$ ) から  $z$  まで積分して、

$$P = \int_{-\zeta}^z \rho g dz = \int_0^z \rho_a g dz + \rho_a g \zeta - \rho_a \int_{-\zeta}^z B dz \dots\dots (6)$$

となる。したがって、圧力勾配  $\partial P / \partial x$  は水表面勾配  $d\zeta / dx$  と浮力勾配  $\partial B / \partial x$  の関数として表現される。

### (2) 乱流変動場

基礎方程式 (1)~(4) を完結させるためには、レイノルズ応力  $-\overline{uw}$  と乱流浮力流束  $-\overline{wb}$  を特定する必要がある。この乱流輸送の完結問題が乱流研究の最大の難問であり、最近の研究ではその解決手法としてさまざまな乱流モデルが提唱されている。

本論文で適用するモデルは次の2つである。1つは勾配拡散型モデルであり、渦動粘性係数  $\nu_t$  は  $k$ - $\epsilon$  二方程式モデルから算出される。このモデルは現在数多くのせん断乱流場に適用され、成果をあげている。いま1つは  $-\overline{u_i u_j}$  と  $-\overline{u_i b}$  の輸送方程式を直接解くレイノルズ応力モデルを簡略化した代数的応力モデルである。基礎方程式および定数は以下に示すとおりである。

#### a) $k$ - $\epsilon$ 二方程式モデル

レイノルズ応力および乱流浮力流束は次式のように渦

動粘性係数  $\nu_t$  と渦拡散係数  $\Gamma_t$  に関連づけてモデル化される。

$$-\overline{uw} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial z}, \quad -\overline{wb} = \Gamma_t \frac{\partial B}{\partial z} \dots\dots\dots (7)$$

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \dots\dots\dots (8)$$

渦拡散係数は乱流 Schmidt 数  $\sigma_t (= \nu_t / \Gamma_t)$  を介して渦動粘性係数と関連づけられる。上式は、乱流の特性が乱れエネルギー  $k (= 1/2 \overline{u_i^2})$  と粘性消散率  $\epsilon (= \nu \cdot \overline{\partial u_i / \partial x_i \cdot \partial u_i / \partial x_i})$  の2つの特性量で決定されることを意味している。  $k$  および  $\epsilon$  の分布は次の半経験的輸送方程式から算出できる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial B}{\partial z} - \epsilon \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + W \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \dots\dots\dots (10)$$

$\epsilon$  の輸送方程式中に現われる浮力に関する項を考慮すべきか否かについては種々の意見がある。Gibson-Lauder<sup>3)</sup>、McGuirk-Papadimitriou<sup>7)</sup> や Viollet<sup>2)</sup> らは、安定成層流中の微小スケールの乱流運動が等方的であるならば、浮力効果は無視できると報告している。この仮定は Britter *et al.*<sup>13)</sup> の実験によっても支持されている。一方、Rodi<sup>14)</sup> は浮力生成項の係数を種々変化させた計算を行い、実験値との比較から浮力生成項の有効性を示唆している。このように  $\epsilon$  の輸送方程式の浮力生成項の取扱いに関してはいまだ定説はない。検討の結果、 $\epsilon$  輸送方程式の浮力生成項は安定成層流において考慮する必要がないこと<sup>15)</sup> がわかったので、本論文では浮力生成項を省略することにした。

乱流 Schmidt 数  $\sigma_t$  は局所的な成層安定度を表わす勾配型 Richardson 数  $Ri (= -(\partial B / \partial z) / (\partial U / \partial z)^2)$  の関数として表現する Kondo *et al.*<sup>16)</sup> の関係式

$$\sigma_t = 6.873 Ri + 1.0 / (1.0 + 6.873 Ri) \dots\dots\dots (11)$$

を採用した。モデル定数は  $c_\mu, \sigma_k, \sigma_\epsilon, c_{\epsilon 1}$  および  $c_{\epsilon 2}$  であり、常用される値 (0.09, 1.0, 1.3, 1.44, 1.92) を用いた。

#### b) 代数的応力モデル (ASM)

$k$ - $\epsilon$  二方程式モデルは  $k$  および  $\epsilon$  というスカラー量から渦動粘性係数を算定することになり、乱れの非等方性を勘案できないという欠陥がある。そのためには  $-\overline{u_i u_j}$ 、 $-\overline{u_i b}$  および  $\overline{b^2}$  の輸送方程式を直接解く必要がある。しかしながら、方程式の数も多くなり、かつ計算も容易ではない。しかも、大量の演算時間を必要とす

る。

Ljuboja-Rodi<sup>17)</sup> はレイノルズ応力モデルの基本的な特性を保持したままで、方程式系を代数的表現に簡略化できる代数的応力モデル (ASM) を提唱している。その基本的な考え方は、 $\overline{u_i u_j}$ -輸送方程式の非定常項、移流項および拡散項を  $k$ -方程式の対応する項で近似する方法であり、次式のように簡単化される。

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} + \text{Diff}[\overline{u_i u_j}] &= \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \delta_{ij} \left( \frac{Dk}{Dt} - \text{Diff}[k] \right) \\ &= \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \delta_{ij} (P_r + G - \epsilon) \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

ここに、 $P_r$ ,  $G$  はせん断および浮力による乱れエネルギーの生成項、 $\epsilon$  は粘性消散率である。二次元表層密度噴流の場合は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} P_r &= -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} = \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \\ G &= -\overline{wb} = \frac{\nu_t}{\sigma_b} \left( \frac{\partial B}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

この結果、レイノルズ応力方程式は次式に示されるような代数的表現に簡略化できる。すべての乱流諸量を乱れエネルギー  $k$  とその粘性消散率  $\epsilon$  の2つの輸送方程式を解くだけで算定できる点にASMの利点がある。

$$\begin{aligned} \overline{w^2} &= \frac{2}{3} k \left\{ c_1 - 1 + \frac{P_r + G}{\epsilon} (c_2 - 2 c_2 c_2' f) \right. \\ &\quad \left. + \frac{G}{\epsilon} (3 - c_2 - 2 c_3 + 2 c_2 c_2' f) \right\} \left\{ c_1 + 2 c_1' f \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_r + G}{\epsilon} - 1 \right\} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{u^2} &= \frac{2}{3} k \left\{ \frac{P_r}{\epsilon} (3 - 2 c_2 - 2 c_2 c_2' f) + c_1 - 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} c_1' f \frac{\overline{w^2}}{k} \right\} \left\{ c_1 + \frac{P_r + G}{\epsilon} - 1 \right\}^{-1} \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{uw} &= -c_{1b}' \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\overline{w^2}}{k} \left[ 1 - c_2 + \frac{3}{2} c_2 c_2' f \right. \\ &\quad \left. - (1 - c_{2b}) \frac{1 - c_3}{c_{1b}} \alpha \beta \right] \left\{ c_1 + \frac{3}{2} c_1' f \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - c_3}{c_{1b}} \beta \right\}^{-1} \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial z} \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

$$\overline{ub} = -\frac{1}{c_{1b}} \frac{k}{\epsilon} \overline{uw} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{c_{2b} - 1}{c_{1b}} \overline{w^2} \frac{\alpha \beta}{g} \frac{\partial U}{\partial z} \dots \dots \dots (17)$$

$$\overline{wb} = -\alpha \overline{w^2} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial B}{\partial z} \dots \dots \dots (18)$$

$$\overline{b^2} = -\overline{wb} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial B}{\partial z} \dots \dots \dots (19)$$

ここに、

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= |c_{1b} + c_{1b}' f + 2(1 - c_{3b})/c_{1b} \beta|^{-1} \\ \beta &= -g \frac{k^2}{\epsilon^2} \frac{\partial B}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

$c_1, c_2, c_3, c_1', c_2'$  は圧力・ひずみ相関項のモデル定

数、 $c_{1b}, c_{2b}, c_{3b}, c_{1b}', c_{2b}'$  は圧力・浮力変動相関項のモデル定数であり、それらの値は1.8, 0.6, 0.5, 0.5, 0.3, 3.0, 0.33, 0.33, 0.5である。また、 $c_R$  は浮力変動量  $b^2$  の消散率  $\epsilon_b$  と  $\epsilon$  の関係式  $\epsilon_b = \epsilon \cdot \overline{b^2} / (c_R k)$  のモデル定数であり、0.8を採用した。これらの値はGibson-Lauder<sup>18)</sup>の研究を参考にして決めた。なお、 $c_1', c_2'$  および  $c_{1b}'$  のプライムのついた定数は後述する自由水表面の補正に関連するものである。 $f$  は自由水表面の影響を考慮した減衰関数である。

(3) 自由水表面の影響の評価

椿・小松<sup>19)</sup>の実験によれば、二次元表層均質噴流の平均流速分布の半値半幅  $H_{0.5}$  の流下方向への拡がり率  $dH_{0.5}/dx$  は0.072であった。二次元自由噴流の拡がり率は一般に0.11と報告されている。両流動の唯一の相違は自由水表面の有無にあるわけだから、自由水表面の存在が乱流特性に及ぼす影響の評価は重要である。

自由水表面の存在は鉛直方向の乱れ変動を減衰させるとともに、乱れの長さスケールも減少させて、鉛直方向の運動量や浮力の乱流輸送を抑制する効果をもたらす。この意味において、自由水表面は壁面の存在と同じような影響を乱流特性に及ぼすと考えられる。Gibson-Lauder<sup>18)</sup>はShir<sup>20)</sup>によって提案された圧力・ひずみ相関項における壁面修正モデルを拡張したモデルを提唱しており、本研究では定数の値も含めてそのまま用いた。正確な圧力・ひずみ相関項ならびに圧力・浮力変動相関項のモデル化はGibson-Lauder<sup>18)</sup>に記載しているので、ここでは付加条件としての減衰関数  $f$  について述べる。

Celik-Rodi<sup>21)</sup>は壁面減衰関数を拡張して

$$f = \frac{k^{3/2}}{c_w \epsilon} \cdot \frac{1}{z_n + 0.04 k^{3/2} / \epsilon_s} \dots \dots \dots (20)$$

を提案した。ここに、 $k_s$  と  $\epsilon_s$  は水表面での  $k$  と  $\epsilon$  の値を示す。 $z_n$  は自由水表面から垂直に測った距離である。上式は、自由水表面からの距離の増大に伴って、補正効果が減少することを示している。壁面減衰関数では乱れが局所的に平衡状態で、速度の対数則が適用できる壁面近傍で  $f=1.0$  となるように、 $c_w$  の値が選ばれる。その結果、 $c_w$  の値は一般に2.5となる。水表面減衰関数の場合は、自由水表面で  $f$  の値が有限値となるように  $0.04 k_s^{3/2} / \epsilon_s$  が加算される。定数0.04の値はNakagawa *et al.*<sup>22)</sup>の開水路乱流における  $\overline{w^2}/k$  の実測値に合致するように決められた。また、 $k_s^{3/2} / \epsilon_s$  は乱れ変動の長さスケールを特徴づけるものであり、自由水表面の存在による長さスケールの減少を評価できる。彼らは水表面での粘性消散率  $\epsilon_s$  を次式のように特定した。

$$\epsilon_s = k_s^{3/2} / (aH) \dots \dots \dots (21)$$

ここに、 $H$  は水深、 $a$  は水表面上での乱れエネルギー

$k_s$  の実測値に合うように定められた実験定数であり、 $a = 0.18$  を採用した。

彼らがいみじくも指摘しているように、水表面での  $\epsilon_s$  を特定することは粗雑な方法である。しかしながら、それは自由水表面近傍で乱れの長さスケール  $l_s \propto k^{3/2}/\epsilon$  あるいは渦動粘性係数  $\nu_t \propto k^2/\epsilon$  を減少させるという望ましい影響をもたらす利点がある。これは自由水表面の境界条件として一般的に用いられる対称条件

$$d\epsilon_s/dz=0 \dots \dots \dots (22)$$

では得られない効果である。

自由水表面近傍での乱流計測データが乏しい現状ではモデル化をいたづらに進めることは意味がない。本研究では上式 (21), (22) を検討することにするが、開水路乱流で特定された係数値がそのまま適用できるとは考えられない。適用に際して、定数  $a$  の検証が必要である。

### 3. 数値計算の概要

#### (1) 計算方法

離散化の考え方、ならびに計算手法は先に発表した計算プログラム<sup>10)</sup>に準じた。すなわち、非定常に変動する自由水表面の水位を直接計算する方法であり、流れが定常状態に漸近するまで非定常計算を行った。不要な擾乱を抑制するために、水位変動の空間的な連成を図る方法を用いた。すなわち、 $n+2$  時間ステップと  $n$  時間ステップでの各変数を加重平均操作して、 $n+2$  時間ステップの水位変動を implicit な差分表現に修正する方法を採用した。他の時間差分は leap frog 法による explicit 差分表現とした。また、数値分散に由来する誤差を最小に抑えるために、移流項の差分には二次精度の風上差分を採用した。

計算領域は図-1 に示す。水理実験に合わせて、塩水を満たした長さ 400 cm、深さ 120 cm の二次元水路に淡水を表層放流する数値実験を実施した。表層密度噴流では流れの変化は放出口近傍で激しく、放出口から離れるに従って緩やかになることから、流動の特性に応じて格子網の間隔を変え得る不等間隔格子網を採用した。格子網は  $\Delta x = 2.0 \sim 5.0$  cm の離散化間隔で水平 ( $x$ ) 方向に 88 節点、 $\Delta z = 0.5 \sim 2.5$  cm で鉛直 ( $z$ ) 方向に 70 節点である。不等格子間隔網の採用に伴う数値誤差については

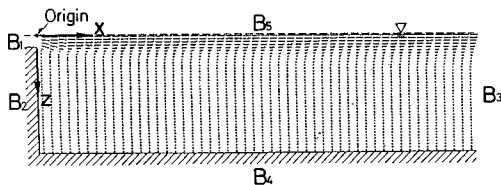


図-1 計算領域と境界

すでに検討済みである<sup>10)</sup>。

放出口条件は実験値から水深  $H_0 = 2.5$  cm で一様平均流速分布  $U_0 = 10$  cm/s、一様平均浮力分布  $B_0$  とし、 $B_0$  を 4.44, 1.11, 0.49, 0.0 cm<sup>2</sup>/s と変えることによって、放出口密度フルード数  $Fd_0 = U_0/\sqrt{B_0 H_0}$  の値を 3.0, 6.0, 9.0,  $\infty$  と変化させた。乱れエネルギー  $k$  および粘性消散率  $\epsilon$  は McGuirk-Papadimitriou<sup>7)</sup> に倣い  $\sqrt{k}/U_0 = 0.05$  の関係から  $k_0 = 0.0025 U_0^2$  cm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>、 $\epsilon_0 = k_0^{3/2}/H_0$  cm<sup>2</sup>/s<sup>3</sup> の一様分布を与えた。

計算は大阪大学大型計算センターの NEC-SX-2N を用いて行った。定常状態に達するまでの CPU 時間は  $k-\epsilon$  モデルで 4.0 分、ASM で 4.9 分であった。

#### (2) 境界条件

境界条件は図-1 の  $B_1 \sim B_5$  で次のように与えた。

- 放出口  $B_1$ :  $U = U_0$ ,  $B = B_0$ ,  $\partial\zeta/\partial x = 0$ ,  $k = k_0$ ,  
 $\epsilon = \epsilon_0$ .
- 壁面  $B_2$ :  $U = 0$ ,  $\partial B/\partial x = 0$ ,  $\partial k/\partial x = \partial\epsilon/\partial x = 0$ .
- 下流端  $B_3$ :  $\partial U/\partial x = \partial B/\partial x = 0$ ,  $W = \zeta = 0$ ,  
 $\partial k/\partial x = \partial\epsilon/\partial x = 0$ .
- 底面  $B_4$ :  $W = 0$ ,  $\partial U/\partial z = \partial B/\partial z = 0$ ,  
 $\partial k/\partial z = \partial\epsilon/\partial z = 0$ .
- 水表面  $B_5$ :  $\partial U/\partial z = \partial B/\partial z = 0$ ,  $\partial k/\partial z = 0$ ,  
 $\epsilon$  に関しては式 (21) あるいは式 (22) を用いる。

ここに、 $\zeta(x, t)$  は自由水表面の水位変動を示す。

### 4. 自由水表面における乱流減衰のモデル化の検討

#### (1) 計算条件

表層密度噴流の数値実験に先立って密度差のない表層均質噴流 ( $Fd_0 = \infty$ ) の数値計算を行い、自由水表面条件および乱流モデルの整合性の検討を行った。実験的に決めるべき定数は式 (20) の  $c_w$  と式 (21) の  $a$  である。壁面で用いられる  $c_w = 2.5$  は、粘性消散項が生成項を上回るエネルギー不足の水表面近傍では適当でない。予備計算の結果、Hossain-Rodi<sup>23)</sup> が開水路密度流の計算で用いた  $c_w = 5.0$  を採用した。計算条件は表-1 に示す 5 ケースである。 $a$  の値は彼らの用いた  $a = 0.18$  を参考に 3 通り変化させて、 $a$  値の適合性を検討した。

表-1 表層均質噴流の計算条件

Run	モデル	水表面条件	拡がり率
H-1	ASM	Eq. (21) with $a=1.80$	0.077
H-2	ASM	Eq. (21) with $a=0.90$	0.067
H-3	ASM	Eq. (21) with $a=0.18$	0.050
H-4	ASM	Eq. (22)	0.073
H-5	$k-\epsilon$	Eq. (22)	0.071

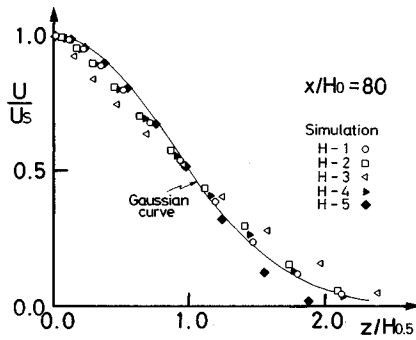


図-2 平均流速の鉛直方向分布

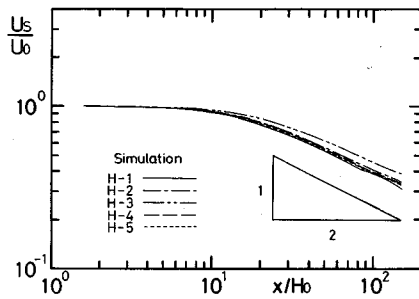


図-3 水表面流速の流下方向減衰特性

(2) 計算結果

図-2は  $x/H_0=80$  の流れの確立領域での平均流速  $U$  の鉛直方向分布を示す。慣例に従って、縦軸と横軸は水表面速度  $U_s$  と流速分布の半値半幅  $H_{0.5}$  で無次元表示した。表層噴流の確立領域においても、自己相似性が平面噴流と同様に成り立つことが知られている。すなわち、平均流速分布は一般に Gauss 分布で近似できる。計算結果は  $a=0.18$  を用いた Run H-3 を除いてこの特性を示している。また、図-3に示す水表面流速  $U_s$  の減衰特性も放流口からの距離  $x$  の  $-1/2$  乗則に従って減少しており、Run H-3 を除いて自己相似性が成立していることが確認できる。

半値半幅の拡がり率  $dH_{0.5}/dx$  の計算値を表-1の最終欄に示す。自由水表面で  $d\epsilon_s/dz=0$  の対称条件を用いた  $k-\epsilon$  モデルおよび ASM の計算値が椿・小松<sup>19)</sup>の実験値 0.072 と合致することがわかる。一方、式 (20) と式 (21) の減衰関数  $f$  を用いて水表面補正した計算では、 $a$  の値を小さく見積もれば、拡がり率が減少する傾向を示す。換言すれば、自由水表面の存在による乱れ変動の長さスケールの減少を過大に評価すれば、それは平均流速分布を水表面近傍で瘦せさせる効果を及ぼし、結果として噴流の拡がりを減少させることになる。 $a=1.8$  に選んだ Run H-1 では対称条件の計算結果 (Run H-4) より過大な拡がり率を示しており、減衰関数  $f$  を導入する目的である乱れの減衰効果がうまく表現されて

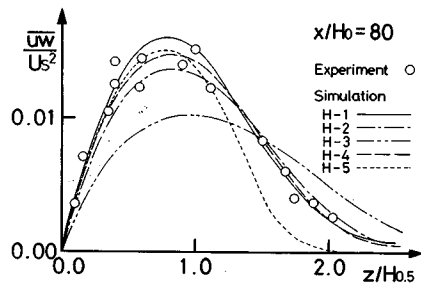


図-4 レイノルズ応力の鉛直方向分布

いない。

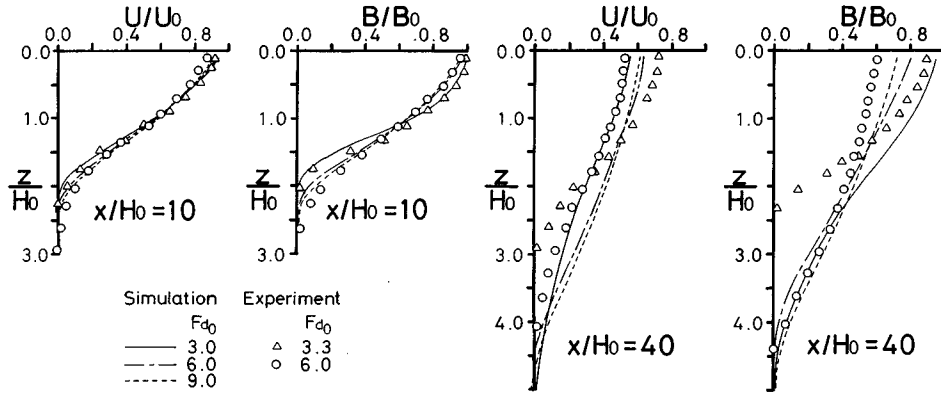
図-4はレイノルズ応力  $\overline{uw}/U_s^2$  の鉛直方向分布を示す。図中の丸印は椿・小松<sup>19)</sup>の  $x/H_0=125$  での実験値である。 $a=0.18$  の計算 (Run H-3) は最も小さい長さスケールを仮定した場合に相当するが、 $\overline{uw}/U_s^2$  の最大値は実験値の  $2/3$  程度まで落ちている。長さスケールを小さく仮定し過ぎた結果、水表面での乱流減衰効果があり有効に働かないために、鉛直下方への運動量の輸送が促進されている。一方、 $k-\epsilon$  モデルの計算 (Run H-5) では  $z/H_{0.5} > 1.0$  の範囲で  $\overline{uw}/U_s^2$  の過剰な減少が認められる。式 (8) の  $c_\mu$  の値は  $k-\epsilon$  モデルでは噴流断面全域で一定値 0.09 であるのに対して、ASM では水表面近傍では小さく、水深とともに増加して  $z/H_{0.5} > 1.0$  の範囲で約 0.1 の値となる (式 (16) 参照)。この  $c_\mu$  の違いが  $k-\epsilon$  モデルで計算した  $\overline{uw}/U_s^2$  の減少をもたらしたものと考えられる。他の 3 ケースは実験値を良好に予測しており、優劣つけ難い。しかし、水理諸量の流下方向変化を調べた場合、 $\epsilon_s$  を表層厚さ  $H$  と関係付ける Run H-2 では  $\overline{uw}/U_s^2$  の分布は流下方向に相似形を保持する。これに対して、対称条件  $d\epsilon_s/dx=0$  を用いた Run H-4 では、その値はわずかではあるが、一様に増加する傾向にある。たとえば、 $\overline{uw}/U_s^2$  の最大値およびその水深  $z/H_{0.5}$  の値を比較すると、 $x/H_0=80$  では 0.0146 と 0.79、 $x/H_0=120$  では 0.0152 と 0.81 であった。すなわち、噴流特有の自己相似性からみれば、式 (21) を用いた水表面補正が適切であるといえる。

上述の検証を総合的に判断して、以下では  $a$  の値として 1.0 を用いて表層密度噴流の計算を行う。つまり、本モデルでは水表面近傍の乱れ変動の長さスケール  $l_s$  を表層噴流厚  $H$  を用いて  $l_s=0.04 \cdot H$  で与えることになる。この点に関しては精度良い水理実験をまって、詳細に検討し直す必要があるのはもちろんのことである。

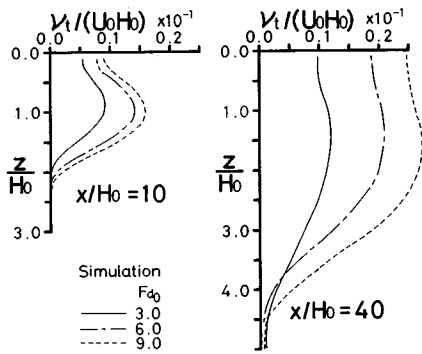
5. 表層密度噴流の数値計算

(1)  $k-\epsilon$  二方程式モデルの適用限界

図-5は  $k-\epsilon$  二方程式モデルを用いて計算した流下方



図—5  $k-\epsilon$  モデルによる平均流速と平均浮力の鉛直分布



図—6  $k-\epsilon$  モデルによる渦動粘性係数の鉛直分布

向平均流速  $U$  と平均浮力  $B$  の計算値と中辻<sup>11)</sup>による実験値を比較したものである。初期運動量流束の影響の強い流下位置  $x/H_0=10$  では、計算値と実験値とは良好に一致している。しかし、成層効果が優勢になる  $x/H_0=40$  になると、両者の一致度は悪い。特に、その傾向は平均浮力の分布に顕著である。

図—6 は図—5 に対応する流下位置での渦動粘性係数  $\nu_t$  の鉛直分布を示す。慣性力が増すにつれて、すなわち  $Fd_0$  の値の増大とともに、 $\nu_t$  の絶対値が増加する傾向はうまく表現されている。しかし、その絶対値は表層噴流の断面全域でおしなべて大きい。特に、 $x/H_0=40$  の計算で  $\nu_t/U_0H_0$  の値が 0.005 以下になる水深が  $Fd_0$  の値に無関係に  $z/H_0=4.0$  であるのは、理解し難い計算結果である。渦動粘性係数の値が大きいことは運動量の鉛直方向輸送が大きいことを意味しており、結果として平均流速分布の下方への過大な拡がりをもたらしている。 $k-\epsilon$  モデルでは渦動粘性係数の算出において方向性が全く考慮されないことに原因して、このような結果になったと考えられる。

しかしながら、渦動粘性係数の評価に、Webb<sup>24)</sup>の経験公式を用いた室田・中辻<sup>10)</sup>の計算結果と比較すれば、

$k-\epsilon$  モデルによる計算値は  $x/H_0=10$  での実験値の傾向を良好に説明している。このことから、 $k-\epsilon$  二方程式モデルはせん断効果の卓越した乱流場に対しては合理的な数値計算法であると結論付けられる。

## (2) 代数的レイノルズ応力モデル (ASM) の適用

### a) 平均流速分布と平均浮力分布

図—7, 8 は ASM を用いて計算した平均流速  $U$  と平均浮力  $B$  の鉛直分布の流下方向変化を示す。 $U/U_0$  および  $B/B_0$  の流下方向変化は  $k-\epsilon$  モデルの計算結果(図—5)と比較して格段に改善され、実験値と良好に一致している。特に、密度境界面の計算値と実験値との一致度は非常に良い。ASM では浮力による成層効果が計算結果にうまく考慮され、平均流速と平均浮力分布の鉛直下方への拡がりや抑制されていることが明瞭である。しかし、水表面近傍の  $U$  と  $B$  の通減割合に関しては計算値の方が実験値と比べて少し小さい傾向にある。

図—9 は、後ほど示す  $\overline{uw}$  および  $\overline{wb}$  の計算値から求めた渦動粘性係数  $\nu_t$  と乱流 Schmidt 数  $\sigma_t$  の鉛直分布を示す。図—6 との比較のために、 $x/H_0=40$  での計算値を示した。 $k-\epsilon$  モデルの  $\nu_t/U_0H_0$  の値と比較して、ASM の計算値は全般的に小さい。しかも、放流口密度フルード数  $Fd_0$  の減少とともに、 $\nu_t$  の値が 0 に漸近する水深が小さくなっているのが、特徴的に現われている。この結果、鉛直下方への運動量輸送が抑えられ、平均流速分布が実験で得られた分布形と良く一致するようになったと考えられる。つまり、レイノルズ応力の算出に際して、浮力勾配項を導入して成層効果を考慮した影響(式 (16))が渦動粘性係数の鉛直分布に明瞭に現われている。

他方、平均流速と平均浮力の計算値と実験値との一致度が水表面近傍であまり良くないのは、 $\nu_t/U_0H_0$  の値が水表面近傍で少し小さいことに原因している。このことは式 (12) で水表面での粘性消散率  $\epsilon_s$  を少し過大に評

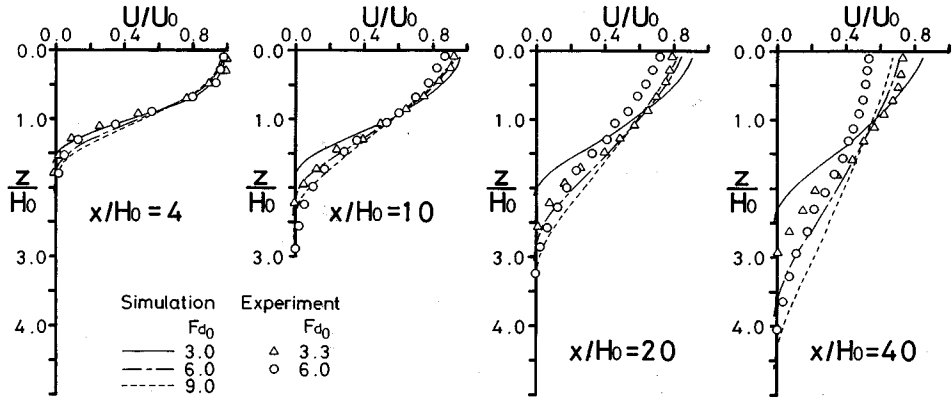


図-7 ASMによる平均流速  $U/U_0$  の鉛直分布の流下方向変化

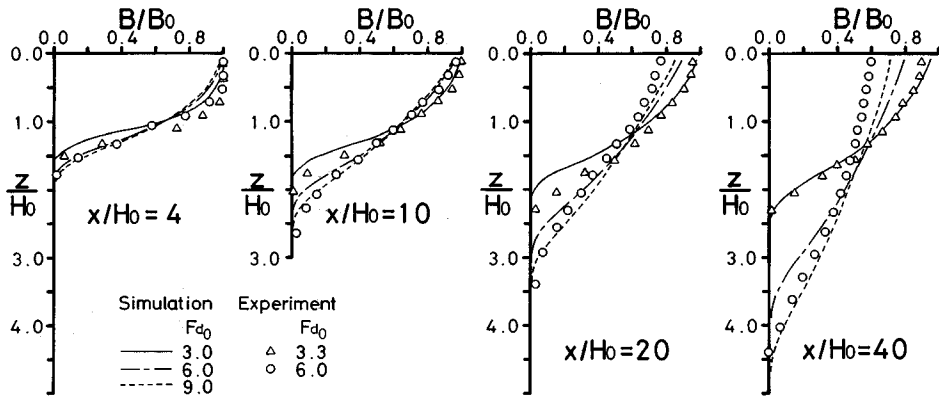


図-8 ASMによる平均浮力  $B/B_0$  の鉛直分布の流下方向変化

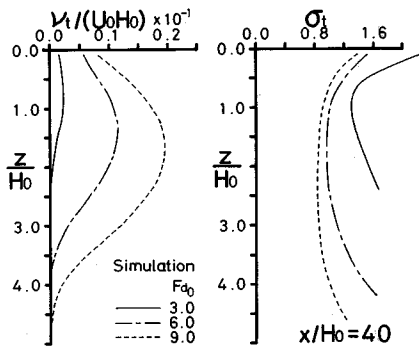


図-9 渦動粘性係数と乱流 Schmidt 数の鉛直分布

値したことと関連している。換言すれば、水表面での乱流変動の長さスケール  $l_s$  を小さく見積り過ぎたことになる。4. で考察したように、 $l_s$  は  $l_s = 0.04 H$  の関係を通して表層噴流厚  $H$  と関係付けられる。つまり、本モデルにおいては成層効果による  $H$  の減少が水表面近傍の乱れスケールの減少を直接的にもたらす結果となる。水表面の存在による乱流の減少が成層化現象とどのよう

に関連しているのかについては、現象の理解も含めて、今後詳細に検討する必要がある。

渦動粘性係数と渦拡散係数の比で表わされる乱流シュミット数  $\sigma_t (= \nu_t / \Gamma_t)$  の値は、 $Fd_0$  数の小さいほど、また水深の増加とともに、増加する傾向にある。成層効果の影響が  $\sigma_t$  の値の増大に明瞭に現われており、これは既往の実験および実測で得られた結果と一致している。また、 $\sigma_t$  は水表面近傍ならびに密度境界面近傍で最大値となる特異な分布を示している。この結果は両境界面近傍で運動量の乱流輸送が物質の乱流拡散を上回ることを示唆しており、次節で述べる乱流の非等方性と関連して興味深い。

b) 乱流諸量の鉛直分布

図-10は乱れ強度  $u'$ ,  $w'$ ,  $b'$  および鉛直方向乱流浮力流束  $\overline{wb}$  の  $x/H_0 = 40$  での鉛直分布を示す。また、図-11はレイノルズ応力  $\overline{uw}$  の鉛直分布の流下方向変化を示す。図からわかるように、乱れ強度  $u'$ ,  $w'$  および  $b'$  に関して計算値と実験値とは非常に良く一致しており、注目に値する。計算された非等方性度  $\overline{w^2}/u'^2$  は  $w'$

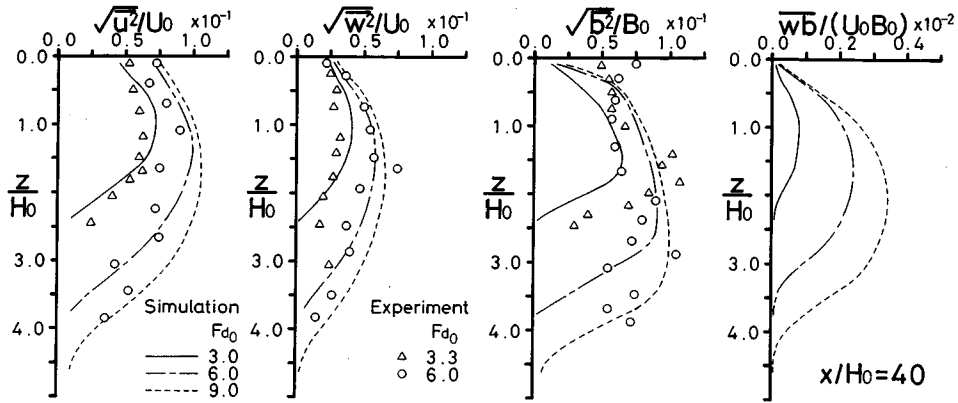


図-10 ASMによる乱流諸量の鉛直分布 ( $x/H_0=40$ )

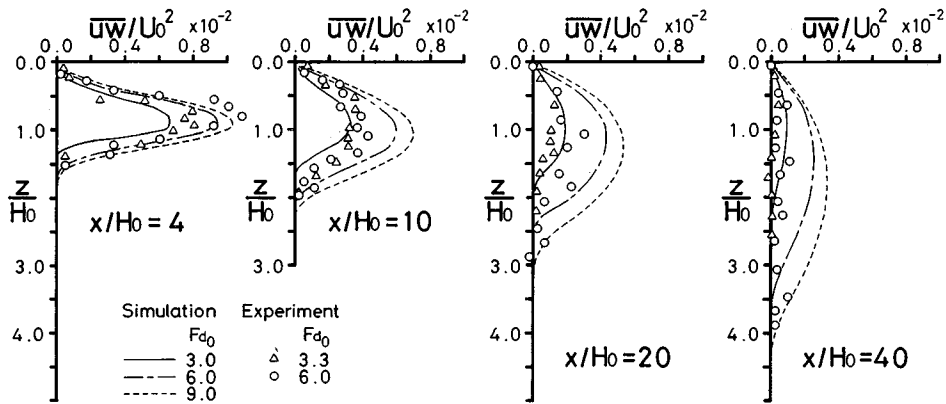


図-11 ASMによるレイノルズ応力  $\overline{u'w'}/U_0^2$  の鉛直分布の流下方向変化

の最大値を示す水深で 0.329~0.388 の範囲であるのが、水表面近傍では 0.165 と減少する。自由水表面の存在により鉛直方向の乱流変動が抑制される実験事実が本モデルの計算で良好に再現されていることがわかる。一方、レイノルズ応力  $\overline{u'w'}$  の計算値は  $x/H_0=4$  を除いて実測値より全般的に少し大きい値となる。 $\overline{wb}$  の実験値はあまりにも小さく、比較が困難であるため、図-10では割愛した。 $u'$ 、 $w'$  および  $b'$  の計算値と実験値とが良好に一致するのに対して、その相乗積である  $\overline{u'w'}$  や  $\overline{wb}$  の計算値が実験値とあまり合っていないのは不可思議である。しかし、 $\overline{u'w'}$  および  $\overline{wb}$  の鉛直分布の定性的傾向は両者でよく一致している。実験値の信頼性を再検討する必要があるかもしれない。

c) 乱流諸量と成層度との関連性

成層せん断流の局所的な安定度を示す指標として勾配型リチャードソン数  $Ri$  が良く用いられる。そこで、流速変動の非等方性度  $w^2/u^2$  および相関係数  $\overline{u'w'}/u'w'$  と  $Ri$  の関係を示したのが図-12, 13 である。上図は計算値、下図は実験値を示す。計算値は実験値と同様に相当

の散乱状態にあるが、平均した最適曲線の絶対値ならびにその  $Ri$  との関係は両者でよく合致している。すなわち、 $Ri$  が大きくなると、つまり成層安定性が強まると、 $w^2/u^2$  の値は小さくなり、鉛直方向の乱流変動が抑制されていることがわかる。また、レイノルズ応力の相関係数  $\overline{u'w'}/u'w'$  も  $Ri$  の増加とともに減少する傾向を示す。これは、成層安定化に伴って  $u$  と  $w$  の相関がなくなり、鉛直方向への運動量の乱流輸送が抑えられていることを意味する。

図中の実線は、小森ら<sup>25)</sup>が開水路内の安定成層流で得た実験値の最適曲線である。彼らの実験値は著者らの計算値ならびに実験値とおおむね一致するが、 $Ri$  数が 0.1 以上の強安定成層流中で  $w^2/u^2$  の値が増加する特異な結果を示している。彼らの解説によれば、その領域では波状運動が支配的であり、平均流速勾配や平均温度勾配に逆らった乱流輸送が生じている。一般的には、著者らの計算値ならびに実験値の示す傾向が成層せん断流の物理現象として妥当であろう。

次に、渦拡散係数と渦動粘性係数の比  $\Gamma_i/\nu_t (=1/\sigma_t)$



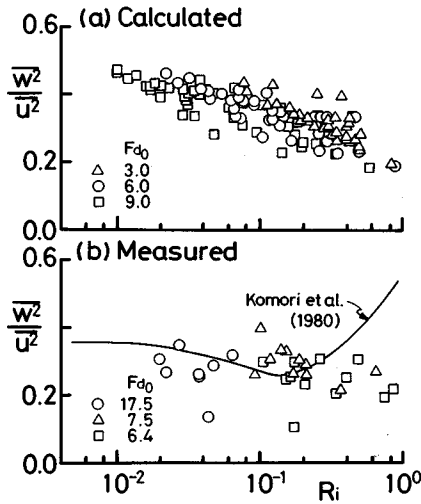


図-12  $\overline{w^2}/\overline{u^2}$  と  $Ri$  との関係

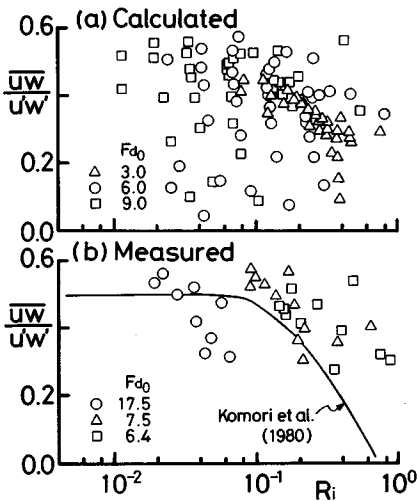


図-13  $\overline{uw}/\overline{uv}$  と  $Ri$  との関係

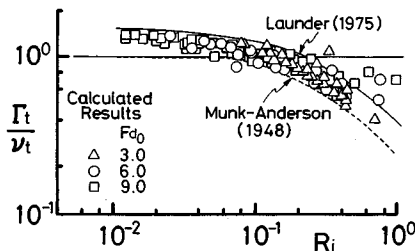


図-14  $\Gamma_t/\nu_t$  と  $Ri$  との関係

と  $Ri$  数との関係を図-14 に示す。  $\Gamma_t/\nu_t$  の計算値は安定度の増加とともに減少する傾向にあり、その上限と下限は図中に実線と破線で示す Launder<sup>26)</sup> と Munk-Anderson<sup>27)</sup> の理論結果とよく一致する。結果として、

物質の乱流拡散が運動量の乱流輸送に比べて浮力の影響をより大きく受けることが明らかである。以上の比較から、本モデルが乱流輸送の  $Ri$  数依存性をおおむね良好に再現できることがわかる。

## 6. 結 論

代表的な乱流二方程式モデルである  $k-\epsilon$  モデルと代数的レイノルズ応力モデル (ASM) を用いて二次元表層密度噴流の数値計算を行い、実験結果との比較から乱流モデルの基礎的な検討を行った。

$k-\epsilon$  モデルは乱流変動の非等方性を適切に表現し得ないために、鉛直方向の乱流輸送を過大に評価することがわかった。一方、ASM は Gibson-Lauder<sup>17)</sup> に倣い圧力・ひずみ相関項ならびに圧力・浮力変動項に対して水表面補正を行った結果、表層密度噴流の流動特性と乱流特性を良好に予測することが確認された。ASM の計算値と実験値との一致度は満足すべきものであった。

また、乱流諸量と成層度との関連を調べたところ、乱流輸送のリチャードソン数への依存性が数値結果に良好に再現されていることが認められた。

最後に、本研究は昭和 62-63 年度文部省科学研究費・一般研究 C (代表者・中辻啓二、課題番号 62550375) の補助を受けたことを記し、謝意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) 室田 明・中辻啓二・中村圭二郎：二次元表層密度流の形態分類，土木学会論文集，第 363 号/II-4，pp.107~113，1985.
- 2) Patanker, S.V. and Spalding, D.B. : A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows, Intl. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp.1787~1806, 1972.
- 3) Gibson, M.M. and Launder, B.E. : On the Calculation of Horizontal, Turbulent, Free Shear Flows Under Gravitational Influence, J. Heat Transfer, Trans. ASME, C 98, pp.81~87, 1976.
- 4) McGuirk, J.J. and Rodi, W. : Mathematical Modelling of Three-dimensional Heated Surface Jets, J. Fluid Mech., Vol. 95, pp.604~634, 1979.
- 5) Raithby, G.D. and Schneider, G.E. : The Prediction of Surface Discharge Jets by a Three-dimensional Finite Difference Model, J. Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 102, pp.138~145, 1980.
- 6) Leschziner, M.A. : Numerical Prediction of the Internal Density Jump, Proc. 18th IAHR Congress, Cagliari, Italy, Ba 4, pp.25~31, 1979.
- 7) McGuirk, J.J. and Papadimitriou, C. : A Numerical Study of the Internal Hydraulic Jump, Intl. Sympo. on Buoyant Flows, Athens, Greece, pp.242~255, 1986.
- 8) 松梨順三郎・岡田俊文・黒林寛治：乱流モデルによる表層密度噴流の解析，第 31 回水理講演会論文集，pp.503

- ~508, 1987.
- 9) 岩佐義朗・細田 尚・伊藤邦展：乱流モデルによる Buoyant Surface Jet の数値解析，京都大学防災研究所年報，第 30 号，B-2，583~595，1987.
  - 10) 室田 明・中辻啓二：二次元表層密度流の数値解析，第 30 回水理講演会論文集，pp.715~720，1986.
  - 11) 中辻啓二：表層密度噴流の混合機構と拡がりに関する基礎的研究，大阪大学学位論文，104 pp.，1984.
  - 12) Viollet, P. L. : Turbulent Mixing in a Two-layer Stratified Shear Flow, Proc. 2nd Intl. Sympo. on Stratified Flows, Trondheim, Norway, pp.315~325, 1980.
  - 13) Britter, R.E., Hunt, J.C.R., Marsh, G.L. and Snyder, W.H. : The Effect of Stable Stratification on Turbulent Diffusion and the Decay of Grid Turbulence, J. Fluid Mech., Vol.127, pp.27~44, 1983.
  - 14) Rodi, W. : Influence of Buoyancy and Rotation on Equations for the Turbulent Length Scale, 2nd Sympo. on Turbulent Shear Flows, London, England, pp.10-37~42, 1979.
  - 15) 室田 明・中辻啓二・藤崎 豊：乱流モデルの成層せん断流への適用，土木学会第 33 回水理講演会論文集，pp.583~588，1989.
  - 16) Kondo, J., Kanechika, O. and Yasuda, N. : Heat and Momentum Transfer under Strong Stability in the Atmospheric Surface Layer, J. Atm. Sci., Vol. 35, pp.1012~1021, 1978.
  - 17) Ljuboja, M. and Rodi, W. : Calculation of Turbulent Wall Jet with an Algebraic Reynolds Stress Model, J. Fluid Engng., Vol.102, pp.350~356, 1980.
  - 18) Gibson, M.M. and Launder, B.E. : Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layers, J. Fluid Mech., Vol. 86, pp.491~511, 1978.
  - 19) 椿東一郎・小松利光：2次元表面密度噴流における流れの特性と連行現象，土木学会論文報告集，第 273 号，pp.69~81，1978.
  - 20) Shir, C.C. : A Preliminary Numerical Study of Atmospheric Turbulent Flows in the Idealized Planetary Boundary Layer, J. Atm. Sci., Vol.30, pp.1327~1339, 1973.
  - 21) Celik, I. and Rodi, W. : Simulation of Free-Surface Effects in Turbulent Channel Flows, Physico-Chem. Hydrodyn., Vol. 5, pp.217~227, 1984.
  - 22) Nakagawa, H., Nezu, I. and Ueda, H. : Turbulence of Open Channel Flow over Smooth and Rough Beds, Proc. JSCE, Vol.241, pp.155~168, 1975.
  - 23) Hossain, M.S. and Rodi, W. : Mathematical Modelling of Vertical Mixing in Stratified Channel Flow, Proc. 2nd Intl. Sympo. on Stratified Flows, Trondheim, Norway, pp.280~291, 1980.
  - 24) Webb, E.K. : Profile Relationships : the Log-linear Range and Extension to Strong Stability, Quart. J.R. Met. Soc., Vol.96, pp.67~90, 1970.
  - 25) 小森 悟・植田洋匡・荻野文丸・水科篤郎：熱的に成層化された流れの中の乱流拡散係数に及ぼす浮力効果，国立公害研究所研究報告，第 17 号，pp.73~88，1980.
  - 26) Launder, B.E. : On the Effects of a Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum, J. Fluid Mech., Vol.67, pp.569~581, 1975.
  - 27) Munk, W.H. and Anderson, E.R. : Notes on a Theory of the Thermocline, J. Marine Res., Vol.7, pp.276~295, 1948.

(1988.11.16・受付)