

下流側水深を有するダム破壊流れフロントの破壊直後での挙動 ——志村理論の拡張——

BEHAVIOR OF A FRONT OF FLOW IMMEDIATELY AFTER BREAKING OF A DAM WITH WATER DOWNSTREAM ——AN EXTENSION OF SHIMURA'S THEORY——

松富英夫*

By Hideo MATSUTOMI

This paper presents an analytical study on the behavior of front of flow immediately after breaking of a dam with water downstream. The basic equations in this problem are derived from the nonlinear shallow water theory, and they are solved numerically. This study stands an extension of Shimura's theory which treats the problem in case without water downstream.

It is confirmed that the qualitative tendency of solution is in satisfactory agreement with laboratory experiments.

The solution needs two initial conditions concerned with the slope and curvature of water surface, and they are induced by comparison between the analytical and experimental trajectories of the front.

Keywords : dam-break flow, unsteady flow, numerical analysis

1. ま え が き

下流側水深がない場合のダム破壊流れフロントの破壊直後での挙動に関する理論的研究例として、志村のものが代表としてある¹⁾。彼の研究は、フロント移動速度が零からだいに大きくなるという、より実際に即したものである。しかし、対象段階が同じで、下流側水深を有する場合の理論的研究例は、著者の知る限り、まだないように思われる。

著者は、下流側水深を有する場合のダム破壊流れの研究を行ってきている²⁾。本研究はその一環で、研究の欠落している流れ段階を埋めるべく、志村理論の拡張を試みたものである。

2. 基礎方程式

初期のダム上・下流は静水とし、その水深比 ($= h_1/h_0$) は、最終的に容易に移動跳水が発生するほど³⁾、十分に大きいとする。粘性は考えない。さらに、対象流れは浅水理論に支配されるとする。このとき、フロントの挙動に関する基礎方程式として、次式群を得る。紙数の都合上、誘導過程の詳細は省略する。

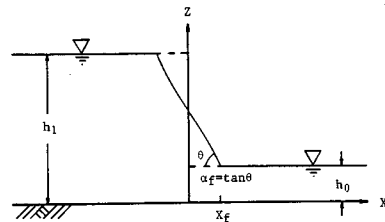


図-1 記号の定義

$$\frac{dh_f}{dt} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dx_f}{dt} = u_f - \frac{h_0}{a_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{du_f}{dt} = g a_f - \frac{h_0}{a_f} \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right)^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{d\alpha_f}{dt} = -2 \alpha_f \frac{\partial u_f}{\partial x} - \frac{h_0}{a_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} + h_0 \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right) = - \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} \right)^2 + g \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} - \frac{h_0}{a_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \alpha_f}{\partial x} \right) = -3 \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} - 3 \alpha_f \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} - \frac{h_0}{a_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha_f}{\partial x^2} + h_0 \frac{\partial^3 u_f}{\partial x^3} \dots\dots\dots (6)$$

* 正会員 工博 秋田大学助手 鉱山学部土木工学科
(〒010 秋田市手形学園町1-1)

ここで、 h ：水深、 u ：断面平均水粒子速度、 $a = -\partial h/\partial x$ ：水面勾配、 g ：重力加速度、 x ：水平距離座標、 t ：時間。また、下添字 f はフロントでの値であることを示す。諸記号の定義を図-1 に示す。

式 (1) は本研究フロントの定義式である。式 (2) は連続式で、フロント位置を規定するものである。式 (3) は運動方程式で、右辺第 1 項は圧力項、第 2 項は移流項である。式 (4) 以下は各高次項の満足すべき式である (完結問題)。上式群において、 $h_0=0$ とすれば、志村の基礎方程式に一致する。ただし、式 (6) は本研究固有のもので、式 (4) に $(\partial a_f/\partial x)$ 項が含まれているため、必要なのである⁴⁾。

本研究では、できるだけ解析的に解くこととし、どうしても解けそうにない段階で (もしかすると、解けるのかもしれないが⁴⁾)、数値的に解くことにする。ただし、志村に倣い、物理過程の主要な特徴に注目して、大胆に解くことにする。本方法の妥当性の検討のため、完全に数値的に解くこともする。

3. 解法と解の適用性

(1) 解 法

図-2 に示すフロントを特徴づける代表的水理量 U 、 L 、 H を導入し、式 (5) の右辺 3 項の大きさの関係を検討する。ここで、 U は水平方向水粒子速度の測度、 L と H はおのおの水平と鉛直方向の長さの測度である。これらを用いると、式 (5) の右辺 3 項のオーダーは、

$$\left(\frac{\partial u_f}{\partial x}\right)^2 \sim \frac{U^2}{L^2}, \quad g \frac{\partial a_f}{\partial x} \sim \frac{gH}{L^2},$$

$$\frac{h_0}{a_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} \sim \frac{h_0 U^2}{HL^2} \dots\dots\dots (7)$$

実際現象を考える。 t が十分に小さいとき、 U (零から出発) は十分に小さく、 H は十分に大きい (水面勾配大より)。一方、 t が十分に大きいとき、 U は t とともに増加し、十分に大きく、 H は t とともに減少し、十分に小さい。

以上より、 (h_1/h_0) が十分に大きい場合を対象としていることをも考慮すると、絶対値として、

$$\frac{h_0}{a_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} < \left(\frac{\partial u_f}{\partial x}\right)^2 \ll g \frac{\partial a_f}{\partial x}$$

(十分に小さな t) \dots\dots\dots (8)

$$g \frac{\partial a_f}{\partial x} \ll \frac{h_0}{a_f} \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} \sim \left(\frac{\partial u_f}{\partial x}\right)^2$$

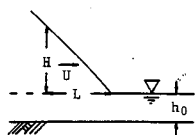


図-2 測度の定義

(十分に大きな t) \dots\dots\dots (9)

が判断される。よって、式 (5) の近似解として、おのおの次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial u_f}{\partial x}\right) = g \Delta a_1 t \quad (\text{十分に小さな } t) \dots\dots\dots (10)$$

$$\left(\frac{\partial u_f}{\partial x}\right) = \frac{1}{t} \quad (\text{十分に大きな } t) \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 Δa_1 は $t = t_1 = 0$ での $(\partial a_f/\partial x)$ である。 t_1 はダム破壊の完了時と考えればよい。式 (10) では、 $t = t_1 = 0$ で $(\partial u_f/\partial x) = 0$ の初期条件、式 (11) では、Ritter の解⁵⁾ や Stoker 理論⁶⁾ 等から類推される、 $(\partial^2 u_f/\partial x^2) = 0$ の条件が用いられている。以下でも、2 階以上の偏微分項はすべて零と近似される。完結問題では、高階微分になればなるほど、無視し得る物理量となるからである。もし、式 (11) の誘導において、2 階の偏微分項を考慮すれば、 $(\partial (\partial u_f/\partial x)^2/\partial x) < 0$ と推定されるので、 t の大きいときの $(\partial u_f/\partial x)$ の時間的減少率は小さくなり、最終的に先端軌跡の直線性が強まり、変曲点 (次節参照) が下流に移動し (式 (3), (2) の順の考察より)、本理論の空間 (時間) 的適用範囲が拡大すると思われる。また、 $(\partial^2 u_f/\partial x^2) = 0$ ならば、 $(\partial^2 a_f/\partial x^2) = 0$ が証明されることも付記しておく。

t の中間領域に対して、関数形を特定することは、本対象流れではやや難しい。式 (5) の右辺に 3 (奇数) 項あること等による。とはいうものの、 t の十分に小さいときと大きいときの両方で、第 3 項目を無視していること等を考えれば、志村と同様な議論ができないわけではない。いずれにせよ、以下の結果に差は生じない。

式 (10), (11) の両方を満足する関数形として、次式が考えられる。

$$\left(\frac{\partial u_f}{\partial x}\right) = \frac{g \Delta a_1 t}{g \Delta a_1 t^2 + 1} \dots\dots\dots (12)$$

これは志村のものと同形である。

式 (12), (6) を用いて、式 (4) を解く。その結果、式 (6) と (4) のおのおのから次式を得る。

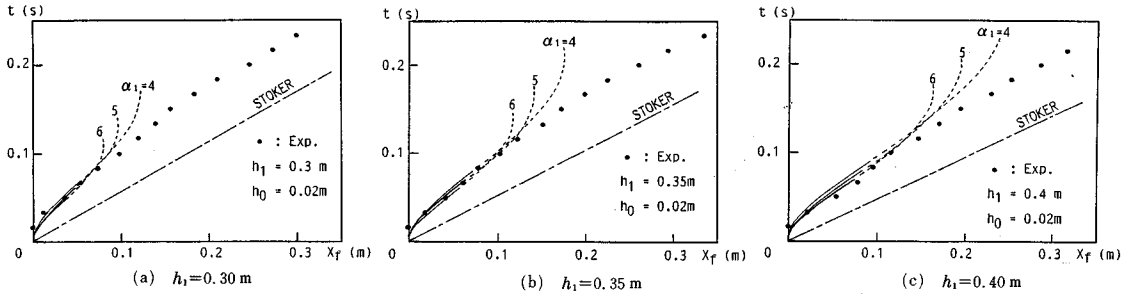
$$\frac{\partial a_f}{\partial x} = \frac{1}{g^{3/2} (\Delta a_1)^{1/2}} \left(t^2 + \frac{1}{g \Delta a_1} \right)^{-3/2} \dots\dots\dots (13)$$

$$a_f^2 = -\frac{2 h_0}{g^{3/2} (\Delta a_1)^{1/2}} \left(t^2 + \frac{1}{g \Delta a_1} \right)^{-3/2}$$

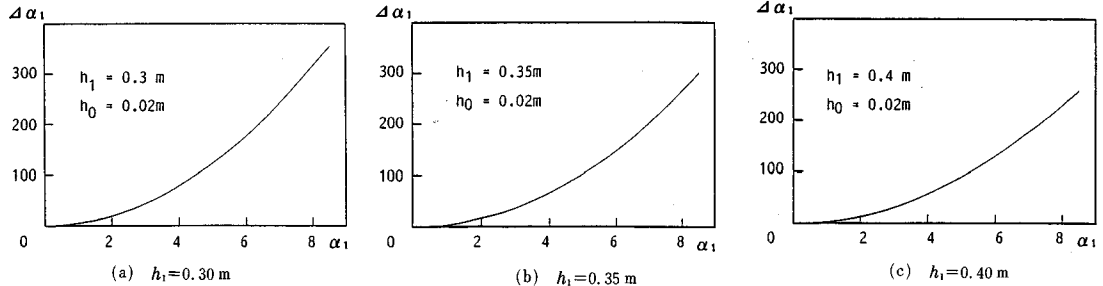
$$+ \frac{a_1^2 + 2 h_0 \Delta a_1}{g^2 (\Delta a_1)^2 |t^2 + 1/(g \Delta a_1)|^2} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $(\partial^2 u_f/\partial x^2) = (\partial^2 a_f/\partial x^2) = 0$ の条件、 $t = t_1 = 0$ で、 $a_f = a_1$ の条件を用いている。式 (13) は、 $t = t_1 = 0$ で、 $(\partial a_f/\partial x) = \Delta a_1$ の初期条件を満足している。

式 (12) と (14) を用いて式 (3) を書き直したものは、一階一次で、変数分離型の常微分方程式であるが、簡単に解けそうにない。もちろん、式 (3) が解けなけ



図—3 フロントの軌跡



図—4 α_1 と $\Delta\alpha_1$ の関係

れば、式 (2) も解けない。よって、以下からは、書き直した式 (3) と (2) を連立させ、4 次の Runge-Kutta 法により数値的に解くことにする。計算での時間刻み幅 Δt として、0.01 s を採用することにする。

本研究は結果的に下流側水深がない場合の $z = h_0$ 点の挙動、つまり、その流れの $z = h_0$ 以浅と初期ダム下流側の水はフロント前方に押しやられるとして、噴流的に解析している。ただし、 α_1 と $\Delta\alpha_1$ の評価に際し h_0 の存在を考慮しているので、その影響を全く取り入れていないわけではない。しかも、以下の理由により、本解析法は第一近似的には妥当と思われる。

基礎方程式から予測されるフロントの1つの挙動は、初め長波として波速 $c_0 (= \sqrt{gh_0})$ で進行し (この期間は本研究で対象としている期間に比べて短い)、その後非線形効果のためフロント背後の水面が切り立ち、段波として進行する、というものである。しかし、それでは、 (h_1/h_0) が大きいときの実験でみられる現象、巻き波型砕波の形成は考えられない²⁾。その形成を可能ならしめるには、噴流的に取り扱う本解析法が、近似であるが、良いと思われる。また、本解析法には、下流側水深がない場合はもちろん、 (h_1/h_0) が十分に大きいとき、十分な精度で、まだ議論されたことのない、経時的・空間的な水面形や運動量変化等が求められるという、多くの利点があることも付記しておく。

(2) 解の適用性

$h_0 = 0.02$ m に固定し、 $h_1 = 0.30, 0.35, 0.40$ m とした 3 ケースのフロント軌跡に関する数値解例 (実線、変

曲点から破線で、適用外) をおのおの図—3 (a), (b), (c) に示す。図中には、Stoker 理論 (一点鎖線) と実験値 (黒丸で、3 回の平均) も示してある。実験装置・実験方法等については、文献 2) か 8) を参照されたい。ただし、正確を期すため、水路底面に 5 cm 間隔の目盛を入れ、ゲート直下流域を上方からクローズ・アップしてビデオ撮影した。ビデオの解析精度から、時間に関して 1/60 秒程度の誤差はあり得る。 α_1 と $\Delta\alpha_1$ の両方をパラメーターとし、種々の組合せが存在する。その諸組合せを図示したものが、おのおの図—4 (a), (b), (c) である。ただし、数値計算での最大流速値 u_{Jmax} が、Stoker 理論より得られる流速値に、一致するようにして決定されている。本計算例の場合、おのおの $u_{Jmax} \approx 1.42, 1.59, 1.75$ m/s である。

本来、 α_1 と $\Delta\alpha_1$ の間には一義の関係式が存在するはずである。しかし、本研究では、最終に近い段階で数値的に方程式系を解いているので、それらの間の陽な関係式は得られない。フロント軌跡に関する数値解と実験値の比較等により、両者の関係を帰納的に特定することができるであろう。

図より、実験でのフロント速度も、数値解と同様、零からしだいに一定値に漸近していることがみてとれる。ただし、その後一度、実験値は Stoker の理論値よりも大きくなり、再び小さくなることを付け加えておく。同じ現象は文献 8) の図—11 にもみられる。

本計算例の場合、 $h_1 = 0.30$ m のとき、 $\alpha_1 \approx 5.0$ 、 $\Delta\alpha_1 \approx 122$ と推定された。 $h_1 = 0.35$ と 0.40 m の場合も検討

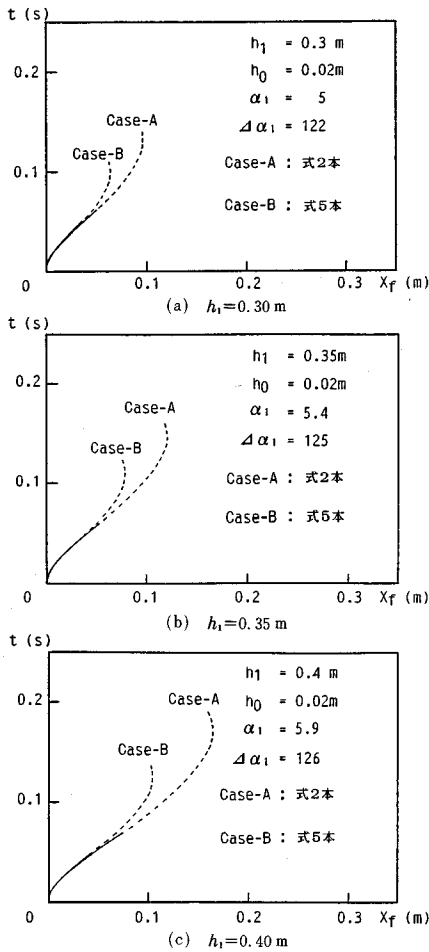


図-5 フロント軌跡の比較

表-1 α_1 と $\Delta\alpha_1$ の値

h_1 (m)	α_1	$\Delta\alpha_1$ (m ⁻¹)
0.30	5.0	122
0.35	5.4	125
0.40	5.9	126

を行った。これらの結果をまとめて表-1に示す。 h_1 (または、 h_1/h_0) が大きくなるにつれて、 α_1 は増加傾向、 $\Delta\alpha_1$ はほぼ一定かやや増加傾向にあることが判断される。ちなみに、 α_1 のこの傾向は、 $h_0 = 0$ の場合と同じ傾向で、値も整合的 ($h_1 = 0.22 \text{ m}$ のとき、 $\alpha_1 = 3.3$) である¹⁾。

前節の解法の妥当性の検討のため、式(2)~(6)までの5本の式を用いて、数値的に解いてみた。ただし、式2本の場合(前節の方法)と同様の初期条件(表-1)を採用した。フロント軌跡に関するその結果(Case-B)を、おのおの図-5(a), (b), (c)に示す。図中には、比較のため、式2本の場合の結果(Case-A)も示してある。これらの図によると、変曲点(適用範囲)まで、

両者は非常に良く一致している。前節の解法が妥当であったといえよう。厳密にみると、式2本の場合より、適用範囲が狭めで、値も小さめである。この主な理由は、式(5)の近似解である式(12)が、式(5)より小さめの値を与えるためであることを確かめた。

4. むすび

まだ研究例のない、下流側水深を有するダム破壊流れフロントの破壊直後での挙動に関して、理論的検討を行った。本研究で得られた主な結論は次のとおりである。

- (1) 下流側水深を有するダム破壊流れフロントの破壊直後での挙動に関する基礎方程式を誘導した。
- (2) その基礎方程式(高次項は無視)を、解析的に解けるかもしれないが、簡単に解けそうになかったので(極力、解くことを試みた)、数値的に解き、解例を示した。実験値との比較・検討により、解の定性的傾向(または、基礎方程式)は妥当であることも確認した。
- (3) 基礎方程式(高次項は無視)を完全に数値的に解き、それとの比較・検討により、本研究の近似解法が妥当であることも確認した。
- (4) h_1 (または、 h_1/h_0) が大きくなるにつれて、 α_1 は増加、 $\Delta\alpha_1$ はほぼ一定かやや増加傾向にある。

謝 辞：本研究を遂行するにあたり、東北大学工学部 首藤伸夫教授より有益なるご意見、ご助言等を賜った。ここに記して先生に深甚なる感謝の意を表す。また、数値解析や実験等に助力頂いた本学卒業生 大口寿文君(現・新潟県庁)にも感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) 志村博康：前方水位のない Dam Break Wave のフロントの非粘性解，農業土木学会論文集，第60号，pp.33~39，1975。
- 2) 松富英夫：下流側水深を有する場合のダム破壊流れについて，土木学会論文集，No.363，pp.79~86，1985。
- 3) 松富英夫：移動跳水(波状段波非)発生条件の検討，第33回水講論文集，pp.271~276，1989。
- 4) 島田正志：ゲートの開放に伴う不定流の基礎的研究，東京大学博士論文，p.189，1978。
- 5) Ritter, A. : Die Fortpflanzung der Wasserwellen, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure (Berlin), Vol.36, pt.2, No.33, pp.947~954, 1892.
- 6) Stoker, J.J. : Water Waves, Interscience Publishers, Inc., New York, p.567, 1957.
- 7) 松富英夫，ほか：ゲート急開による一様勾配斜面上の段波の伝播について，秋田大学鉱山学部研究報告，第5号，pp.109~116，1984。
- 8) 松富英夫：下流側水深を有するダム破壊流れ先端部の水面形，土木学会論文集，No.375，pp.161~170，1986。

(1989.2.15・受付)