

境界要素法による非線形回折波力の一解析法

A BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS FOR NONLINEAR-WAVE
DIFFRACTION AROUND LARGE STRUCTURE

大山 巧*

By Takumi OHYAMA

A boundary element method using nonlinear potential theory has been developed for analyzing wave diffraction around large structure. To confirm the validity of the proposed method, the numerical results for solitary wave propagating through a three-dimensional wave channel are compared with analytical solutions in terms of wave profile and hydrodynamic pressure. The comparison shows excellent agreement regardless of H_0/h (H_0 : wave height, h : water depth). Furthermore, nonlinear effects on wave loads exerted by solitary wave on a vertical cylinder are investigated by comparing the numerical results with first approximations given by Isaacson. The first approximations for horizontal force, overturning moment and wave run-up are appropriate with H_0/h being 0.1. It is, however, found that the first approximations for overturning moment are underestimated remarkably with H_0/h being 0.4.

Keywords: boundary element method, nonlinear surface wave, wave diffraction, wave force

1. はじめに

近年、沿岸域の有効利用を目的とした構想が数多く提案されており、これに伴って海上ホテルやヘリポート等の比較的大型の構造物の建造が沿岸域でも計画されるようになった。これらの構造物を設計するうえで、来襲波に対する安定性の検討は必要不可欠であり、そのためには波力や波の打ち上げ高さを的確に予測しておくことが重要な課題になる。一般に、海洋構造物に与えられる設計波の波浪条件は、微小振幅波の適用範囲を越えている場合が多く、波力や波の打ち上げ高さを的確に評価するためには、波の非線形性を考慮した解析法の確立が望まれる。また上記のような孤立構造物では、構造物による波の回折を無視できなくなるため、防波堤等の延長の長い構造物に対してなされてきた二次元断面での検討結果を直接適用することはできない。

波の非線形性を考慮した回折波力に関する理論的研究は、主にストークス波の摂動解を用いてなされており、特に円柱に作用する第2次回折波力については解析解の導出が数多く試みられてきた。しかし、自由表面における非線形境界条件を厳密に満足する解を得ることは難し

く、この意味から Chakrabarti¹⁾、山口・土屋²⁾、Raman and Venkatanarasiah³⁾によって導かれた解がいずれも問題があることは、すでに数多くの論文により指摘されている⁴⁾。しかし1980年代に至り、ようやく第2次の自由表面条件を満足する解が導かれた。その主なものとして、Hunt and Baddor⁵⁾の深海域での解、Rahman⁶⁾、喜岡⁷⁾による有限水深下での解が挙げられる。ただし、有限振幅波理論の適用範囲を考えてみると、ストークス波の第2次近似解が有効とみなせる場合はかなり限られると考えられ、特に水深が浅く波高が大きい場合にはストークス波理論自体が適用範囲外になる。また、クノイド波領域の回折波力に関する研究は、ストークス波領域に比べて数少なく、Isaacson^{8),9)}が孤立波およびクノイド波の第1次近似解を用いて円柱に作用する回折波力を解析的に求めたにすぎない。このような摂動法を用いた解析を進展させることにより、非線形性の影響が強い場合やストークス波領域とクノイド波領域の境界付近で回折波力を求めるためには、さらに高い次数に対する展開が必要になる。しかし、その場合かなりの数学的な複雑さと困難さを伴い、また膨大な計算労力が必要となることから、摂動法を用いた解析は必ずしも有効な手段とはいえない。

一方、摂動展開を用いず自由表面での非線形境界条

* 正会員 清水建設(株)技術研究所環境技術研究部
(〒135 江東区越中島3-4-17)

件を直接取り込んだ手法として、境界積分方程式を用いた解析法が、Isaacson¹⁰⁾、喜岡¹¹⁾により提案されている。これらの方法では、流体運動を時間ステップで追跡するため、周期性の波動場を取り扱いにくいという問題はあつたものの、摂動法のように適用範囲が級数の収束半径に制限されることなく、また砕波限界付近の非線形性の強い波に対しても適用できる。ただし Isaacson の手法では、逐次計算を行う際の自由表面でのポテンシャルの評価方法に問題があり¹²⁾、また喜岡の解析では、初期条件として構造物の存在を無視した微小振幅正弦波を与えていること、波の反射側と透過側の境界面で空間的な周期性を仮定していることから、解析結果には問題があると考えられる。

本研究は、著者¹²⁾⁻¹⁴⁾がすでに提案した境界積分方程式を用いた二次元非線形波動場の解析法を三次元に拡張し、回折波力と波のはり上がり高さに及ぼす波の非線形性の影響を検討するものである。この解析法は、造波境界から発生された波の変形を逐次計算により追跡するものであり、実験水槽における波の変形をそのまま数値的にシミュレートすることに対応する。本論文では、まず基礎理論とその定式化について述べたあと、有限な幅をもつ三次元一定水深水路中に発生した孤立波の波形と波圧に関する解析解との比較から解析法の妥当性を示す。そして、本解析法を用いて円柱に作用する孤立波の回折波力と波の打ち上げ高さを計算し、それらを Isaacson⁹⁾ の第 1 次近似解と比較することにより、Isaacson の解の適用性と波の非線形性の影響について論じる。

2. 基礎方程式と境界条件

図-1 に示すように、直立壁面 S_{w1} , S_{w2} , S_{w3} で囲まれた水深 h の海域に任意形状の構造物があり、造波境界 S_c から発生した波が構造物により回折するものとする。ただし、壁面境界 S_{w1} , S_{w2} , S_{w3} からの反射波が

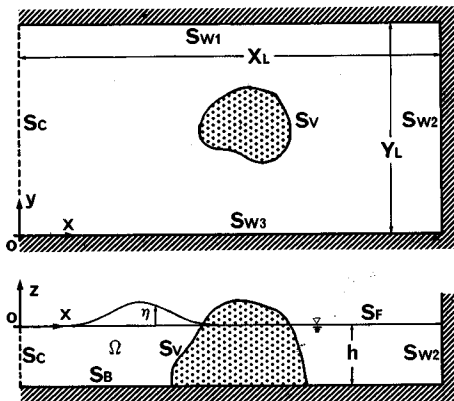


図-1 座標系と記号の定義

構造物に到達する前の状態までを解析の対象とする。なお、壁面境界の代わりに開境界（無反射境界）を設定すれば、解析領域を相対的に狭くすることができ、計算時間と計算機容量が短縮されるものと思われる。このような開境界処理については、Orlansky 型¹⁵⁾の境界条件を課す方法のほかさまざまな方法が提案されているが¹⁶⁾、三次元非線形波動場に適用できる方法はまだ確立されていないと思われる。したがって、ここでは開境界処理は行わず、最も簡単で物理現象が明確な境界条件が課される不透過壁面を構造物から十分離れた位置に設定することにした。また、本論文では一定水深海域を対象としているが、海底面を構造物表面と同様に取り扱うことにより、海底地形の影響は容易に考慮できる。流体を非圧縮、非粘性流体、流体運動を非回転と仮定し、速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ により流体運動を記述する。このとき ϕ は、以下に示す基礎方程式と境界条件を満足する解として求められる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi_n = -\phi_z = 0 \quad (\text{on } S_b) \dots\dots\dots (2)$$

$$\phi_n = 0 \quad (\text{on } S_{w1}, S_{w2}, S_{w3}) \dots\dots\dots (3)$$

$$\phi_n = 0 \quad (\text{on } S_v) \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi_n = -\phi_x = -U \quad (\text{on } S_c) \dots\dots\dots (5)$$

$$\phi_n = n_z \eta_t \quad (\text{on } S_f) \dots\dots\dots (6)$$

$$\phi_t + (\nabla \phi)^2 / 2 + g\eta = 0 \quad (\text{on } S_f) \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 ∇ はラプラシアン、 n は流体領域 Ω を取り囲む境界面での法線方向 (Ω からみたととき外向き)、 $\eta(x, y, t)$ は鉛直上向きを正としたときの平均水面からの水面変動量、 n_z は、水面上に立てた単位法線ベクトル n の z 成分、 $U(z, t)$ は造波境界で発生する波の水平水粒子速度である。また、 ϕ, η に関する n, x, z 等の添字は、それぞれによる偏微分を表わしている。式 (1) は連続方程式、式 (2)~(4) は海底面、直立壁面、構造物表面での不透過条件、式 (5) は造波境界での運動学的条件、式 (6), (7) は自由表面での運動学的条件、力学的条件 (圧力方程式) を表わしている。ここで、式 (7) における $(\nabla \phi)^2$ は水粒子速度の 2 乗であり、図-2 に示すような境界面上で定義される局所直交座標系 (n, X, Y) を用いると次のように表わせる。

$$(\nabla \phi)^2 = (\phi_n)^2 + (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \dots\dots\dots (8)$$

ただし (X, Y) は、水面上の点に接し法線ベクトル n に

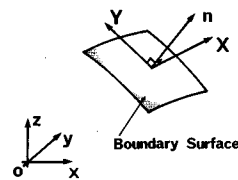


図-2 局所座標系の定義

直交する平面で定義される直交座標系（方向は任意）である。式（6），（8）より，式（7）は以下のように書き換えられる。

$$\phi_t + (1/2) |n_z^2(\eta)^2 + (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2| + g\eta = 0 \quad (\text{on } S_F) \quad \dots\dots\dots(9)$$

3. 境界積分方程式とその離散化

(1) 境界積分方程式

流体領域 Ω に三次元のグリーン公式を適用すると， Ω を取り囲む境界面 S 上の任意の点 $P(x_p, y_p, z_p)$ における速度ポテンシャル $\phi(P)$ は次のように与えられる。

$$\phi(P) = -\frac{1}{\alpha(P)} \int_S \{ \phi(Q)G_n - \phi_n(Q)G \} ds_Q \quad (P, Q \in S) \quad \dots\dots\dots(10)$$

ただし， $Q(x_q, y_q, z_q)$ は S 上の点， $G(P, Q)$ はグリーン関数， $\alpha(P)$ は点 P での境界面の幾何学的形状から決まる係数である。グリーン関数 G は一義的に決まるものではなく，どの境界条件を満足させるかにより異なる。本解析法では，直立壁面 S_{w1} ， S_{w2} および海底面 S_b での不透過条件 $G_n=0$ を満足する関数として， G を以下のように与えている。

$$G(P, Q) = \frac{1}{r_0} + \sum_{n=1}^7 \frac{1}{r_n} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \sqrt{(C_x)^2 + (C_y)^2 + (C_z)^2} \\ r_1 &= \sqrt{(C_x)^2 + (C_y)^2 + (D_z)^2} \\ r_2 &= \sqrt{(C_x)^2 + (D_y)^2 + (C_z)^2} \\ r_3 &= \sqrt{(C_x)^2 + (D_y)^2 + (D_z)^2} \\ r_4 &= \sqrt{(D_x)^2 + (C_y)^2 + (C_z)^2} \\ r_5 &= \sqrt{(D_x)^2 + (C_y)^2 + (D_z)^2} \\ r_6 &= \sqrt{(D_x)^2 + (D_y)^2 + (C_z)^2} \\ r_7 &= \sqrt{(D_x)^2 + (D_y)^2 + (D_z)^2} \\ C_x &= x_p - x_q, \quad D_x = x_p + x_q - 2X_L \\ C_y &= y_p - y_q, \quad D_y = y_p + y_q - 2Y_L \\ C_z &= z_p - z_q, \quad D_z = z_p + z_q + 2h \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ただし， X_L, Y_L は図-1に示すように流体領域の x, y 方向の長さであり， $y = Y_L, x = X_L$ がそれぞれ S_{w1} ， S_{w2} の平面の方程式に相当する。式（11）は三次元ラプラス方程式の主要解を用いた鏡像法により容易に導かれる。ここで，さらに直立壁面 S_{w2} での不透過条件を満足するように G を求めることも可能であるが， S_{w1} と S_{w2} が平行境界になるため， G は無限積分あるいは無限級数により表わされることになる¹⁷⁾。したがって後に述べる数値解析において， S_{w2} 上に節点を配置する必要がなくなるもののグリーン関数の計算が煩雑になり結果的に多大な計算時間を要することになる。

式（10）の係数 $\alpha(P)$ は，一様ポテンシャル場 ($\phi =$

一定， $\phi_n=0$ (on S)) に式（10）を適用することにより，以下のように求められる¹⁸⁾。

$$\alpha(P) = - \int_{S_F \cup S_{V1} \cup S_{C1} \cup S_{W3}} G_n ds_Q \quad \dots\dots\dots(13)$$

式（10）に圧力方程式（9）以外の境界条件式（2）～（6）を代入し， $G_n=0$ (on S_{w1}, S_{w2}, S_b) を考慮すると，次式が導かれる。

$$\alpha(P)\phi(P) + \int_{S_F \cup S_{V1} \cup S_{C1} \cup S_{W3}} \phi G_n ds - \int_{S_F} G n_z \eta ds + \int_{S_C} G U ds = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

また式（9）に関しては，重みつき残差法を適用する。式（9）の両辺に重み関数 ω をかけ， S_F 上で積分することにより以下の積分方程式を得る。

$$\int_{S_F} \omega \left[\phi_t + \frac{1}{2} |n_z^2(\eta)^2 + (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2| + g\eta \right] ds = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

(2) 積分方程式の離散化

式（14），（15）に示される積分方程式の空間的な離散化にあたっては，三角形要素を用いる。要素番号は， S_F, S_C, S_V, S_{W3} の順につけていき，それぞれの境界面における要素分割数を M_F, M_C, M_V, M_W とする。図-3に示すように， J 番目要素内で局所座標系 (X, Y) を定義し，要素を構成する節点の番号を $j1, j2, j3$ とおく。そして， J 番目要素内の任意の点 R における諸量の値を節点値を用いて以下のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= N_j^T \phi_j, & \phi_j^T &= (\phi_{j1} \ \phi_{j2} \ \phi_{j3}) \\ \phi_t &= N_j^T (\phi_t)_j, & (\phi_t)_j^T &= ((\phi_t)_{j1} \ (\phi_t)_{j2} \ (\phi_t)_{j3}) \\ \eta &= N_j^T \eta_j, & \eta_j^T &= (\eta_{j1} \ \eta_{j2} \ \eta_{j3}) \\ \eta_t &= N_j^T (\eta_t)_j, & (\eta_t)_j^T &= ((\eta_t)_{j1} \ (\eta_t)_{j2} \ (\eta_t)_{j3}) \\ U &= N_j^T U_j, & U_j^T &= (U_{j1} \ U_{j2} \ U_{j3}) \\ \omega &= N_j^T \omega_j, & \omega_j^T &= (\omega_{j1} \ \omega_{j2} \ \omega_{j3}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ただし肩文字の T はベクトルの転置を表わす。式（16）における N_j は内挿関数ベクトルであり，線形分布（平面的な分布）を仮定するときは，以下のように与えられる。

$$N_j^T = (S_{j1} \ S_{j2} \ S_{j3}) / S_j \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここで， S_j は J 番目要素の面積， S_{j1}, S_{j2}, S_{j3} は図-3に示すとおりで，たとえば S_{j1} は点 R と $j2, j3$ 番目の節点からなる三角形の面積を表わす。

式（16）を式（14）に代入し，点 P を i 番目節点に

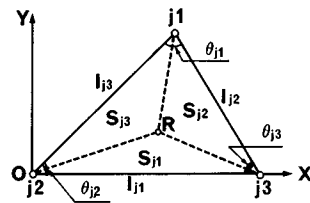


図-3 J 番目要素内の記号の定義

一致させることにより次式を得る。

$$\alpha_i \phi_i + \sum_{j=1}^M A_{ij}^T \phi_j - \sum_{j=1}^{M_F} (n_{zj})_j B_{ij}^T(\eta_j)_j + \sum_{j=M_F+1}^{M_F+M_C} B_{ij}^T U_j = 0 \quad (i=1 \sim N) \dots\dots\dots(18)$$

$$A_{ij} = \int_{S_j} N_j G_n ds, \quad B_{ij} = \int_{S_j} N_j G ds \dots\dots\dots(19)$$

ただし、 M は全要素数 ($=M_F + M_C + M_V + M_W$)、 N は全節点数である。式 (19) の積分は、Webster¹⁹⁾ により解析的に求められているが、これを用いて全要素に対する計算を行うためには多大な計算ステップ数を必要とする。そこで本解析法では、特異点 ($i=j1$ or $j2$ or $j3$) のみ式 (19) を用いることにし、それ以外では要素内の諸量の分布は考慮せず、要素の重心における値を代表値とした一定要素で近似する。このとき、式 (19) は以下のように表わせる。

$$A_{ij} \approx \frac{S_j}{3} (G_n)_j E, \quad B_{ij} \approx \frac{S_j}{3} G_j E \quad (i \neq j1, j2, j3) \dots\dots\dots(20)$$

$$E^T = (1 \ 1 \ 1) \dots\dots\dots(21)$$

ただし G_j , $(G_n)_j$ は、式 (12) の (x_q, y_q, z_q) として J 番目要素の重心の座標を用いたときの値を表わす。式 (19) の代わりに式 (20) を用いて同程度の精度を得るためには、要素分割数を若干増やす必要があると思われるが、結果として計算時間は大幅に短縮される。なお Kioka²⁰⁾ は三角形要素を用いた際のグリーン関数を含む要素内積分の計算精度について若干の検討を行っている。

一方、式 (15) に式 (16) を代入すると次式を得る。

$$\sum_{j=1}^{M_F} \omega_j^T \left[\int_{S_j} N_j N_j^T ds (\phi_n)_j + \frac{(n_{zj})_j^2}{2} \int_{S_j} N_j N_j^T (\eta_n)_j N_j^T ds (\eta_n)_j + \frac{1}{2} \{ (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \}_j \int_{S_j} N_j ds + g \int_{S_j} N_j N_j^T ds (\eta_n)_j \right] = 0 \dots\dots\dots(22)$$

ただし、 n_z および $\{ (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \}_j$ は、 η と ϕ が要素内で平面的に分布するという仮定に対応して、要素内で一定とみなしている。このとき $\{ (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \}_j$ は、 ϕ の節点値を用いて次のように表わすことができる。

$$\{ (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \}_j = \frac{1}{4 S_j^2} \{ l_{j1}^2 \phi_{j1}^2 + l_{j2}^2 \phi_{j2}^2 + l_{j3}^2 \phi_{j3}^2 \} - \frac{1}{S_j} \left[\frac{\phi_{j1} \phi_{j2}}{\tan \theta_{j3}} + \frac{\phi_{j2} \phi_{j3}}{\tan \theta_{j1}} + \frac{\phi_{j3} \phi_{j1}}{\tan \theta_{j2}} \right] \dots\dots\dots(23)$$

ただし $l_{j1} \sim l_{j3}$, $\theta_{j1} \sim \theta_{j3}$ は、図-3 に示すとおりである。式 (22) に式 (17) を代入して式中の積分を行い、これを以下のように整理する。

$$\sum_{j=1}^{N_F} \gamma_j \omega_j = 0 \dots\dots\dots(24)$$

ただし、 N_F は自由表面の節点数である。式 (24) が任意の重み関数について成り立つためには、次式を満足す

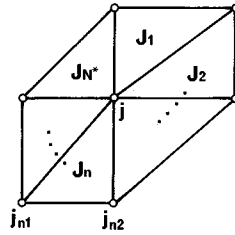


図-4 j 番目節点を取り囲む要素

る必要がある。

$$\gamma_j = 0 \quad (j=1 \sim N_F) \dots\dots\dots(25)$$

図-4 に示すように、 j 番目節点を取り囲む要素の番号を J_n ($n=1 \sim N^*$) とすると、 γ_j は次のように表わせる。

$$\gamma_j = \sum_{n=1}^{N^*} [a_{jn} \{ 2(\phi_{lj})_j + (\phi_{lj})_{j1} + (\phi_{lj})_{j2} + g(2\eta_j + \eta_{j1} + \eta_{j2}) \} + b_{jn} \{ 3(\eta_j)^2 + (\eta_{lj})_{j1}^2 + (\eta_{lj})_{j2}^2 + 2(\eta_j)_j (\eta_{lj})_{j1} + 2(\eta_j)_j (\eta_{lj})_{j2} + (\eta_{lj})_{j1} (\eta_{lj})_{j2} \} + c_{jn} \{ (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \}_{jn}] \dots\dots\dots(26)$$

$$a_{jn} = \frac{S_{jn}}{12}, \quad b_{jn} = \frac{S_{jn}(n_z)_{jn}^2}{60}, \quad c_{jn} = \frac{S_{jn}}{6} \dots\dots\dots(27)$$

ただし j_{n1} , j_{n2} は、 J_n 番目要素を構成する j 番目節点以外の節点の番号を表わす。

4. 逐次計算法

式 (18), (25) を各時間ステップで連立して解くことにより、流体運動が追跡できる。本解析法では、二次元の解析法と同様な手順で、単位時間ステップ当たりの η , ϕ の増分 $\Delta\eta$, $\Delta\phi$ に関する連立方程式を導く。すなわち、まず j 番目節点の時間ステップ n における η , ϕ , η_t , ϕ_t を $\eta_j^{(n)}$, $\phi_j^{(n)}$, $(\eta_t)_j^{(n)}$, $(\phi_t)_j^{(n)}$ と表わし、これらを 1 ステップ前のまわりでテイラー展開する。そして、 $n-1$ ステップから n ステップまでの増分 $\Delta\eta_j^{(n)}$, $\Delta\phi_j^{(n)}$ および時間増分量 Δt によりこれらを表わすと以下のようになる¹³⁾。

$$\eta_j^{(n)} = \eta_j^{(n-1)} + \Delta\eta_j^{(n)} \quad (j=1 \sim N_F) \dots\dots\dots(28)$$

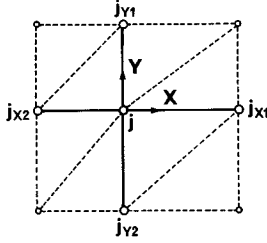
$$(\eta_t)_j^{(n)} = \frac{2 \Delta\eta_j^{(n)}}{\Delta t} - (\eta_t)_j^{(n-1)} \quad (j=1 \sim N_F) \dots\dots\dots(29)$$

$$\phi_j^{(n)} = \phi_j^{(n-1)} + \Delta\phi_j^{(n)} \quad (j=1 \sim N) \dots\dots\dots(30)$$

$$(\phi_t)_j^{(n)} = \frac{2 \Delta\phi_j^{(n)}}{\Delta t} - (\phi_t)_j^{(n-1)} - \frac{2 \Delta\eta_j^{(n)}}{\Delta t} (\phi_z)_j^{(n-1)} - (\eta_t)_j^{(n-1)} \Delta(\phi_z)_j^{(n)} \quad (j=1 \sim N_F) \dots\dots\dots(31)$$

$$\Delta(\phi_z)_j^{(n)} = (\phi_z)_j^{(n)} - (\phi_z)_j^{(n-1)} \dots\dots\dots(32)$$

ただし、自由表面上の節点は鉛直方向に変動するものと考えている。式 (31) の右辺第 3, 4 項は、Isaacson¹⁰⁾ の解析では考慮されていない、自由表面上節点の空間的な変動量に対応した非線形項である。大山¹²⁾ は、孤立波の伝播波形に関する二次元解析の結果から、これらの項を考慮することにより解析精度が高められることを示し



図—5 $(\partial\phi/\partial z)_j$ の算定に用いる節点

ている。式 (28)~(31) を式 (18), (25) に代入することにより、 $\Delta\eta_j^{(n)}$ ($j=1\sim N_f$)、 $\Delta\phi_j^{(n)}$ ($j=1\sim N$) に関する $N+N_f$ 本の連立一次方程式を導き、これを各時間ステップで解く。なお、 $\Delta\eta_j^{(n)}$ が未知数として取り込まれている関係で、式 (18), (24) に含まれる境界形状に依存した係数を直接求めることはできない。ただし大山¹²⁾ は、1ステップ前の境界形状を初期値として、形状が収束するまで同一時間ステップで計算を繰り返すことにより、十分な精度で解が得られることを二次元解析で確かめたので、本解析法でも同様な方法を用いることにした。また、式 (32) に示される $(\phi_2)_j^{(n)}$ についても、1ステップ前の値を初期値として同じ繰り返し計算において求める¹³⁾。ここで、 ϕ_z の評価方法について示す。自由表面の運動学的条件式 (6) から、 ϕ_z は以下のように表わせる。

$$\phi_z = \eta_t + \phi_x \eta_{tx} + \phi_y \eta_{ty} \dots \dots \dots (33)$$

ここで η_t は、式 (29) から直接求められる。本解析法では、自由表面上の要素分割を行う際、直立壁面、構造物表面との交線を除く自由表面上の節点の近傍には、図—5 に示すように、 x, y 方向にそれぞれ 2 個の節点 (内挿点ではない) が配置されるようにする。式 (33) の右辺第 2, 3 項は、これらの節点を含めた合計 5 個の節点における η と ϕ の値から差分法により計算できる。また、直立壁面、構造物表面では不透過条件 $\phi_n=0$ が成り立つことから、これらの面との交線上の節点では、交線が滑らかに連続する場合は $\phi_z = \eta_t + \phi_s \eta_s$ (s は交線の接線方向) として、不連続の場合 (角を有する場合は) $\phi_z = \eta_t$ として評価する。

5. 波圧および波力の算定

構造物表面上の圧力 p は、圧力方程式により以下のように与えられる。

$$p = -\rho \{ \phi_t + (1/2)(\nabla\phi)^2 + gz \} \dots \dots \dots (34)$$

ただし、 ρ は流体密度である。また、波力ベクトル F およびモーメントベクトル M は p を用いて以下のように表わせる。

$$\begin{aligned} F^T &= (F_x \ F_y \ F_z) = \int_{S_v} p n^T ds \\ M^T &= (M_x \ M_y \ M_z) = \int_{S_v} p m^T ds \end{aligned} \dots \dots \dots (35)$$

$$n^T = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}, \quad m^T = \begin{pmatrix} (y-y_0)n_z - (z-z_0)n_y \\ (z-z_0)n_x - (x-x_0)n_z \\ (x-x_0)n_y - (y-y_0)n_x \end{pmatrix} \dots \dots \dots (36)$$

ただし、 F_x, F_y, F_z は x, y, z 方向の波力、 M_x, M_y, M_z は回転の中心 (x_0, y_0, z_0) を通り x 軸、 y 軸、 z 軸に平行な軸回りのモーメント、 n_x, n_y, n_z は構造物表面上に立てた法線ベクトル n の x, y, z 成分である。構造物表面上の要素内で、 p を一定と仮定すると、式 (35) は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} F &= \sum_{j=M_f+M_c+1}^{M_f+M_c+M_v} (p_c)_j n_j S_j \\ M &= \sum_{j=M_f+M_c+1}^{M_f+M_c+M_v} (p_c)_j m_j S_j \end{aligned} \dots \dots \dots (37)$$

ただし、 $(p_c)_j$ は J 番目要素の重心における圧力を表わしており、圧力方程式 (34) から算定できる。また、式 (37) における m_j の算定には、式 (36) の (x, y, z) として要素重心の座標 $((x_c)_j, (y_c)_j, (z_c)_j)$ を用いている。ここで、構造物表面では不透過条件が成り立つことから、 $(\nabla\phi)^2$ は $\{(\phi_x)^2 + (\phi_y)^2\}$ と等価であり、 $(p_c)_j$ は結局以下のように求められる。

$$\begin{aligned} (p_c)_j &= -\rho \{ (1/3) \{ (\phi_x)_{j1} + (\phi_x)_{j2} + (\phi_x)_{j3} \} \\ &\quad + (1/2) \{ (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \}_j + g(z_c)_j \} \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

上式中 $\{(\phi_x)^2 + (\phi_y)^2\}_j$ は、式 (23) により算定できる。ここで構造物表面上の節点は、節点間の鉛直距離が等しくなるように、自由表面との交線上の節点変動とともに各時間ステップで鉛直に変動させる。そこで、式 (38) における $(\phi_x)_j^{(n)}$ は、同じ位置 ($z = z_j^{(n)} = z_j^{(n-1)}$) での $n-1$ ステップの値を用いて以下のように求める。

$$(\phi_x)_j^{(n)} = \frac{2(\phi_j^{(n)} - \phi_j^{(n-1)})}{\Delta t} - (\phi_x)_j^{(n-1)} \dots \dots \dots (39)$$

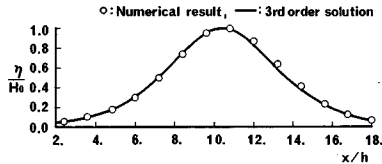
ただし $\phi_j^{(n-1)}, (\phi_x)_j^{(n-1)}$ は、 j 番目節点の値と鉛直方向に隣りあう節点の値から線形内挿する。

6. 一定水深水路を用いた基礎的検討

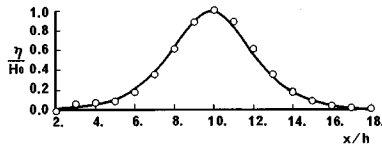
本解析法の妥当性を検証するために、三次元の一定水深水路中に孤立波を発生させ、空間波形と水路側面での波圧に関する解析解との比較を行った。ただし、孤立波の波高水深比 H_0/h は 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 の 4 通りとした。ここで、初期状態 ($t=0$) は静水状態 ($\phi = \eta = 0$) とし、各時間ステップで与える S_c 上の水平水粒子速度 U には Fenton²¹⁾ の孤立波の第 3 次近似解を用いた。空間的な離散化パラメータ Δl ($=\Delta x = \Delta y, \Delta x, \Delta y: x, y$ 方向の節点間の水平距離) および時間増分 Δt の設定

表一 計算条件

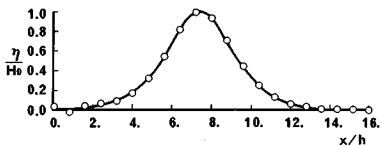
H_0/h	X_L/h	$\Delta l/h$	$\Delta t \sqrt{g/H}$
0.1	24.0	1.2	0.9
0.2	20.0	1.0	0.6
0.3	16.0	0.8	0.5
0.4	14.0	0.7	0.4



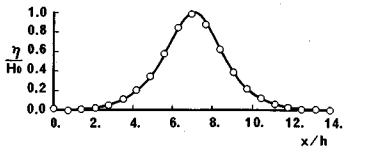
(a) $H_0/h=0.1$



(b) $H_0/h=0.2$



(c) $H_0/h=0.3$

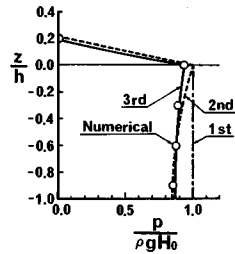


(d) $H_0/h=0.4$

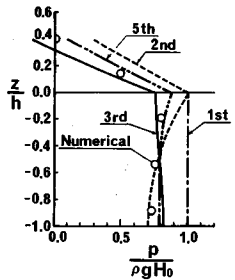
図一六 孤立波の空間波形に関する解析解との比較

には、二次元解析の検討結果¹³⁾をそのまま用い、水路の幅 Y_L は $Y_L=3\Delta l$ とした。また、造波境界 S_c と直立壁面 S_{w3} における鉛直方向の要素分割数は4で一定とした。表一に計算条件を示す。

図一六は、水路側面に沿った面 ($y=Y_L$) における空間波形に関して、本解析結果を Fenton の第3次近似解と比較したものである。図中、実線が近似解、○印が本解析結果を表わす。大山¹²⁾は二次元解析の結果から、波高水深比が0.4程度になると、波の非線形性を的確に評価するか否かが解析精度に顕著な影響を及ぼすことを明らかにしている。図一六に示すように、本解析結果と第3次近似解の一致は、波高水深比にかかわらずいずれもきわめて良好である。また、本解析法ではグリーンの定理から導かれる積分方程式を離散化の際、特異点以外では一定要素を用いているが、線形要素を用いた二次元解析の場合と同程度に離散化パラメーターを設定して



(a) $H_0/h=0.2$



(b) $H_0/h=0.4$

図一七 孤立波の峰での波圧分布に関する解析解との比較

も、十分妥当な結果が得られるのがわかる。したがって、積分方程式の離散化の際に用いる内挿関数の選択が解析精度に及ぼす影響は、実用上無視できる程度であると考えられる。

図一七は、孤立波の峰における波圧の鉛直分布について、本解析結果を Fenton の近似解と比較したものである。ただし本解析結果は、波の峰における直立壁面 S_{w3} での波圧を示したものである。波高水深比 H_0/h が0.2では第2次近似解と第3次近似解の差はほとんどなく、本解析結果はこれらに良く一致している。これに対して $H_0/h=0.4$ の場合には、 $H_0/h=0.2$ の場合に比べて各近似解の差は顕著になり、第5次まで展開次数を増やしても水面上の圧力は0にならない。このため、厳密には、これら近似解との比較から解析結果の精度を論じることができない。ただし、静水面よりも下の部分では第3次近似解と第5次近似解との差は小さく、本解析結果はこれらとほぼ一致していることから実用的には妥当であると考えられる。

7. 円柱に作用する孤立波の波力と波の打ち上げ

Isaacson⁸⁾は、円柱による孤立波の回折と作用波力を解析的に求めている。これによれば、波力係数 C_F ($= (F_x)_{\max} / \rho g H_0 a h$, $(F_x)_{\max}$: 最大水平波力, a : 円柱の半径) とモーメント係数 C_M ($= (M_y)_{\max} / \rho g H_0 a h^2$, $(M_y)_{\max}$: 最大モーメント) は、無次元パラメーター $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ のみの関数として表わすことができる。

ただし、この解は孤立波の第1次近似解に対応したものであるため、波高水深比が大きく波の非線形性が強い場合の適用には問題があると考えられる。そこで本論文では、波高水深比 H_0/h が 0.1 と 0.4 の場合における波力およびモーメントを計算し、波の非線形性の影響を検討する。なお、円柱は波の入射方向に対して面対称形であることから、解析では円の中心を S_{w_3} 上に設定し、円柱の片側部分のみを解析の対象とした。また、離散化パラメーター Δl および Δt としては、表-1 に示す値を用い、 X_L , Y_L は波の追跡時間内に円柱からの散乱波が直立壁面に到達しない程度に設定した。

図-8 は、 $(a/h)\sqrt{H_0/h} = 2.0$, $H_0/h = 0.4$ の場合における孤立波の変形のシミュレーション結果を示している。一定水深水槽中で発生した孤立波は、水槽中を安定して伝播し ($t\sqrt{g/h} = 8 \sim 10$)、やがて波の峰が円柱表面に到達する ($t\sqrt{g/h} = 12$)。このとき、円柱表面における波のはい上がり高さは、入射波高を上回っている。さらに、孤立波の峰が円柱を通過する際には ($t\sqrt{g/h} = 14 \sim 18$)、円柱背後における波高と波の伝播速度が入射した孤立波に比べて小さくなっている。またこの際、円柱から散乱波が発生しており、入射波のエネルギーの一部が反射されているのがわかる。

図-9(a), (b) は、 $(a/h)\sqrt{H_0/h} = 2.0$ における無次元水平波力および無次元モーメントの時刻歴変化について、 $H_0/h = 0.1, 0.4$ に対する本解析結果を Isaacson の第1次近似解と比較したものである。ただし、 t' は変形しない場合の (円柱から十分に離れた位置での) 孤立波の峰が円柱の中心軸上を通過する瞬間を 0 としたときの時間を表わしている。 $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ が十分に小さく、波の回折の影響が無視できる範囲では、これらの係数の時刻歴波形は $t' = 0$ の軸に対して逆対称形になり、 $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ が大きくなるにつれて、最大値と最小値の絶対値との差は大きくなる⁸⁾。図-9 に示されるように、 $H_0/h = 0.1$ の本解析結果は、近似解と良く一致することから、 H_0/h が 0.1 程度では波の非線形性は弱く、第1次近似解でも実用上は適用できると考えられる。また、 $H_0/h = 0.4$ の無次元波力についても、値が最大になる時間が若干ずれるが、最大値 (波力係数) は近似解とほとんど差がない。これに対して、 $H_0/h = 0.4$ における無次元モーメントの最大値 (モーメント係数) は、近似解を大幅に上回るのがわかる。

図-10(a), (b) は、波力が最大になるときの波圧の水平断面分布について、本解析結果を第1次近似解と比較したものである。波力に関する結果と同様に、 $H_0/h = 0.1$ の解析結果は近似解とほぼ一致している。 $H_0/h = 0.4$ では、最大波力が近似解と同程度であるにもかかわらず、波圧は全体的に近似解を下回っている。ここで

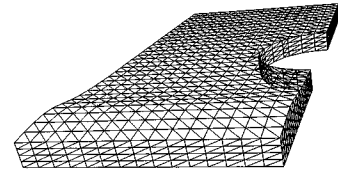
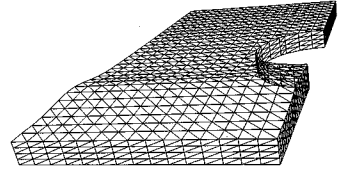
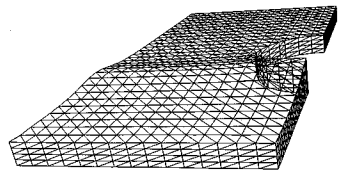
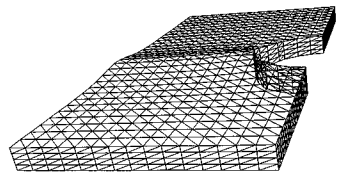
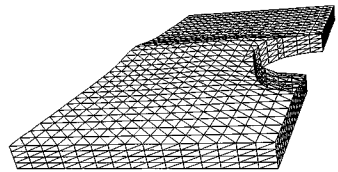
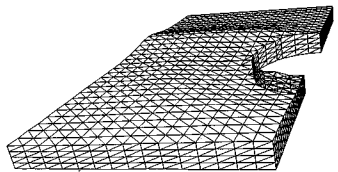
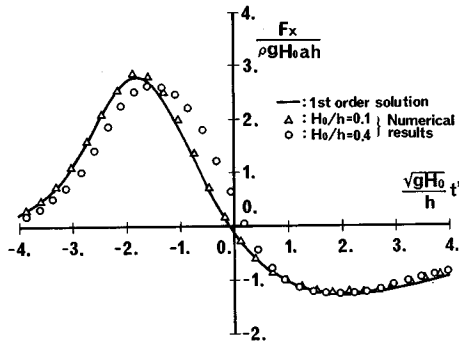
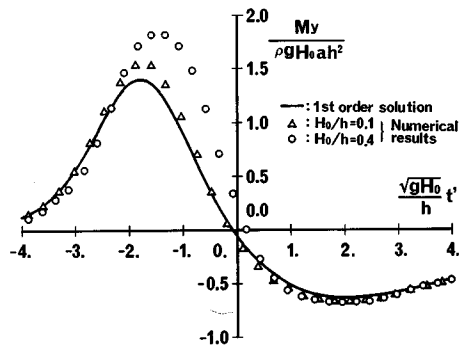
(a) $t\sqrt{g/h} = 8.0$ (b) $t\sqrt{g/h} = 10.0$ (c) $t\sqrt{g/h} = 12.0$ (d) $t\sqrt{g/h} = 14.0$ (e) $t\sqrt{g/h} = 16.0$ (f) $t\sqrt{g/h} = 18.0$

図-8 円柱による孤立波の回折
 $((a/h)\sqrt{H_0/h} = 2.0, H_0/h = 0.4)$

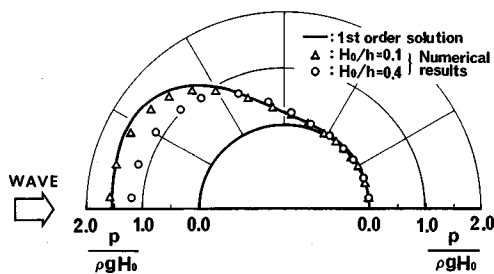


(a) 無次元波力

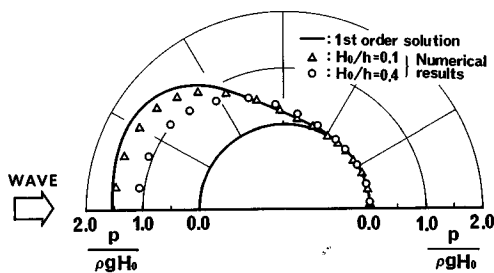


(b) 無次元モーメント

図9 円柱に作用する波力，モーメントの時間変化 ((a/h)√H₀/h=2.0)



(a) z/h=-0.1



(b) z/h=-0.8

図10 波力最大時の波圧分布 ((a/h)√H₀/h=2.0)

本解析では、近似解と異なり、静水面よりも上の円柱表面に作用する波圧も考慮されている。すなわち $H_0/h=0.4$ では波圧は近似解よりも小さいが、考慮する波圧の作用面積が本解析の方が広いと、結果的に波力の値は同程度になったものと考えられる。さらにこのことは、波力の作用点の位置が、本解析結果の方が高くなることに対応しており、図9(b)に示したようにモーメントの最大値が近似解を上回ることが理解できる。

図11は、円柱前面の点（造波境界に最も近い点）での水面変動量の時刻歴波形を示したものである。 $H_0/h=0.1$ の解析結果が近似解と良く一致するのに対して、 $H_0/h=0.4$ における最大値（波の打ち上げ高さ）は第1次近似解に比べて10%程度大きくなっている。また、 $H_0/h=0.4$ の解析結果には、 $t' > 0$ で短周期変動が現われている。孤立波が急勾配斜面から反射する際の斜面付近の水面変動にも、これと同様な擾乱が起こることが知られているが²²⁾、これは二次元波動場における現象であり、回折波動場でのこのような現象については、今後検証していく必要がある。ただし、図9からわかるように、この短周期水面変動が波力、モーメントに及ぼす影響はほとんどない。

図12(a), (b)は、 $H_0/h=0.1, 0.4$ について、 $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ に対する波力係数 C_F 、モーメント係数 C_M の特性を示したものである。また、図13にはそれぞれについての第1次近似解 (C_{F1}, C_{M1})との比を示している。図12からわかるように、近似解では波の回折の影響により $1.5 < (a/h)\sqrt{H_0/h} < 3.0$ の範囲で C_F, C_M はほぼ一定の値になる（回折を考慮しない場合には単調増加になる）のに対して、 C_F に関する本解析結果もこれとほぼ同様な特性を示している。また、 $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ が小さい領域では本解析結果は近似解を下回っており、図13に示すように $(a/h)\sqrt{H_0/h}=0.5$ における C_F は、近似解に対して、 $H_0/h=0.1$ のとき14%、 $H_0/h=0.4$ のとき20%小さくなっている。ただし、近似解が本解

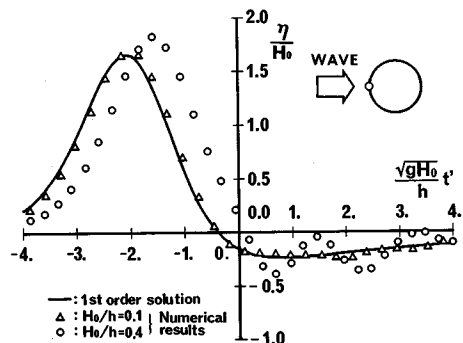
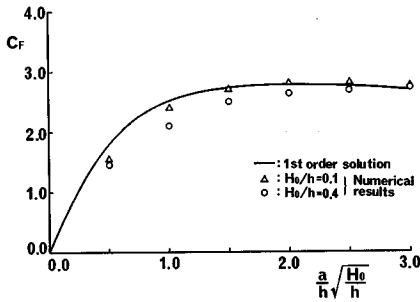
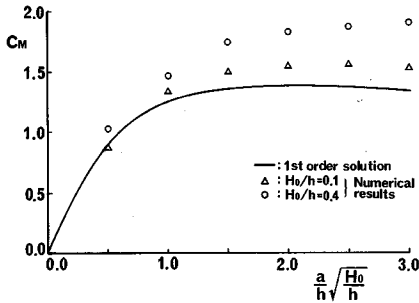


図11 円柱前面の点における水面変動量の時間変化 ((a/h)√H₀/h=2.0)



(a) 波力係数



(b) モーメント係数

図-12 C_F, C_M の $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ に対する特性

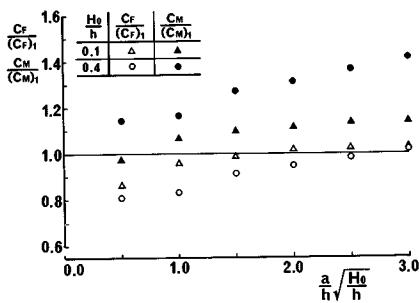


図-13 C_F, C_M に関する第1次近似解との比

析結果を大幅に上回ることではなく、実用的には近似解が適用できるものと思われる。一方、 C_M に関する本解析結果は、 $H_0/h=0.1$ 、 $(a/h)\sqrt{H_0/h}=0.5$ を除いたいずれの場合も近似解を上回っており、波高水深比が大きいほど、また $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ が大きいほど近似解との差は大きくなっている。特に、 $(a/h)\sqrt{H_0/h}=3.0$ 、 $H_0/h=0.4$ の場合には、近似解に比べて40%以上大きな値を有することから、このような条件のもとでは、 C_M に関する第1次近似解は適用できないものと考えられる。

図-14は、円柱前面の点における波の打ち上げ高さについて、本解析結果と近似解を比較したものである。 $H_0/h=0.1$ の場合には、本解析結果と近似解との一致はきわめて良く、近似解が十分適用できることがわかる。

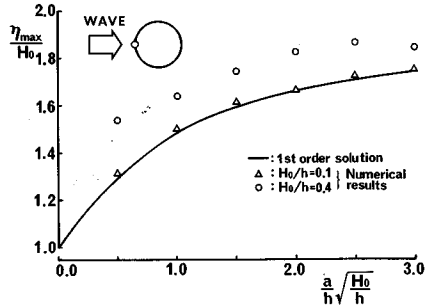


図-14 円柱前面の点における波の打ち上げ高さの $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ に対する特性

また $H_0/h=0.4$ の場合には、本解析結果はいずれも近似解を上回り、その差は近似解に比べて5~20%程度である。

8. おわりに

三次元非線形波動場の数値解析法として、境界要素法に基づく手法を提案した。この手法は、著者がすでに提案した二次元非線形波動場の解析法を三次元に拡張したものであり、三次元数値波動水槽として位置づけることができる。本解析法の妥当性を調べるため、有限な幅をもつ一定水深水路で、波高水深比 $H_0/h=0.1\sim0.4$ の孤立波を発生させ、その空間波形と水路側面での波圧をFentonの解析解と比較した。その結果、本解析結果はいずれも解析解とよく一致することを確認した。さらに、円柱に作用する孤立波の波力とモーメントについて、 $H_0/h=0.1$ と 0.4 の条件で Isaacson の第1次近似解と比較した。その結果、以下のような知見を得た。

(1) 波力係数 C_F は、 $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ が小さくなると、近似解を若干下回る。ただし、実用的な観点から考えると、 H_0/h が 0.4 以下、 $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ が 3.0 以下の範囲では、近似解は十分に適用できる。

(2) 波力最大時に円柱表面に作用する波圧については、 H_0/h が大きくなると近似解は過大な値を与える傾向がある。

(3) モーメント係数 C_M については、近似解は過小評価になるため、実用上の適用にあたっては問題がある。特に、 H_0/h が大きく、また $(a/h)\sqrt{H_0/h}$ が大きいほどこの傾向が顕著に現われ、 $H_0/h=0.4$ 、 $(a/h)\sqrt{H_0/h}=3.0$ では近似解に比べて40%以上大きな値になる。

(4) 円柱前面の点における波の打ち上げ高さについては、 $H_0/h=0.4$ の場合近似解を5~20%上回る。ただし、 $H_0/h=0.1$ 程度では近似解は十分妥当である。また、波の峰が円柱の中心軸を通過した後に現われる短周期変動は波力、モーメントにほとんど影響を及ぼさない。

なお、本論文では非周期性波動である孤立波のみを対象に解析を行ったが、二次元解析において著者^{13),14)}が示したように、基本的には周期性波動場を取り扱うこともできる。ただしその場合には、構造物近傍の波動場が定常状態になるまで流体運動を追跡する必要がある。したがって、壁面境界を設定した本解析法では、解析領域をかなり広くしなければならない。特に、分散性の強いストークス波領域では、定常状態に達するまでの追跡時間がクノイド波領域に比べて長くなり、本解析法をそのまま用いることは実用面から考えて困難である。したがって、三次元の周期性波動場を対象にする場合には、実用的な開境界処理方法を考案し、解析領域を構造物近傍のみにする工夫が必要になると考えられる。

最後に、図—8 に示したシミュレーション結果 ($N=680$, $N_F=472$, 追跡時間ステップ45) を得るために要した計算時間は、約70分 (FACOM VP 50 使用) であり、また同一ステップでの繰り返し計算は最大3回であった。

参 考 文 献

- 1) Chakrabarti, S. K. : Nonlinear Wave Forces on Vertical Cylinder, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. HY11, pp. 1895~1909, 1972.
- 2) 山口正隆・土屋義人：大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線形性の影響，土木学会論文報告集，第229号，pp. 41~53, 1974.
- 3) Raman, H. and Venkatanarasaiah, P. : Forces due to Nonlinear Waves on Vertical Cylinder, Proc. of ASCE, Vol. 102, No. WW3, pp. 301~306, 1976.
- 4) たとえば，Isaacson, M. de St. Q. : Nonlinear Wave Forces on Large Offshore Structures, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. WW1, pp. 166~170, 1977.
- 5) Hunt, J. N. and Baddor, R. E. : Second-order Standing Waves Bounded by Circular Cylinders, Proc. of ASCE, Vol. 106, No. WW1, pp. 122~127, 1980.
- 6) Rahman, M. : Wave Diffraction by Large Offshore Structures : an Exact Second-order Theory, Appl. Ocean Res., Vol. 6, No. 2, pp. 90~100, 1984.
- 7) 喜岡 渉・石田 昭：円柱に作用する第2次近似回折波力，第31回海岸工学講演会論文集，pp. 620~624, 1984.
- 8) Isaacson, M. de St. Q. : Solitary Wave Diffraction around Large Cylinder, Proc. of ASCE, Vol. 109, No. WW1, pp. 121~127, 1983.
- 9) Isaacson, M. de St. Q. : Shallow Wave Diffraction around Large Cylinder, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. WW1, pp. 69~82, 1977.
- 10) Isaacson, M. de St. Q. : Nonlinear-wave Effects on Fixed and Floating Bodies, J. Fluid Mech., Vol. 120, pp. 267~281, 1982.
- 11) 喜岡 渉：任意形状三次元構造物に作用する非線形回折波力，第33回海岸工学講演会論文集，pp. 481~485, 1986.
- 12) 大山 巧：境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析，第32回海岸工学講演会論文集，pp. 555~559, 1985.
- 13) 大山 巧：数値波動水槽によるクノイド波の変形の解析，第33回海岸工学講演会論文集，pp. 99~103, 1986.
- 14) 大山 巧：クノイド波の斜面遡上の境界要素解析，土木学会論文集，第381号/II-7, pp. 189~198, 1987.
- 15) Orlansky, I. : A Simple Boundary Condition for Unbounded Hyperbolic Flows, J. Comp. Physics, Vol. 21, pp. 251~269, 1976.
- 16) 瀬戸秀幸：水面波動問題における開境界処理と数値解析法，日本造船学会誌，第638号，pp. 386~400, 1982.
- 17) ゾンマーフェルト (増田秀行訳)：理論物理学講座VI 物理数学，pp. 67~89, 講談社，1969.
- 18) プレビア (神谷紀生ほか訳)：境界要素法入門，pp. 39~94, 培風館，1980.
- 19) Webster, W. C. : The Flow about Arbitrary, Three-Dimensional Smooth Bodies, J. Ship Res., Vol. 19, No. 4, pp. 206~218, 1975.
- 20) Kioka, W. : Numerical Analysis on the Dynamic Response of Three-Dimensional Free-Floating Structure, Proc. of JSCE, No. 326, pp. 155~165, 1982.
- 21) Fenton, J. D. : A Ninth-order Solution for the Solitary Wave, J. Fluid Mech., Vol. 53, pp. 257~271, 1972.
- 22) 岡村敬二・八畷 功：非線形浅水重力波の急斜面反射による波峰分裂，第34回海岸工学講演会論文集，pp. 66~70, 1987.

(1989.1.11・受付)