【土木学会論文集　第411号／II-12　1989年11月】

2段階推移モデルによる相関離散分布流量を受ける貯水池理論

STOCHASTIC RESERVOIR THEORY WITH CORRELATED DISCRETE INFLOWS ON A TWO-STEP TRANSITION MODEL

鈴木正人*・長尾正志**
By Masato SUZUKI and Masashi NAGAO

Stochastic reservoir theory has been developed with correlated discrete inflows on a two-step transition model by Klemeš and on the basis of idea of joint probability of inflows and storage by Lloyd for Markovian inflows. Stationary distribution for any states of storage can be then calculated by the matrix algebra with the discrete representation for the amount of inflows and reservoir states.

Numerical calculation is carried out by the correlated Binomial inputs. The results coincide with the exact solution on a randam-walk theory by Phatarfod and the approximate solution on one by Nagao and *et al.* This approach can be easily applied to the experimental distribution for sample data.

Keywords : *stochastic reservoir theory, correlated discrete inflows, two-step transition model*

1. 研究の概要

(1) 従来の研究の概要と問題点

貯水池問題を統計的に取り扱った研究のうちで，特に相関流量分布を受ける貯水池理論を中心として，その概要と問題点について記述する．

確率入力としての流量分布を貯水池理論に初めて適用したのは，Moran (1954)[1] といえよう．彼は貯水池系を確率的入力を受ける在庫問題で定式化した．その最初の理論は，定常かつ独立な流量を受ける貯水池の貯水量定常分布の導出にある．すなわち，流量分布から貯水量に関する推移確率行列 P を表現することが基礎となる．ついで，任意の貯水量状態の確率ベクトル p_0 から任意時点 n の貯水量の確率ベクトル p_n を $p_n=p_0\cdot P^n$ で表わすとともに，その定常分布 w を，$w=w\cdot P$ の解で求められることを示した．しかし，現実の利水用貯水池で問題となる渇水時における流量間の自己相関性が無視できないことから，相関性の導入が要求された．

Lloyd (1963)[2] は Moran の理論を発展させて，自己相関性を組み入れた．すなわち，貯水量と流量の結合分布に二変数マルコフ過程（Moran の推移確率行列に直前の流量状態を勘案したもの）を用いた．しかし，実際に計算方法を示したのはごく単純なケースに過ぎず，実用上要求されるような大きな次元をもつ推移確率行列では，計算が煩雑になり，解を求めることは事実上困難であった．

さらに，Klemeš (1970)[3] は，貯水量推移に対して，流入量による貯留推移と，放流量による放流推移との合成から，Lloyd のモデルが直接導けることを示した．しかし，この理論は，本来連続分布流入量を対象として記述されているために，行列演算としての計算過程が間接的であり，手法に不明確さが残されていた．

上述のような行列演算に伴う，次元の拡大による煩雑さを回避しようとした試みに，Phatarfod (1973)[4] らの研究がある．彼らは一次元マルコフ連鎖に拡張した酔歩理論や逐次解析の手法の適用を行っている．しかしながら厳密解が得られているのは，流入量分布がごく簡単な例（正の二項分布では3状態流量）に過ぎない．

そこで，長尾・池田 (1979)[5] は上記 Phatarfod の厳密解を改良して，流入量分布が一般的な場合にも適用し得る近似解を示した．また，長尾・羽鳥・浅野 (1984)[6] は，さらにこれらの近似が時間的問題（空水に至る期間長の確率特性など）にも適用可能であることを示した．

* 学生会員　工修　名古屋工業大学工学研究科博士後期課程学生（〒466　名古屋市昭和区御器所町）
** 正会員　工博　名古屋工業大学教授　工学部社会開発工学科（同上）

（2） 本研究の目的と概要

近年の電算機の発達はめざましく，従来敬遠されがちであった次元の大きな行列演算も比較的簡単に処理できるようになりつつある．そこで，本研究は Lloyd の結合分布の考え[2]と，Klemeš の示した2段階推移の手法[3]を用い，相関離散分布流量を受ける貯水池の貯水量定常分布の導出法を，できるだけ簡便かつ具体的に述べようとするものである．任意の貯水量の状態確率が，流量・貯水量の離散化表現と2段階推移モデルを用いた行列演算によって明確に求められる．また，若干のケースについて，数値実験解，および従来の各計算法による結果と比較することにより，従来近似的にしか求め得なかった一般的な相関離散分布流量を受ける貯水池の貯水量定常分布が厳密解として求められることを示した．

2. 2段階推移モデルによる貯水池理論の基礎的条件

（1） 2段階推移の概念

数式的な説明は後述するが，2段階推移の概念について概述しておく．

貯水池の貯水量は，本来流入量を受けながら，なるべく目標放流量を満たすように放流操作することによって，時々刻々と変化していく連続過程であろう．しかし，計算を実用化，簡便化するためには，量的・時間的な離散化は不可避である．

そこで，ある単位期間を対象として，まず貯留のみを考え，ついで，期末に放流のみを行うようにみなす．その際貯水池容量に制約された貯留可能性，および初期貯水量・期間内総流入量に由来する放流可能性は，ともに期間の期首・期末という離散時点で判別することにする．

（2） 前提条件と記号

本論に入る前に，解析上の前提条件と記号を明確にしておく．

a） 前 提 条 件

i） すべての流入量，貯水量は，時間的・量的に離散化された状態量として取り扱う．

ii） 流量時系列の自己相関性は1次マルコフとし，流量分布は，条件付き離散分布で表現する．ただし表式化は必ずしも必要でなく，経験分布のままでもよい．

iii） 対象とする貯水池の貯水状態は，流量分布の離散化単位により離散化された表現で取り扱う．つまり，任意の貯水状態は流量分布の離散化単位の整数倍で表わす．

iv） 目標放流量も，流量分布の離散化単位の整数倍で表現できるとする．

v） 目標放流量の大きさは一定でなくてもよい．貯水状態に応じて，その大きさを変える場合も容易に取り扱える．

b） 記 号

Δs：時点 $t-1$, t で区切られた時間間隔.

$\Delta(s+1)$：時点 t, $t+1$ で区切られた時間間隔.

n：流入量上限.

g_{ij}：条件付き流量分布. Δs で i の流入があったとき，$\Delta(s+1)$ で j の流入が生起する確率.（i, $j=0$, 1, 2, ……, n）

K：有効貯水池容量.

V_i：貯水量の確率分布．貯水量状態 i が生起する確率.（$i=0$, 1, 2, ……, K）

h_{um}：分割された貯水量分布．前の区間で流入量 u を受けて，貯水量状態が m になる確率.（$u=0$, 1, ……, n ; $m=0$, 1, ……, K）

$$\sum_{u=0}^{n} h_{um}=V_m$$

$\{H\}$：要素 h から構成される貯水量分布ベクトル.

$\{H\}\equiv\{H_0, H_1, \cdots\cdots, H_i, \cdots\cdots, H_K\}$

$H_i\equiv(h_{0i}, h_{1i}, \cdots\cdots, h_{ni})$

$(n+1)\times(K+1)$ の次元をもつ.

$M(i)$：貯水状態 i に対応した目標放流量．もちろん i に無関係な定数でもよく，それを M と記す.

Z：貯水量状態.

Q：ある期間における総流量.

$[\ ]_1$, $[\ ]_2$：下付き添字1，2は時間間隔での期首，期末の状態量を示す.

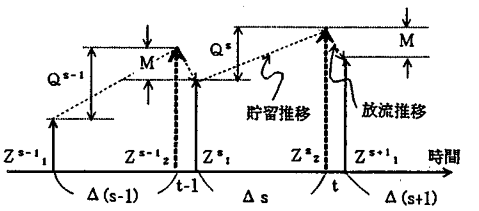
$[\ ]^s$, $[\ ]^{s+1}$：上付き添字 s, $s+1$ はそれぞれ間隔 Δs, $\Delta(s+1)$ の状態量であることを示す．たとえば，Z_1^s は時間間隔 Δs の期首の貯水状態を，$\{H\}_1^s$ は Δs の期首の貯水量分布を，また Q^{s+1} は時間間隔 $\Delta(s+1)$ における総流入量を示す.

（3） 2段階推移としての貯水量変化の解釈

先述したように，貯水量は流入量の貯留と目標放流量の放流といった2つの要因によって変化し，さらに貯水池容量によって満水以上にも空水以下にもならないという制約を受ける．

貯水量変化を確率過程としてモデル化する際に，流量に相関を考慮しない場合，貯水量の純増分（＝流入量－放流量）にだけ関心が払われるのであり，流入量の値そのものには直接関心をもたない．つまり，流入と放流という2段階の推移を純増分による1段階の推移に置き換えて考えておけばよかった．

しかし，流量に相関を考慮する場合，前期間の流量との関連から貯水量の純増分だけでなく，純増分を構成する流入量の値そのものにも関心を払わねばならない．そこで，貯水量の推移を，流入量による推移（貯留推移）と，放流による推移（放流推移）の2段階に分けて考え



図—1 2段階推移の概念図

る．換言すれば，貯水量変化を，確率成分（貯留推移）と確定成分（放流推移）とに分離して取り扱う．

以下，前出の記号を用いて2段階推移を表現する（図—1参照）．時間間隔 Δs の期首の貯水状態 Z_1^s は時間間隔 Δs の総流入量 Q^s を Δs の期間に受けて，Δs の期末の貯水状態 Z_2^s へと推移する．これが貯留推移であり，貯水池容量に制約された貯留可能性はここで考慮される．負の流入を考えない限りこの推移は貯水量の増加，あるいは現状維持（満水から満水への推移など）である．次に，Z_2^s は，目標放流量を放流することにより，時間間隔 $\Delta(s+1)$ の期首の貯水状態 Z_1^{s+1} へと推移する．これが放流推移であり，目標放流量の放流可能性はここで考慮される．負の放流を考えない限りこの推移は，貯水量の減少，あるいは現状維持（空水から空水への推移）である．以上でわかるように，流量に相関を考慮しない場合は，Z_1^s から Z_1^{s+1} への推移を直接考えればよかったが，相関を考慮する場合は，Z_2^s をその途中に介在させて考えておかねばならない．

（4） 貯水量変化の貯水量方程式による表現[7]

貯水量変化は貯水量方程式によって表現される．ここでは，流量の予測が可能な場合と不可能な場合に分けて2段階推移として，それぞれ記述しておく．ただしここでは，理解しやすいように目標放流量 M を貯水量状態によらない定数の場合について述べる．

a） 流量予測不可能な場合

流量 Q^s の予測が不可能なため，目標放流量の取水可能性は，Q^s が判明するまで，判断できない．したがって，Δs の期間内で完全に流量 Q^s を貯留した後，$\Delta(s+1)$ への境界で1度に放流することになる．上記の2段階推移はこの場合に対応している．

$\min(A, B)$ を A と B の小さい方の表現とする．Δs の期末における貯水可能量は，$\min(Z_1^s+Q^s, K)=Z_2^s$，また Δs から $\Delta(s+1)$ への境界における取水可能量は，$\min(M, Z_1^s+Q^s)$ であるから，Z_1^s と Z_1^{s+1} の関係式として，貯水量方程式が次式のように表現される．

$$Z_1^{s+1}=\min(Z_1^s+Q^s, K)-\min(M, Z_1^s+Q^s) \quad \cdots\cdots(1)$$

また，時間間隔の期首の貯水状態 Z_1 の存在範囲は，$0\leqq Z_1\leqq K-M$ である．

b） 流量予測可能な場合

現実の操作では，ある程度流入量を予測しながら放流し，貯水池容量を最大限利用し得るような操作を行う．予測が可能であれば貯水量方程式は次のようになる．

$$Z_1^{s+1}=\min(K, Z_1^s+Q^s-\min(M, Z_1^s+Q^s)) \quad \cdots\cdots(2)$$

また，時間間隔の期首の貯水状態 Z_1 の存在範囲は，$0\leqq Z_1\leqq K$ である．

本研究では予測が不可能な場合の貯水量方程式に従ってモデル化していくが，形式的には貯水池容量を M だけ大きくすれば，（期末では $K+M$ だけ貯留し得ると考えれば）予測が可能な場合の貯水量方程式に対応させることができる．

3. 2段階推移モデルによる貯水量定常分布の導出

2．での基礎的条件に従って，行列を用いて貯水量の定常分布を導出する手順を説明する．なお，以下では一般にベクトルは行ベクトルを表わすことにする．

（1） 流入量による貯水量推移（貯留推移）

まず Δs の期首の貯水量分布 $\{H\}_1^s$ から Δs の期末の貯水量分布 $\{H\}_2^s$ への推移を考える．この推移は流入量により起こり，流入量の条件付き分布に支配される．この推移確率行列 $\boldsymbol{G}$ は，

$$\boldsymbol{G}\equiv\begin{pmatrix} & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \boldsymbol{g}_{ij} & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \end{pmatrix} \quad (i,\ j=0, 1,\ \cdots\cdots,\ K-1,\ K)$$

$$\cdots\cdots(3)$$

ここで，$\boldsymbol{g}_{ij}$ は以下のものである．

$$\boldsymbol{g}_{ij}\equiv\left(\begin{array}{c|ccccccc} \nearrow & 0 & 1 & 2 & \cdot & j-i & \cdot & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{0(j-i)} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1(j-i)} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{2(j-i)} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{n(j-i)} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$0\leqq j-i\leqq n, \qquad j\neq K \quad \cdots\cdots(4)$$

ただし，特別な場合として次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{g}_{iK}\equiv\left(\begin{array}{c|cccccccc} \nearrow & 0 & 1 & 2 & \cdot & K-i & K-i+1 & \cdot & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{0(K-i)} & g_{0(K-i+1)} & \cdot & g_{0n} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1(K-i)} & g_{1(K-i+1)} & \cdot & g_{1n} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{2(K-i)} & g_{2(K-i+1)} & \cdot & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{n(K-i)} & g_{n(K-i+1)} & \cdot & g_{nn} \end{array}\right)$$

$$\cdots\cdots(5)$$

またどちらの場合も

$\boldsymbol{g}_{ij}\equiv\{\boldsymbol{0}\}(j-i>n$ または $j-i<0)$ ……………(6)

である．

したがって，貯留推移確率行列 $\boldsymbol{G}$ は，$(K+1)\times(n+1)$ の次元をもつ正方行列で，貯水量ベクトルも，同じ次元をもつ．当然，$\boldsymbol{G}$ の各行の要素の和は1という確率推移行列の性質をもつ．$\boldsymbol{G}$ を用いて $\{H\}_1^s$ から $\{H\}_2^s$ への推移を表わすと次式となる（**補稿1参照**）．

$$\{H\}_2^s=\{H\}_1^s\cdot\boldsymbol{G} \cdots\cdots(7)$$

（2） 放流量による貯水量推移（放流推移）

ここでは，Δs の期末の貯水量分布 $\{H\}_2^s$ から $\Delta(s+1)$ の期首の貯水量分布 $\{H\}_1^{s+1}$ への推移を考える．この推移は放流によって起こり，推移行列に確率的成分は含まれない．したがって推移の可能性の有無によってその要素は，0または1，となる．放流推移行列 $\boldsymbol{R}$ は，

$$\boldsymbol{R}\equiv\begin{bmatrix} & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \boldsymbol{r}_{ij} & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \end{bmatrix}\quad(i,\ j=0,1,\ \cdots\cdots,\ K-1,\ K) \cdots\cdots(8)$$

ここで，$\boldsymbol{r}_{ij}$ は次のとおりである．

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{r}_{ij}\equiv(n+1)\text{ 次の単位正方行列}\\ \quad(j=i-M(i)\text{ または}\\ \quad j=0\text{ かつ } i-M(i)<0\text{ の場合})\\ \boldsymbol{r}_{ij}\equiv(n+1)\text{ 次の零行列}\\ \quad(\text{上記以外の場合})\end{array}\right\}\cdots\cdots(9)$$

これらの表現を使い，$M(i)$ の設定を工夫すれば，多目的貯水池における制限水位のように，貯水池容量が減少する場合にも対応できる．たとえば，この場合減少された貯水池容量を KS とすると，

$$M(i)=i-KS \quad (i>KS)$$

と $M(i)$ を設定すれば，行列の次元を減少することなしに，貯水池容量の減少が表現できる．一般的に，貯水状態 i を決めれば，目標放流量 $M(i)$ が決まり，貯水状態の推移先 j は一意に決まる．推移行列 $\boldsymbol{R}$ について，各行の要素のうち，1つだけが1であとは0だから，やはり $\boldsymbol{R}$ も推移確率行列の性質をもつ．$\boldsymbol{R}$ を用いて $\{H\}_2^s$ から $\{H\}_1^{s+1}$ への推移を表わすと次式のようになる（**補稿2参照**）．

$$\{H\}_1^{s+1}=\{H\}_2^s\cdot\boldsymbol{R} \cdots\cdots(10)$$

（3） 貯留推移と放流推移の合成

式（7）と式（10）を順次計算すれば，$\{H\}_1^s$ から $\{H\}_1^{s+1}$ への推移が表わせるが，ここでは，計算の便宜を考えそれらを合成する．

式（10）の $\{H\}_2^s$ に式（7）の値を代入し，推移行列を一括して表現すると，

$$\{H\}_1^{s+1}=\{H\}_1^s\cdot\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{R} \cdots\cdots(11)$$

となり，Moranが初期に提案した，流量系列が独立な場合と同様な表現が可能である．

（4） 貯水量定常分布の導出

貯水状態確率の推移が式（11）の形で表現できることは，量的・時間的な側面において貯水池の機能評価に有用な手段を多々提供する[7]が，ここではその代表例として，貯水量定常分布の導出を述べる．$\boldsymbol{P}$ が既約の条件を満たしているとして，貯水量定常分布を $\{W\}$ とすると，

$$\{W\}=\{W\}\cdot\boldsymbol{P} \cdots\cdots(12)$$

ここで，

$$\{W\}=\{W_0,\ W_1,\ \cdots\cdots,\ W_i,\ \cdots\cdots,\ W_K\}$$

$$W_i=(w_{0i},\ w_{1i},\ \cdots\cdots,\ w_{ni})$$

である．

式（12）を変形して，$\{\boldsymbol{0}\}$, $\{\boldsymbol{I}\}$ をそれぞれ零行列，単位行列として，次式が得られる．

$$\{\boldsymbol{0}\}=\{\boldsymbol{W}\}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I}) \cdots\cdots(13)$$

基本的には式（13）の連立方程式を解けばよいが，式（13）には独立でない式が1つ含まれているので，定常分布の各要素の和が1という条件を加えて，次式となる．ただし，左辺の要素数は $\boldsymbol{P}$ の列数と等しい．

$$\{0,0,0,\ \cdots\cdots,\ 0,1\}=\{\boldsymbol{W}\}\cdot\boldsymbol{Q} \cdots\cdots(14)$$

ここで，$\boldsymbol{Q}$ は $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I})$ の最後の列の要素をすべて1で置き換えたものである．式（14）の連立方程式を解くことで定常分布 $\{W\}$ が求められる．

4. 計 算 例

3. で述べた貯水量定常分布導出の計算例を示す．紙面の関係上，$K=3$，$n=2$ という簡単なケースについて示す．また，四捨五入によって数字を丸めてあるので，各行の要素の和は必ずしも1にはなっていない．

（1） 計算条件

貯水池条件

貯水池容量　$K=3$

目標放流量　$M=1$（貯水状態によらず一定値）

流入量分布

流量上限 $r=2$（すなわち流量状態は0,1,2のいずれか），形状母数 $a=0.4$，自己相関係数 $\rho=0.6$ の相関二項分布に従う．用いた相関二項分布を次式に示す．

$$P(i)\equiv\Pr[X_t=i]=\binom{r}{i}(1-a)^{r-i}a^i \cdots\cdots(15)$$

$$g_{ij}\equiv\Pr[X_{t+1}=j\,|\,X_t=i]$$

$$=\sum_{s=0}^{\min(i,j)}\binom{i}{s}\binom{-i+r}{j-s}\{a(1-\rho)+\rho\}^s$$

$$\times\{1-a(1-\rho)\}^{s+r-i-j}a^{i-s}\times(1-a)^{i-s}(1-\rho)^{i+j-2s}$$

$$(i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ r) \cdots\cdots(16)$$

上式で，$P(i)$ は周辺分布，g_{ij} は条件付き分布である．

（2） 推移行列の計算

まず，貯留推移行列 $\boldsymbol{G}$ は，

$$
\boldsymbol{G}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
0.706 & 0 & 0 & 0 & 0.269 & 0 & 0 & 0 & 0.026 & 0 & 0 & 0 \\
0.202 & 0 & 0 & 0 & 0.677 & 0 & 0 & 0 & 0.122 & 0 & 0 & 0 \\
0.058 & 0 & 0 & 0 & 0.365 & 0 & 0 & 0 & 0.578 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0.706 & 0 & 0 & 0 & 0.269 & 0 & 0 & 0 & 0.026 \\
0 & 0 & 0 & 0.202 & 0 & 0 & 0 & 0.677 & 0 & 0 & 0 & 0.122 \\
0 & 0 & 0 & 0.058 & 0 & 0 & 0 & 0.365 & 0 & 0 & 0 & 0.578 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.706 & 0 & 0 & 0 & 0.269 & 0.026 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.202 & 0 & 0 & 0 & 0.677 & 0.122 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.058 & 0 & 0 & 0 & 0.365 & 0.578 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.706 & 0.269 & 0.026 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.202 & 0.677 & 0.122 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.058 & 0.365 & 0.578
\end{array}\right)
$$

ここで破線で区切られた各ブロックは，式（3）の $\boldsymbol{g}_{ij}$（$i, j=0,1,2,3$）に対応している．たとえば，1列目の1行目から3行目までの要素は，貯留推移において

0.706（g_{00}）……貯水状態0（前期間流入量0）から流入量0を得て貯水状態0へ推移する確率．

0.202（g_{10}）……貯水状態0（前期間流入量1）から流入量0を得て貯水状態0へ推移する確率．

0.058（g_{20}）……貯水状態0（前期間流入量2）から流入量0を得て貯水状態0へ推移する確率．

また，8列目の4行目から6行目までの要素は，

0.269（g_{01}）……貯水状態1（前期間流入量0）から流入量1を得て貯水状態2へ推移する確率．

0.677（g_{11}）……貯水状態1（前期間流入量1）から流入量1を得て貯水状態2へ推移する確率．

0.365（g_{21}）……貯水状態1（前期間流入量2）から流入量1を得て貯水状態2へ推移する確率．

を表わす．

また，放流推移行列 $\boldsymbol{R}$ は，次のとおりである．

$$
\boldsymbol{R}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

ここでたとえば，1～3列目，1～3行目の単位行列（$=\boldsymbol{r}_{00}$）は，放流推移において，貯水状態0から目標放流量1を放流できずに貯水状態0へ推移することを意味する．また，4～6行目，7～9行目の零行列（$=\boldsymbol{r}_{12}$）は，放流推移において，貯水状態1から2には推移し得ないことを意味する．したがって，推移行列 $\boldsymbol{P}(=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{R})$ は，

$$
\boldsymbol{P}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
0.706 & 0.269 & 0 & 0 & 0 & 0.026 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.202 & 0.677 & 0 & 0 & 0 & 0.122 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.058 & 0.365 & 0 & 0 & 0 & 0.578 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0.706 & 0 & 0 & 0 & 0.269 & 0 & 0 & 0 & 0.026 & 0 & 0 & 0 \\
0.202 & 0 & 0 & 0 & 0.677 & 0 & 0 & 0 & 0.122 & 0 & 0 & 0 \\
0.058 & 0 & 0 & 0 & 0.365 & 0 & 0 & 0 & 0.578 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0.706 & 0 & 0 & 0 & 0.269 & 0.026 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.202 & 0 & 0 & 0 & 0.677 & 0.122 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.058 & 0 & 0 & 0 & 0.365 & 0.578 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.706 & 0.269 & 0.026 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.202 & 0.677 & 0.122 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.058 & 0.365 & 0.578 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

これより Q は,

$$Q=\begin{pmatrix}
-0.294 & 0.269 & 0 & 0 & 0 & 0.026 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0.202 & -0.323 & 0 & 0 & 0 & 0.122 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0.058 & 0.365 & -1 & 0 & 0 & 0.578 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0.706 & 0 & 0 & -1 & 0.269 & 0 & 0 & 0 & 0.026 & 0 & 0 & 1\\
0.202 & 0 & 0 & 0 & -0.323 & 0 & 0 & 0 & 0.122 & 0 & 0 & 1\\
0.058 & 0 & 0 & 0 & 0.365 & -1 & 0 & 0 & 0.578 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0.706 & 0 & 0 & -1 & 0.269 & 0.026 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0.202 & 0 & 0 & 0 & -0.323 & 0.122 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0.058 & 0 & 0 & 0 & 0.365 & -0.422 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.706 & 0.269 & 0.026 & -1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.202 & 0.677 & 0.122 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.058 & 0.365 & 0.578 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Q を係数行列とする連立方程式の解として，以下の定常分布ベクトルを得る.

$$\{W\}=\{0.326,\ 0.271,\ 0,\ \vdots\ 0.034,\ 0.075,\ 0.041,\ \vdots\ 0,\ 0.134,\ 0.119,\ \vdots\ 0,0,0\}$$

これより，定常的に貯水池が空になる確率は 0.597 で，その内訳は,

0.326……流入量が 0 で空水（つまり放流できずに空）になる場合に対応.

0.271……流入量が 1 で空水（つまり 1 単位の放流をして空）になる場合に対応.

0 ……流入量が 2 で空水（目標放流量が 1 だから，2 の流入があれば空にはならない）の場合に対応.

であることなどがわかる.

このように，2 段階推移モデルを用いると，流量の自己相関性を考慮できるだけでなく，定常分布において，各貯水量の状態確率の内訳を知ることができる.

5. 従来の計算結果との比較

相関離散流量分布を受ける貯水池の貯水量定常分布は，現在の段階で，Phatarfod による上限 2 の 3 状態二項分布を受ける貯水池に関する厳密解[4]，および長尾・池田によるより一般的な流量分布を受ける貯水池に関する近似解[5]が得られている．そこで，これら 2 つの手法と 2 段階推移モデルによる結果（2 段階推移法）を貯水量定常分布で比較する．あわせて，数値実験により貯水量定常分布を求めその結果とも比較する.

（1） 数値実験による貯水量定常分布の算定

貯水量定常分布を，相関流量系列を模擬発生させることによって求める.

a） 数値実験の方法

模擬発生の手段は，相関離散分布のパラメーター（相関二項分布の場合 a, r, ρ)[5]を仮定し，所与の条件付き分布に従う乱数を 10 000 個，100 組発生させた．乱数の再現性のチェックとして，発生させた流量系列の積率(平均，分散，自己相関係数）を求め，仮定したパラメーターによる積率との相対誤差が 5 % 以上のものは問題ありとして除外した.

表—1 数値実験における初期貯水量の影響
（K=6, M=1, r=2, a=0.4, ρ=0.6）

貯水状態確率		V0	V1	V2	V3	V4	V5
満水	平均	0.4990	0.1257	0.1035	0.0848	0.0690	0.1179
	変動係数	0.0334	0.0480	0.0616	0.0597	0.0797	0.0970
空水	平均	0.4997	0.1258	0.1035	0.0847	0.0687	0.1174
	変動係数	0.0332	0.0479	0.0608	0.0602	0.0795	0.0974
両者平均の差		-0.0007	-0.0001	0.0000	0.0001	0.0003	0.0005

貯水池条件として，貯水池容量 K，目標放流量 M，初期貯水量を設定したうえで，模擬発生させた流量系列を入力として与え，式（1）の流入量の予測が不可能な場合の貯水量方程式に従って，貯水量推移を模擬し，各貯水量状態の生起回数の頻度分布を貯水量定常分布とした.

b） 初期貯水量の影響

他の計算法との比較を行う前に，初期貯水量を，両極端な場合として，初期満水と初期空水の 2 通りに設定し，初期貯水量が定常分布へ与える影響を検討する.

貯水池容量 $K=6$，目標放流量 $M=1$，流入量分布パラメーターを $r=2$, $a=0.4$, $\rho=0.6$ とし，数値実験により貯水量定常分布を求めた結果を表—1 に示す．両者を比較すると，たとえば空水確率において，初期空水貯水量の方がやや大きい値を示し，初期貯水量の影響がわずかに認められる．しかし，その差の絶対値は 0.0007 以下で，相対値としてみると 0.14% 以下に過ぎず，無視し得るオーダーである．この程度の貯水池容量であれ

ば,流量系列の発生個数は上述の値で十分だと思われる．したがって，以後数値実験解は初期空水の条件による結果で代表させることにする．

もちろん貯水池容量が大きければそれだけ初期貯水量の影響も大きくなろうが，その影響は，流量系列の発生個数を増やすことで減少させ得るものと予想している．

(2) Phatarfod の厳密解との比較

貯水池容量 $K=3,6$ の場合で，目標放流量 $M=1$，流入量分布パラメーターを $r=2$，$\alpha=0.4$，$\rho=0.6$ とした場合の2段階推移法，Phatarfod の厳密解，数値実験による貯水量定常分布の計算結果をそれぞれ**表—2,3** に示す．どちらの場合も，2段階推移法と厳密解はその値が小数点以下6桁まで完全に一致している．また数値実験解も，この程度の差であれば，ほぼ同じ値とみなし得ると思われる．

したがって，Phatarfod の厳密解と2段階推移法は，酔歩理論と行列演算と計算方法は違うものの，相関離散流量を受ける貯水池のモデル化といった両者の狙いは，どちらも的を得たものと考えてよいであろう．なお，このほかいくつかのケースにおいて両者の比較を行ったがいずれも解は一致した．

(3) 近似解との比較

Phatarfod の厳密解の改良として，長尾らが近似解[5]を提案したことは，1.（1）で触れたが，その近似解と2段階推移法との比較を行う．ここでいう近似解とは，渇水状態において，貯水量過程を模擬した酔歩粒子の挙動として，満水を意味する上端の不可入壁を越す場合はちょうど壁に達する場合に比べて無視し得るとしたものである．彼らは，近似精度は渇水傾向が強いほどよくなることを予想している．

貯水池容量 $K=6$，流入量分布パラメーターを $r=4$，$\alpha=0.2$，$\rho=0.6$ とし，目標放流量 $M=1,2,3$ とした場合の2段階推移法，近似解による貯水量定常分布の計算結果を**表—4〜6** に示す．なお $M=1$ の場合は数値実験解もあわせて比較した．**表—4** をみると，数値実験解と2段階推移法はほぼ値が一致している．これより，誤差の介在する危険を蔵する莫大な量の数値実験を行わなくても，2段階推移法によって貯水量定常分布が容易に求められることが示唆される．また，空水確率に注目して，**表—4〜6** で近似解と2段階推移法を比較すると，目標放流量が大きくなるほど，つまり渇水傾向が強くなるほど両者の差が小さくなっており，長尾らの予想を裏付ける結果になっている．

6. まとめ

(1) 得られた成果

得られた成果を箇条書にして以下に示す．

i）2段階推移法の概念の定式化により，相関離散流量を受ける貯水池の貯水量定常分布の導出方法を，計算例を合わせ，具体的に述べた．

ii）貯水量定常分布において，数値実験解と2段階推移法を比較することで，2段階推移法の妥当性を示した．

iii）Phatarfod の厳密解と2段階推移法による解が完全に一致することを示した．

iv）長尾らが提案した近似解と比較することで，近似解の有用性を示した．

(2) あとがき

今回は,貯水量定常分布の導出方法について述べたが,貯水量推移が推移確率行列で表わせることは，貯水池の評価において量的・時間的のさまざまな面で応用が可能であり，従来近似的にしか取り扱い得なかった問題が，厳密に解析可能となろう．また，定式化の項でも触れたが，利水用貯水池だけでなく，多目的貯水池にも適用可能であるので,治水をも合わせた評価が行えるであろう．

なお，最後に，以上の記述は相関離散分布として理論分布にそった形で行ったが，本来この計算は，経験分布

表—2 各手法における貯水量定常分布（その1）
($K=3$, $M=1$, $r=2$, $\alpha=0.4$, $\rho=0.6$)

貯水状態確率	V0	V1	V2
2段階推移法	0.5974	0.1500	0.2526
厳密解	0.5974	0.1500	0.2526
数値実験解	0.5958	0.1494	0.2548

表—3 各手法における貯水量定常分布（その2）
($K=6$, $M=1$, $r=2$, $\alpha=0.4$, $\rho=0.6$)

貯水状態確率	V0	V1	V2	V3	V4	V5
2段階推移法	0.5014	0.1259	0.1030	0.0843	0.0690	0.1163
厳密解	0.5014	0.1259	0.1030	0.0843	0.0690	0.1163
数値実験解	0.4997	0.1256	0.1035	0.0847	0.0687	0.1174

表—4 各手法における貯水量定常分布（その3）
($K=6$, $M=1$, $r=4$, $\alpha=0.2$, $\rho=0.6$)

貯水状態確率	V0	V1	V2	V3	V4	V5
2段階推移法	0.4958	0.1244	0.0983	0.0814	0.0691	0.1310
近似解	0.4755	0.1137	0.0994	0.0870	0.0761	0.1481
数値実験解	0.4934	0.1240	0.0993	0.0816	0.0692	0.1325

表—5 各手法における貯水量定常分布（その4）
($K=6$, $M=2$, $r=4$, $\alpha=0.2$, $\rho=0.6$)

貯水状態確率	V0	V1	V2	V3	V4
2段階推移法	0.9404	0.0332	0.0144	0.0068	0.0052
近似解	0.9632	0.0176	0.0096	0.0053	0.0043
両者の差	-0.0228	0.0156	0.0048	0.0015	0.0009

表—6 各手法における貯水量定常分布（その5）
($K=6$, $M=3$, $r=4$, $\alpha=0.2$, $\rho=0.6$)

貯水状態確率	V0	V1	V2	V3
2段階推移法	0.9972	0.0020	0.0005	0.0001
近似解	0.9999	0.0001	0.0000	0.0000
両者の差	-0.0027	0.0019	0.0005	0.0001

をそのまま用いても何ら差し支えないことはいうまでもないので，この面の汎用性も有効な点である．

補稿1 貯留推移の推移確率表現

（1） 溢水しない場合

式（7）を各要素について表現すると次式のようになる．

$$H^s_{j2}=\sum_{i=0}^{K} H^s_{i1}\cdot g_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)'$$

貯水状態 i から j へ推移するには，$j-i$ の流入があればよい．したがって，流量発生の可能性のない場合，式（6）に対応して，

$g_{ij}=\{0\}$ （$j-i>n$ または $j-i<0$)

である．

可能性のある場合，$j-i$ の流入があることが条件であるから，$H^s_{j2}=(h_{0j}, h_{1j}, \cdots\cdots, h_{nj})$ のうち，$h_{(j-i)j}$ 以外の要素への推移は起こり得ない．したがって，g_{ij} において $j-i$ 列以外の要素は0である．$j-i$ 列には，先行条件である時間間隔 $\Delta(s-1)$ の流入量$(0,1, \cdots\cdots, n)$ に対応して，

$$h_{(j-i)j2}^{\;s}=(h_{0i},\ h_{1i},\ \cdots\cdots,\ h_{ni})^s_1 \times(g_{0(j-i)},\ g_{1(j-i)},\ \cdots\cdots,\ g_{n(j-i)})^T$$

となる．ただし，$(\ \ )^T$ は $(\ \ )$ の転置行列である．

式（4）は，以上を行列表示したものである．

（2） 溢水する場合

式(7)の最後の列の各要素は以下のように表現できる．

$$H^s_{K2}=\sum_{i=0}^{K} H^s_{i1}\cdot g_{iK}$$

貯水状態 i から溢水するには，$K-i$ 以上の流入があればよい．したがって，流入量発生の可能性のない場合，

$g_{iK}=\{0\}$ （$K-i>n$ の場合）$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)'$

可能性のある場合，$K-i$ 以上の流入があることを要するから，$H^s_{K2}=(h_{0K}, h_{1K}, \cdots\cdots, h_{nK})$ のうち，$h_{(K-i)K}$，$(K-i\leqq n)$ 以外の要素への推移は起こり得ない．したがって，g_{iK} において $K-i$ より小さい列の要素は0である．$K-i+y$ $(y=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-K+i)$ 列には，先行条件である時間間隔 $\Delta(s-1)$ の流入量 $(0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ に対応して，

$$h_{(K-i+y)K2}^{\;s}=(h_{0i},\ h_{1i},\ \cdots\cdots,\ h_{ni})^s_1\times(g_{0(K-i+y)},\ g_{1(K-i+y)},\ \cdots\cdots,\ g_{n(K-i+y)})^T$$

となる．以上の行列表示が式（5）である．

補稿2 放流推移の推移確率表現

式（10）を各要素について表現すると次式のようになる．

$$H^{s+1}_{j1}=\sum_{i=0}^{K} H^s_{i2}\cdot r_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)'$$

貯水状態 i から j へ推移する場合，H^s_{i2} の各要素は，H^{s+1}_{j1} の各要素へ対応する．したがって，r_{ij} は推移する場合は単位行列，推移しない場合は零行列になる．

（1） 推移する場合

a） 目標放流量を放流できた場合

i から $M(i)$ の放流を行うから

$j=i-M(i)$

b） 目標放流量を放流できない場合

i から可能な限り $M(i)$ に近い量を放流して0へ推移するから，

$j=0$ かつ $i-M(i)<0$

（2） 推移しない場合

上記以外

これらの行列表示が式（8）である．

参考文献

1) Moran, P. A. P.：A probability theory of dams and storage system, Aust. Jour. Appl. Sci., Vol. 5, pp. 116～124, 1954.
2) Lloyd, E. H.：Reservoirs with serially correlated inflows, Technometrics, Vol. 5, No. 1, pp. 85～93, 1963.
3) Klemeš, V.：A Two-Step probabilistic model of storage reservoir with correlated inputs, Water Resource Research, Vol. 6, No. 3, pp. 756～767, June, 1970.
4) Phatarfod, R. M. and Mardia, K. V.：Some results for dams with Markovian inputs, Jour. Appl. Prob., Vol. 10, pp. 166～180, 1973.
5) 長尾正志・池田吉隆：流量相関を考慮した利水用貯水池の機能評価に関する確率過程論の応用，第23回水理講演会論文集，pp. 247～255, 1979.
6) 長尾正志・羽鳥明満・浅野和広：利水用貯水池機能の評価のための単純化された相関流量の解析，第28回水理講演会論文集，pp. 1～6, 1984.
7) 長尾正志：利水用貯水池の取水機能の信頼性評価に関するマルコフ連鎖理論の応用，第21回水理講演会論文集，pp. 133～141, 1977.

(1988.12.1・受付)