

## 側岸に樹木を有する直線礫床河川の安定横断河床形状

STABLE CHANNEL CROSS-SECTION OF STRAIGHT GRAVEL RIVERS  
WITH TREES ON BANKS

泉 典洋\*・池田駿介\*\*

By Norihiro IZUMI and Syunsuke IKEDA

Effect of bank vegetation on the stable channel cross-section of straight gravel rivers is studied theoretically, in which singular perturbation and matched asymptotic expansion techniques are employed to derive the lateral distributions of depth-averaged fluid velocity and the bed shear stress. A condition of sediment incipient motion is imposed at the junction of the bed and the banks to derive the stable depth, and a formula for resistance to flow is used to obtain the stable width. It is revealed that a thicker vegetation yields a larger depth and a smaller width. Increasing discharge is found to increase the effect of vegetation. The analysis is found to agree reasonably well with available field data.

*Keywords: vegetation, singular perturbation, matched asymptotic expansion, gravel rivers, self-formed channels*

## 1. 序 論

環境保全の重要性が認識されている今日にあって、ウォーターフロントに代表される水辺環境に対する関心には特に高いものがある。河川環境についても例外ではなく、河岸やその周辺の植生の保存および植樹も、今後積極的に行われていくであろう。このような要請に応えるには植生の水理学的影響の解明がまず行われなければならない。従来の研究は、植生の流水抵抗に関するものがほとんどであり、河道形状に対する影響については若干の野外測定値が存在するのみである。以上のことから、本研究では、側岸部に植生が存在する河道の動的安定形状とそのスケールについて理論的研究を行い、実河川に適用して植生の効果を明らかにする。

移動床を有する流路の境界面は、流水と河床材料との相互作用によって決定される。境界面がどのような形状で安定となるかという問題は、移動床水理学上の重要な課題の1つとして、従来から数多くの研究が行われてきた<sup>1)~5)</sup>。この問題は、自らの河道を維持しながら下流へ

土砂を輸送する動的安定河床形状の問題として一般化される。Parker<sup>6)</sup>は、乱流による運動量の横断方向輸送を考慮することによって、この動的安定問題を解明することに初めて成功した。Ikedaら<sup>7)</sup>はその理論をさらに発展させ、混合粒径の効果を取り入れることによって理論値と実験値および野外実測値との良好な一致をみている。本研究はこれらの理論をもとにして、河岸に植生が存在する場合、安定河床形状がどのような影響を受けるかを明らかにしたものである。なお、ここで対象としているのは北アメリカでよくみられるような自然直線礫床河川であり、植生は樹木群を想定している。

## 2. 樹木のない河道の流速と底面せん断力の分布

まず、樹木のない場合を考える。Fig. 1に示したように動的平衡状態にある河床形状はJ点を境界点として、河床の土砂が輸送されている中央部と、静的平衡状態にある側岸部からなっており、これらの2つの領域はJ点で滑らかにつながっている。もし流砂が存在する領域に横断河床勾配が存在すれば、横断方向に流砂量が生じ河床は安定となり得ない<sup>8)</sup>。したがって中央部は平坦となっており、次式が成り立つ。

$$D = D_c. \quad (0 \leq y \leq B_c/2) \dots \dots \dots (1)$$

\* 学生会員 工修 埼玉大学大学院理工学研究科  
(〒338 浦和市下大久保 255)

\*\* 正会員 工博 埼玉大学教授 工学部建設基礎工学科  
(同上)

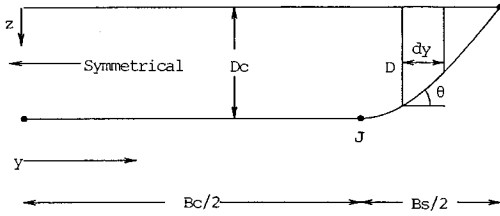


Fig. 1 Definition diagram of river without bank vegetation.

ここに、 $D$  は水深、 $D_c$  は中央部の水深で一定、 $B_c$  は中央部の幅である。もし側岸部で土砂が移動していれば横断方向の土砂輸送が生じ、限界掃流力状態となるまで川は広がることとなる。したがって安定状態においては側岸部では、常に静的平衡状態にあり、斜面上の砂粒子に働く力が釣り合っている。したがって Lane<sup>3)</sup> が導いた静的平衡の式を用いて次のように表わされる。

$$\left(\frac{\delta}{\delta_c \cos \theta}\right)^2 + \left(\frac{1+\mu\beta}{\mu}\right)^2 \left(\frac{dD}{dy}\right)^2 = \mu^2 \left(\frac{1+\mu\beta}{\mu} - \beta \frac{\delta}{\delta_c \cos \theta}\right)^2 \quad (B_c/2 \leqq y \leqq B/2) \quad (2)$$

ここに、 $\delta = \tau/\rho g S$ 、 $\tau$  は底面せん断応力、 $\delta_c = \tau_c/\rho g S (=D_c)$ 、 $\tau_c$  は水路中心における底面せん断応力、 $\rho$  は水の密度、 $g$  は重力加速度、 $S$  は縦断方向河床勾配、 $\mu$  はクーロン静止摩擦係数、 $\beta$  は砂粒子に働く揚力係数と抗力係数の比、 $B$  は水面における全川幅、 $\theta$  は河床の横断方向傾斜角である。以後、添え字  $c$ 、 $s$  はそれぞれ河道中央部と側岸部の値を表す。河床に働くせん断力は次のように表わされる<sup>9)</sup>。

$$\frac{\tau}{\cos \theta} = \rho g D S + \frac{d}{dy} \int_0^D (-\rho \bar{u}'v') dz \quad (3)$$

ここに、 $u'$ 、 $v'$  はそれぞれ流下方向、横断方向の流速変動成分である。式 (3) において乱流による運動量輸送を微小として無視するならば  $\tau$  は次のようになる。

$$\tau = \rho g D S \cos \theta \quad (4)$$

流砂量を算定する際、式 (4) を用いると平坦な部分ではせん断力が一定となり、したがって中央部では一様な流砂量が生じることになる。ところが、 $\tau$  が J 点で側岸部に滑らかにつながる必要性から側岸部に流砂が存在することになり、川幅は際限なく広がっていく。このように式 (4) を用いる限り、動的安定河床形状の維持機構を説明することは不可能となる。元来、式 (2)、(3) は河床形状と流れの相互作用を表わしており、せん断力分布を厳密に求めるには 2 つの式を連立させて解く必要がある。ところが、乱流による運動量輸送を考慮しながら連立して解くのは、解析的には不可能である。そこで Parker<sup>6)</sup> は、まず式 (2)、(4) を連立させて側岸部の

$D$  を求め、その側岸形状と式 (1) で表わされる中央部の形状に対して、乱流による運動量輸送によって再配分された底面せん断応力を求めている。この際、彼は Lundgren・Jonsson<sup>9)</sup> の式を用いて底面せん断力を求めているが、これは、河床に対して垂直方向に、流速分布が対数則に従っているという仮定のもとに導かれたものであり、横断方向に緩やかに変化する河床形状をもった流路を対象にしている。河道の一部に樹木がある場合には、流速分布が必ずしも対数則に従わないばかりか<sup>10)</sup>、河床形状も緩やかに変化する保証はない。したがって、本研究では後に樹木の効果を取り扱うため、Lundgren・Jonsson の式を用いず、以下に述べるように、水深平均流速に抵抗係数を乗じてせん断力を求める方法をとる。

底面せん断応力と乱流による運動量の横断方向輸送量は、流速を用いてそれぞれ次のように表わされる。

$$\tau = \rho C_f \bar{u}^2 \quad (5)$$

$$\int_0^D (-\rho \bar{u}'v') dz = \rho \epsilon_y D \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (6)$$

ここに、 $\bar{u}$  は水深平均流下方向流速、 $\epsilon_y$  は横断方向への運動量拡散係数であり、このような植生内部でも外部とほぼ同じ値をとることが観測されている<sup>10)</sup>。これを用いて式 (3) を書き直すと次のようになる。

$$\frac{\rho C_f \bar{u}^2}{\cos \theta} = \rho g D S + \rho \epsilon_y \frac{d}{dy} \left( D \frac{d\bar{u}}{dy} \right) \quad (7)$$

また、aspect 比 ( $B/D_c$ ) が十分に大きく、側岸の影響が河道中央に及ばない場合には次式が成立する。

$$\tau_c = \rho C_f \bar{u}_c^2 = \rho g D_c S \quad (8)$$

式 (7) を式 (8) で割ると、次のようになる。

$$\frac{\sigma}{\cos \theta} = \frac{\phi^2}{\cos \theta} = s + \nu \frac{d}{d\eta} \left( s \frac{d\phi}{d\eta} \right) \quad (9)$$

ここに、 $\sigma = \tau/\tau_c$ 、 $s = D/D_c$ 、 $\nu = \epsilon_y D_c / [C_f \bar{u}_c (B_s/2)^2]$ 、 $\phi = \bar{u}/\bar{u}_c$ 、 $\eta = (2y - B_c)/B_s$ 、である。

$\epsilon_y = \alpha u_* c D_c$  と仮定すれば、 $\nu$  は

$$\nu = \frac{\epsilon_y D_c}{C_f \bar{u}_c (B_s/2)^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{C_f}} \left( \frac{2 D_c}{B_s} \right)^2 \quad (10)$$

となる。Webel・Schatzman<sup>11)</sup> によれば流路床が十分に粗であれば、 $\alpha$  はほぼ一定の値 0.13 をとる。また通常の礫床河川では、 $C_f$  の値は 0.01 程度であることが知られているから、 $\alpha/\sqrt{C_f}$  はほぼ 1 となり、 $2 D_c/B_s$  が微小であれば  $\nu$  も微小となる。したがって乱流による運動量輸送の項を無視することは、式 (9) において  $\nu$  の一次以上のオーダーの項を無視することに対応している。

側岸形状を表わす式 (2) は同様な無次元化操作によって次のようになる。

$$\left(\frac{\sigma}{\cos \theta}\right)^2 + \left(\frac{1+r}{\mu}\right)^2 \lambda \left(\frac{ds}{d\eta}\right)^2 = \left(1+r-r \frac{\sigma}{\cos \theta}\right)^2 \quad (11)$$

ここに、 $\lambda=(2D_c/B_s)^2$ 、 $r=\mu\beta$ であり、 $0\leq\eta\leq 1$ の範囲で式(11)は成立する。

まず、式(9)の $\nu^0$ のオーダーを用いて式(11)を解く。 $\nu^0$ のオーダーは $\sigma/\cos\theta=s$ であるので、これを式(11)に代入して次の解が得られる。

$$s=\frac{1}{1-r}[\cos(\eta\cos^{-1}r)-r] \dots\dots\dots(12)$$

$$\lambda=\left(\frac{\mu}{\cos^{-1}r}\right)^2\left(\frac{1-r}{1+r}\right) \dots\dots\dots(13)$$

水際には水中安息角となるが、この値が40度のとき、 $\mu=0.84$ 、 $r=0.714$ となり $\lambda=0.196$ となる。

次に、式(12)のように得られた側岸形状および式(1)で表わされる中央部 $s$ に対して、せん断力分布を式(9)を用いて解く。式(9)から中央部と側岸部に対し、それぞれ次の2つの方程式を得る。

$$1+\nu d^2\phi/d\eta^2-\phi^2=0 \dots\dots\dots(14)$$

$$s+\nu d(sd\phi/d\eta)/d\eta-\phi^2/\cos\theta=0 \dots\dots\dots(15)$$

$\nu$ は前述のように微小であるので、 $\phi$ は $\nu$ の漸近展開により

$$\phi=\bar{\phi}_0+\nu\bar{\phi}_1+\nu^2\bar{\phi}_2+\dots \dots\dots(16)$$

と表わされることが期待される。式(16)を式(14)に代入すると $\nu^0$ 、 $\nu^1$ のオーダーに対し次式が得られる。

$$1-\bar{\phi}_0^2=0 \dots\dots\dots(17)$$

$$d^2\bar{\phi}_0/d\eta^2-2\bar{\phi}_0\bar{\phi}_1=0 \dots\dots\dots(18)$$

式(17)、(18)の解として $\phi=1$ が得られるが、この解は式(14)の1つの厳密解となっており、 $\eta=-B_c/B_s$ (河道中央)での境界条件を満たしている。ところが、 $\eta=0$ (接合点J)での境界条件は満たしていない。このことは式(17)において2次の微分項が微小として無視されていることによっており、式(14)において $\phi$ の $\eta$ に関する2階微分の項が、 $\eta=0$ 近傍で無視できないほど大きくなっていることを示している。すなわち $\phi=1$ は、特異摂動問題における外部解となっている。式(14)の第2項が他の項とほぼ同じオーダーになるように特異摂動法<sup>12)</sup>に従い、内部変数 $p=\eta/\nu^{1/2}$ を導入する。このとき、式(14)、(15)は

$$1+d^2\phi/dp^2-\phi^2=0 \dots\dots\dots(19)$$

$$s+d(sd\phi/dp)/dp-\phi^2/\cos\theta=0 \dots\dots\dots(20)$$

となる。式(19)に $\phi$ の漸近展開

$$\phi=\phi_0+\nu\phi_1+\nu^2\phi_2+\dots \dots\dots(21)$$

を代入すると $\nu^0$ 、 $\nu^1$ のオーダーに対し次の方程式が得られる。

$$1+d^2\phi_0/dp^2-\phi_0^2=0 \dots\dots\dots(22)$$

$$d^2\phi_1/dp^2-2\phi_0\phi_1=0 \dots\dots\dots(23)$$

式(22)の1つの厳密解は $\phi_0=1$ であるから、これを用いて式(23)を解くと $\phi_1$ の一般解は次のようになる。

$$\phi_1=C_0\exp(\sqrt{2}p)+C_1\exp(-\sqrt{2}p) \dots\dots\dots(24)$$

外部解と内部解の接続条件<sup>12)</sup>から $C_1=0$ となり、式(24)は次のようになる。

$$\phi_1=C_0\exp(\sqrt{2}p) \dots\dots\dots(25)$$

式(20)についても同様に解くことができるが、この際 $s$ 、 $1/\cos\theta$ が次のように表わされることに注意する必要がある。

$$s=s(0)+s_{nn}(0)\eta^2/2+\dots\dots\dots(26)$$

$$=1+\nu s_{nn}(0)p^2/2+O(\nu^2) \dots\dots\dots(26)$$

$$1/\cos\theta=(1+\tan^2\theta)^{1/2}$$

$$=1+(dD/dy)^2/2-(dD/dy)^4/8\dots\dots\dots(27)$$

$$=1+\lambda(ds/d\eta)^2/2+O(\lambda^2) \dots\dots\dots(27)$$

ここに、 $\lambda=(\sqrt{C_r}/\alpha)\nu$ の関係があることを考慮し、式(21)、(26)、(27)を式(20)に代入し $\nu^0$ 、 $\nu^1$ のオーダーに対し次式を得る。

$$1+d^2\phi_0/dp^2-\phi_0^2=0 \dots\dots\dots(28)$$

$$s_{nn}(0)p^2/2+s_{nn}(0)p^2(d^2\phi_0/dp^2)/2$$

$$+d^2\phi_1/dp^2+s_{nn}(0)pd\phi_0/dp-2\phi_0\phi_1=0 \dots\dots\dots(29)$$

ここに、 $s_{nn}$ は $s$ の $\eta$ による2階微分を表わしている。式(28)の自明の解 $\phi_0=1$ を用いて式(29)を解くと $\phi_1=\bar{C}_0\exp(-\sqrt{2}p)-\gamma(p^2+1)/2$ となる。ここに、 $\gamma=-s_{nn}(0)/2$ である。

接合点( $p=0$ )では流速とせん断力が連続でなければならない。すなわち $\phi$ および $d\phi/dp$ が連続となる。この条件を用いて $C_0$ 、 $\bar{C}_0$ を決定すると

$$C_0=-\gamma/4, \bar{C}_0=\gamma/4 \dots\dots\dots(31), (32)$$

が得られる。以上より接合点上での無次元流速 $\phi_j$ は次のように表わされる。

$$\phi_j=1-\nu\gamma/4 \dots\dots\dots(33)$$

ここで、 $\nu$ の値を調べてみる。 $\alpha$ としては前述した値0.13を用いる。 $C_r$ の値としてはKeuleganの抵抗式<sup>13)</sup> $C_r=|6+2.5\ln(D_c/k)|^2$ を用い、 $5\leq D_c/k\leq 100$ の範囲で平均した値0.00445を用いる。ここに $k$ は相当粗度である。また、前述の議論から $\lambda=0.196$ である。以上より $\nu$ の値は

$$\nu=\alpha\lambda/\sqrt{C_r}=0.382 \dots\dots\dots(34)$$

となり、 $\nu$ が微小であるという仮定は妥当であることがわかる。また、このとき式(12)において $r=0.714$ を用い $\gamma$ を求めると $\gamma=1.05$ となり、 $\phi_j=0.900$ となる。前にも述べたように接合点( $p=0$ )においてちょうど限界掃流力となっているので次式が成立する。

$$\frac{\tau_{c*}^*}{\tau_{th*}^*}=\frac{1}{\phi_j^2}=1.23 \dots\dots\dots(35)$$

ここに、 $\tau_{c*}^*$ は河道中央付近のせん断力、 $\tau_{th*}^*$ は無次元限界掃流力である。Ikedaら<sup>7)</sup>はLundgren・Jonssonの式から接合点でのせん断力と河道中央付近の底面せん断力との関係を求め、 $\tau_{c*}^*/\tau_{th*}^*$ が $D_c/k$ の鈍い関数であることから、 $5\leq D_c/k\leq 100$ の範囲での平均値を1.23とし

ている。ここで得られた値はこの値と一致し、この理論の妥当性が示唆される。

3. 樹木を有する側岸部の形状

樹木を有する場合も、河道は中央部と側岸部に分けられる。側岸部は静的平衡状態にあり土砂が移動しないため樹木は存在し続けることができる。ところが、中央部では土砂が下流へ輸送されているため、樹木は進出することができない。したがって、樹木は側岸部にのみ存在し、平坦な中央部では樹木は存在しない (Fig. 2 参照)。このとき、側岸部の底面せん断応力は次のように表わされる。

$$\frac{\tau}{\cos \theta} = \frac{\rho C_r \bar{u}^2}{\cos \theta} = \rho g D S - D_r + \rho \epsilon_y \frac{d}{dy} \left( D \frac{d\bar{u}}{dy} \right) \dots\dots\dots (36)$$

ここで、 $D_r$  は樹木による抗力であり次のように表わされる。

$$D_r = \rho C_D (a / \cos \theta) D \bar{u}^2 / 2 \dots\dots\dots (37)$$

$a$  は樹木の密度を表わすパラメーターで  $d / (l_x l_y)$  (Fig. 3 参照) と表わされる。側岸部に働くせん断力を流路中央の値を用いて無次元化すると式 (36) は

$$\frac{\sigma}{\cos \theta} = s - \frac{\chi s \phi^2}{\cos \theta} + \nu \frac{d}{d\eta} \left( s \frac{d\phi}{d\eta} \right) \dots\dots\dots (38)$$

となる。ここに、 $\chi = C_D a D_c / (2 C_r)$  である。 $\nu^0$  のオー

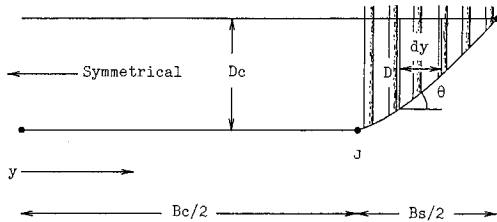


Fig. 2 Definition diagram of river with bank vegetation.

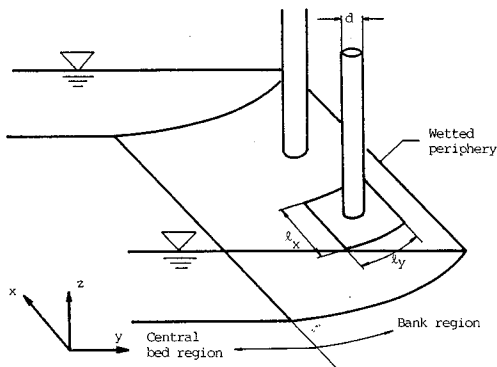


Fig. 3 Definition sketch of bank vegetation.

ダーまでとり、 $\sigma = \phi^2$  を用いると、式 (38) は次のように書き換えられる。

$$\sigma / \cos \theta = s - \chi s \sigma / \cos \theta \dots\dots\dots (39)$$

式 (39) から次式が得られる。

$$\frac{\sigma}{\cos \theta} = \frac{s}{1 + \chi s} \dots\dots\dots (40)$$

これを式 (11) に代入し、 $s (= D / D_c)$  について解くと次のような解が得られる。

i)  $\chi < 1$  の場合

$$\begin{aligned} & (1 - \theta^2 + \chi \Omega \theta) \cos^{-1} \left( \frac{1 - \theta^2}{\Omega} s - \theta \right) \\ & + \chi \Omega \sin \left\{ \cos^{-1} \left( \frac{1 - \theta^2}{\Omega} s - \theta \right) \right\} \\ & = \lambda^{-1/2} \frac{\mu}{\Omega} (1 - \theta^2)^{3/2} \eta \\ & + (1 - \theta^2 + \chi \Omega \theta) \cos^{-1} [1 - \chi (1 + \theta)] \\ & + \chi \Omega \sin [\cos^{-1} [1 - \chi (1 + \theta)]] \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

ここに

$$\lambda^{1/2} = \mu (1 - \theta^2)^{3/2} / A_1 \dots\dots\dots (42 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} A_1 = & \Omega (1 - \theta^2 + \chi \Omega \theta) [\cos^{-1} (-\theta) \\ & - \cos^{-1} [1 - \chi (1 + \theta)]] \\ & + \chi \Omega^2 [\sin \{\cos^{-1} (-\theta)\} \\ & - \sin \{\cos^{-1} [1 - \chi (1 + \theta)]\}] \dots\dots\dots (42 \cdot b) \end{aligned}$$

ii)  $\chi > 1$  の場合

$$\begin{aligned} & (\theta^2 - 1 - \chi \Omega \theta) \cosh^{-1} \left( \frac{\theta^2 - 1}{\Omega} s + \theta \right) \\ & + \chi \Omega \sinh \left\{ \cosh^{-1} \left( \frac{\theta^2 - 1}{\Omega} s + \theta \right) \right\} \\ & = -\lambda^{-1/2} \frac{\mu}{\Omega} (\theta^2 - 1)^{3/2} \eta \\ & + (\theta^2 - 1 - \chi \Omega \theta) \cosh^{-1} [\chi (1 + \theta) - 1] \\ & + \chi \Omega \sinh [\cosh^{-1} [\chi (1 + \theta) - 1]] \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

ここに

$$\lambda^{1/2} = -\mu (\theta^2 - 1)^{3/2} / A_2 \dots\dots\dots (44 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & \Omega (\theta^2 - 1 - \chi \Omega \theta) [\cosh^{-1} \theta \\ & - \cosh^{-1} [\chi (1 + \theta) - 1]] \\ & + \chi \Omega^2 [\sinh \{\cosh^{-1} \theta\} \\ & - \sinh \{\cosh^{-1} [\chi (1 + \theta) - 1]\}] \dots\dots\dots (44 \cdot b) \end{aligned}$$

iii)  $\chi = 1$  の場合

$$\begin{aligned} & |\Omega (\Omega + 2 s)|^{3/2} / 3 \Omega + (\Omega - 2) |\Omega (\Omega + 2 s)|^{1/2} \\ & = -2 \lambda^{-1/2} \mu \eta - |\Omega (\Omega + 2)|^{1/2} (2 \Omega / 3 - 8 / 3) \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

ここに

$$\lambda^{1/2} = -2 \mu / A_3 \dots\dots\dots (46 \cdot a)$$

$$A_3 = \Omega (2 - 2 \Omega / 3) + |\Omega (\Omega + 2)|^{1/2} (2 \Omega / 3 - 8 / 3) \dots\dots\dots (46 \cdot b)$$

上式中で、 $\Omega = 1 + r$ 、 $\theta = \chi + \chi r - r$  である。また水中安息角は  $40^\circ$  とした。得られた側岸部の形状  $s$  と  $\sqrt{\lambda} = 2 D_c / B_s$  の値をそれぞれ Fig. 4, Fig. 5 に示す。1 つの

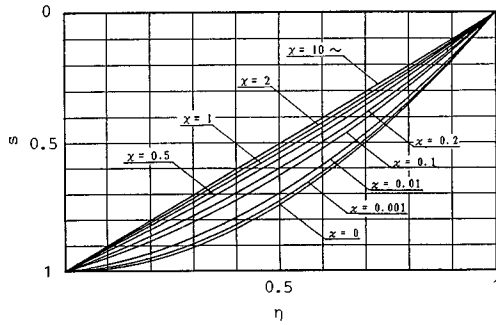


Fig. 4 Vegetated bank profiles.

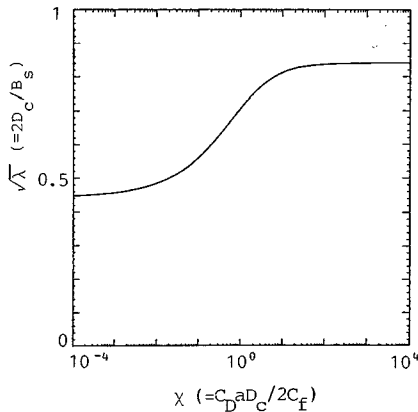


Fig. 5  $\sqrt{\lambda}$  versus  $\chi$ .

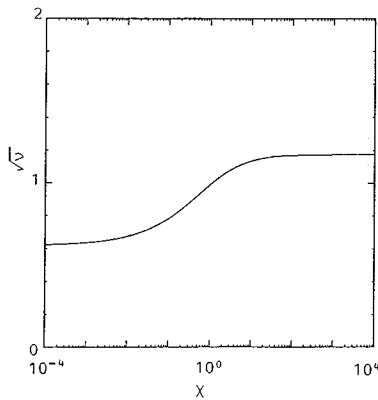


Fig. 6  $\sqrt{\nu}$  versus  $\chi$ .

例として  $\alpha=0.13$ ,  $C_r=0.00445$  を用いて求められた  $\sqrt{\nu}$  の値を  $\chi$  の関数として Fig. 6 に示す。これから  $\chi$  が増加するにつれて  $\lambda$  の値が増加するため  $\nu$  の値も増加することが知られ、 $\chi=2$  以上では  $\nu$  は 1 を越え摂動近似の精度は保証されなくなる。

#### 4. 樹木を有する河道の横断方向流速分布

樹木のない中央部および樹木のある側岸部について運動量のつり合い式はそれぞれ次のようになる。

$$\rho C_r \bar{u}^2 = \rho g D_c S + \rho \epsilon_y D_c d^2 \bar{u} / dy^2 \dots (47)$$

$$\rho C_r \bar{u}^2 / \cos \theta = \rho g D S - \rho C_p a D \bar{u}^2 / (2 \cos \theta) + \rho \epsilon_y d (D d \bar{u} / dy) / dy \dots (48)$$

前と同様に無次元化を行い、次の 2 つの式が得られる。

$$1 + \nu d^2 \phi / d\eta^2 - \phi^2 = 0 \dots (49)$$

$$s + \nu d (s d \phi / d\eta) / d\eta - (1 + \chi s) \phi^2 / \cos \theta = 0 \dots (50)$$

式 (49)、(50) は樹木がない場合と同じ手続きによって解かれるが、式 (41)~(46・b) を用いて  $s$  が次のように展開されることに注意する必要がある。

$$s = 1 + \nu^{1/2} s_{\eta}(0) p + \nu s_{\eta\eta}(0) p^2 / 2 + O(\nu^{3/2}) \dots (51)$$

$s$  が  $\sqrt{\nu}$  に対し展開されることを考慮して  $\phi$  を次のように漸近展開する。

$$\phi = \phi_0 + \nu^{1/2} \phi_1 + \nu \phi_2 + \dots \dots (52)$$

式 (52) を用いて式 (49) から、流路中央部に対する  $\nu^1$  のオーダーまでの解を求めると

$$\phi_0 = 1, \quad \phi_1 = \tilde{C}_0 \exp(\sqrt{2} p) \dots (53), (54)$$

$$\phi_2 = C_2 \exp(\sqrt{2} p) + (\tilde{C}_0^2 / 6) \exp(2\sqrt{2} p) \dots (55)$$

となる。側岸部に対しては式 (50) に (51)、(27)、(52) を代入し、次の解が得られる。

$$\phi_0 = 1 / \sqrt{1 + \chi} \dots (56)$$

$$\phi_1 = \hat{C}_0 \exp(-\sqrt{2} \sqrt{1 + \chi} p) + \frac{s_{\eta}(0)}{2(1 + \chi)^{3/2}} p \dots (57)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 = & \hat{C}_2 \exp(-\sqrt{2} \sqrt{1 + \chi} p) \\ & + \frac{\hat{C}_0^2 (1 + \chi)^{1/2}}{6} \exp(-2\sqrt{2} \sqrt{1 + \chi} p) \\ & + \frac{\hat{C}_0 s_{\eta}(0)}{4\sqrt{2} (1 + \chi)^{3/4}} p^2 \exp(-\sqrt{2} \sqrt{1 + \chi} p) \\ & - \frac{4\chi + 3}{8(1 + \chi)} \hat{C}_0 s_{\eta}(0) p \exp(-\sqrt{2} \sqrt{1 + \chi} p) \\ & + \frac{2(1 + \chi) s_{\eta\eta}(0) - (1 + 4\chi) s_{\eta}^2(0)}{8(1 + \chi)^{5/2}} p^2 \\ & + \frac{s_{\eta\eta}(0)}{4(1 + \chi)^2} - \frac{2\chi - 1}{8(1 + \chi)^3} s_{\eta}^2(0) \\ & - \frac{\sqrt{C_r} s_{\eta}^2(0)}{4\alpha(1 + \chi)^{1/2}} \dots (58) \end{aligned}$$

ここでも、積分定数の決定に際しては接合点における流速とせん断力の連続、すなわち、 $p=0$  において  $\phi$  と  $d\phi/dp$  が連続するという条件を用いている。積分定数については付録を参照のこと。

#### 5. 安定水深と安定川幅

まず、流速分布から底面せん断力分布を求め、これから安定水深を求める。接合点での無次元流速  $\phi_j$  は式 (53)

~(55) から次のように求められる。

$$\phi_j = 1 + \nu^{1/2} \tilde{C}_0 + \nu(C_2 + \tilde{C}_0^2/6) \dots (59)$$

前にも述べたように接合点では限界掃流力状態が実現している。したがって  $\tau_c^* = \tau_{th}^*$  となる。ここに  $\tau_c^*$  は無次元せん断力であり  $\tau_c^* = \tau / (R_s g d_{50} m)$ ,  $R_s = (\rho_s - \rho) / \rho$ ,  $\rho_s$  は砂の密度,  $d_{50}$  は 50% 粒径 (中央粒径),  $m = d_{90} / d_{50}$ ,  $\tau_{th}^*$  は無次元限界掃流力である。  $\tau_c^* = \phi_j^2 \tau_c^{*0}$  であるから流路中央の底面せん断力  $\tau_c^*$  と限界掃流力  $\tau_{th}^*$  との比は

$$\frac{\tau_c^*}{\tau_{th}^*} = \frac{1}{\phi_j^2} \dots (60)$$

となる。この比の値を,  $\chi$  の関数として Fig. 7 に示した。 Ikeda ら<sup>7)</sup> は限界掃流力として Egiazaroff<sup>(4)</sup> の式

$$\tau_{th}^* = \frac{0.05}{\{\log_{10}(19 m)\}^2} \dots (61)$$

を用い, 混合粒径の効果をとり入れている。式 (61) を式 (60) に代入すると流路中央部水深として

$$D_c = \frac{0.05}{\phi_j^2} R_s \{\log_{10}(19 m)\}^{-2} d_{50} m S^{-1} \dots (62)$$

が得られる。いくつかの代表的な勾配  $S$  について  $\chi$  による  $D_c/d_{50}$  の変化を Fig. 8 に示す。ここで  $m$  の値は代表的な値<sup>2)</sup> を用いてある。  $\chi$  の増加, すなわち, 樹木密度の増加に伴い安定水深は増加することがわかる。

安定流路幅を求めるには, 流路全体の運動量のつり合い式を用いる必要がある。その式は

$$\rho C_r U^2 B_c + \rho C_r \bar{u}_s^2 P_s + \rho C_p a A_s \bar{u}_s^2 / 2 = \rho g A S \dots (63)$$

となる。ここに,  $U$  は中央部での平均流速,  $\bar{u}_s$  は側岸部での平均流速,  $P_s$  は側岸部での潤辺,  $A_s$  は側岸部の断面積,  $A$  は全断面積である。  $P_s$ ,  $A_s$ ,  $A$ , および径深  $R$  の値は, 前に求めた断面形状から次のように表わされる。

$$P_s = F_1(\chi) D_c \dots (64)$$

$$A_s = F_2(\chi) D_c^2 \dots (65)$$

$$A = \left[ 1 + F_2(\chi) \frac{D_c}{B_c} \right] D_c B_c \dots (66)$$

$$R = \left[ 1 - F_3(\chi) \frac{D_c}{B_c} \right] D_c \dots (67)$$

$F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  は  $\chi$  の関数である。これらの値は式 (41) ~ (46・b) の結果から得られるが, 解析的には求められない。そこで数値的に計算した値を Fig. 9 に示した。  $\bar{u}_s$  の値は, 式 (56) で表わされる 0 次解から次のようになる。

$$\bar{u}_s = U / \sqrt{1 + \chi} \dots (68)$$

$C_r$  の値としては次式で表わされる Keulegan 式を用いた。

$$C_r = [2.5 \ln(11 R/k)]^{-2} \dots (69)$$

式 (64) ~ (69) を式 (63) に代入し  $D_c/B_c$  を微小項と

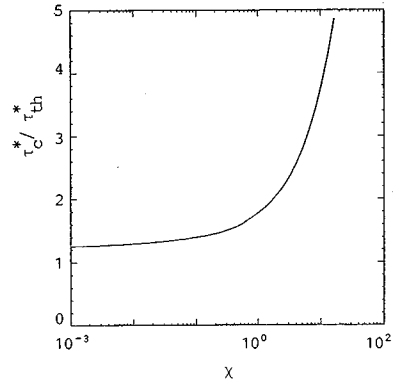


Fig. 7  $\tau_c^*/\tau_{th}^*$  versus  $\chi$ .

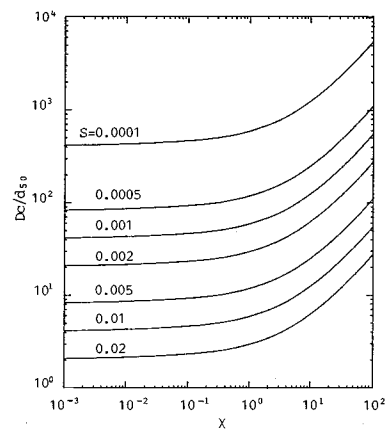


Fig. 8  $D_c/d_{50}$  versus  $\chi$  and  $S$ ;  $m=2$ .

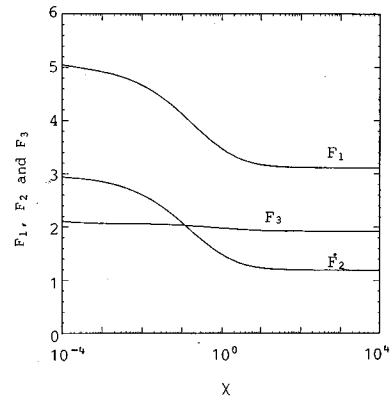


Fig. 9  $F_1$ ,  $F_2$  and  $F_3$  versus  $\chi$ .

して展開した後,  $D_c/B_c$  について 1 次のオーダーまでとると次式が得られる。

$$U = \sqrt{g D_c S} \cdot 2.5 \ln(11 D_c/k) \times \left[ 1 - \left\{ \frac{1}{2(1+\chi)} + \frac{1}{\ln(11 D_c/k)} \right\} F_3 \frac{D_c}{B_c} \right] \dots (70)$$

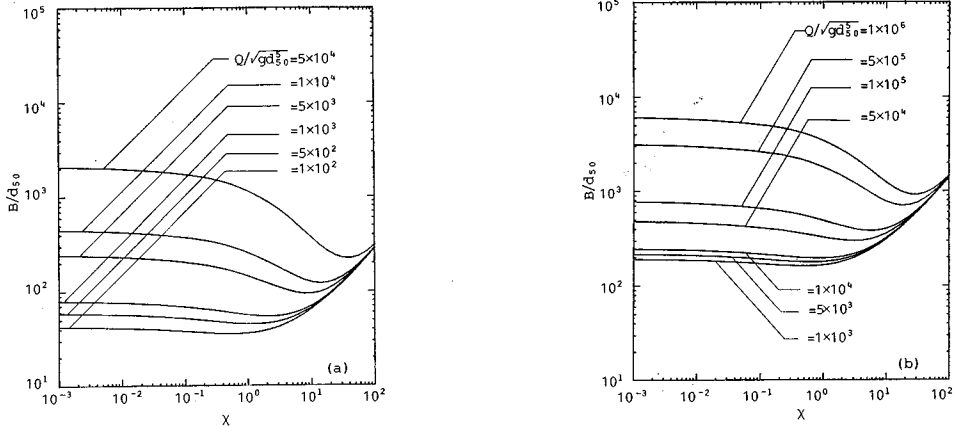


Fig. 10  $B/d_{50}$  versus  $\chi$  and  $Q/\sqrt{gd_{50}^3}$ ; (a)  $S=0.01$ ,  $m=2$ , (b)  $S=0.002$ ,  $m=2$ .

また、全流量を  $Q$  とすると次の関係式が得られる。

$$Q = UB_c D_c + \bar{u}_s A_s = U \left( 1 + \frac{F_2}{\sqrt{1+\chi}} \frac{D_c}{B_c} \right) B_c D_c \dots\dots\dots (71)$$

式 (70) と式 (71) から  $U$  を消去し、 $B_c$  について解くと次の関係式が得られる。

$$B_c = \frac{Q}{\sqrt{gD_c^3 S} \cdot 2.5 \ln(11 D_c/k)} + \left\{ \frac{F_3}{2(1+\chi)} + \frac{F_3}{\ln(11 D_c/k)} - \frac{F_2}{\sqrt{1+\chi}} \right\} D_c \dots\dots\dots (72)$$

$B_s = (2/\lambda^{1/2}) D_c$  の関係を用いると全川幅  $B$  は次のように表わせる。

$$B = \frac{Q}{\sqrt{gD_c^3 S} \cdot 2.5 \ln(11 D_c/k)} + \left\{ \frac{2}{\lambda^{1/2}} + \frac{F_3}{2(1+\chi)} + \frac{F_3}{\ln(11 D_c/k)} - \frac{F_2}{\sqrt{1+\chi}} \right\} D_c \dots\dots\dots (73)$$

代表的な  $Q$  と  $S$  について、式 (73) から得られる  $\chi$  による  $B/d_{50}$  の変化を Fig. 10 に示した。ここで  $k$  の値としては  $k=1.5 d_{90}^2$ 、 $m$  の値は代表値として  $2^7$  を用いている。 $Q$  と  $S$  の値については、野外観測の結果から、実河川に対応する値を用いた。これによると次に示す理論の適用限界  $\chi=7$  以下の領域では  $\chi$  の増加に伴って川幅が減少することがわかる。

6. 理論の適用限界

ここで、実際の河川では  $\chi$  がどの程度の値となるかについて検討する。前述のように  $\chi$  は  $C_b a D_c / (2 C_r)$  であるが、抗力係数  $C_b$  は樹木の抗力係数は樹木が単独である場合、レイノルズ数が  $10^3 \sim 10^5$  の領域では、1.0

$\sim 1.3$  であることが、数々の実験によって確かめられている<sup>15)</sup>。また Li・Shen<sup>16)</sup> は、円柱群が千鳥状に配されている場合、 $C_b$  は円柱の間隔の弱い関数となり 1.2 程度の値をとることを実験によって確かめている。また Ikeda ら<sup>10)</sup> は、流路の一部に円柱群を千鳥に配した場合、 $C_b$  は 1.6~2.0 程度の値となることを実験から得ており、このように  $C_b$  が大きくなることを造波抵抗によるものとしている。しかし、実河川における  $C_b$  の値については不明である。したがって、ここでは中間的な値として  $C_b=1.5$  を採用する。 $D_c$  は中央部における水深であり、ここでは 1 m とする。さらに  $C_r$  については、Fig. 6 において用いた 0.00445 を用いる。 $a$  は樹木の密度を表わすパラメーターであり、単位側岸面積当たりに存在している樹木の幅の和を表わしている。この値は、あまり密度が大きくなると植物の生育に支障が生じる等の生物学的制約から決定される。林業では人工的に最大密度で植えた場合 3000 本/ha 程度まで植林し得ることが知られている。また、直径が 20 cm 程度にまで成長した場合、1/3 程度間伐する必要があり、したがって  $a$  の値は  $0.04 \text{ m}^{-1}$  程度の値がとり得る最大値と考えられる。このとき、上述の  $C_b$ 、 $C_r$ 、 $D_c$  の値を用いれば、 $\chi=6.7$  となり、 $\chi$  の値としてはこの程度の値が最大値となる。

前述したように  $\chi=2$  を超えると摂動パラメーター  $\nu$  は 1 を超えることになり、 $\phi_0$ 、 $\phi_1$ 、 $\phi_2 \dots$  が同じオーダーであれば、 $\nu$  による  $\phi$  の漸近展開は発散することになる。ここでは、接合点における側岸部の内部解の各項、 $\phi_0$ 、 $\nu^{1/2} \phi_1$ 、 $\nu \phi_2$  の値が  $\chi$  によってどのように変化するかを調べ、Fig. 11 に示した。これから実河川がとり得る値  $\chi=7$  程度までは発散せず、この領域内で本理論は有効であると考えられる (限界 I)。

さらに、 $\chi=7$  までの領域で Fig. 10 をみると、流量  $Q$

がある値より小さい場合には樹木によって川幅が増大する効果が現われる。そして、その値は、勾配  $S$  が大きくなるに従って小さくなることからわかる。これは物理的には次のようなことを意味している。勾配  $S$  が同一であるとき水深は同一であるから、流量  $Q$  が小さければ川幅は小さくなり、aspect 比が小さくなる。すると式 (8) で仮定した河道中央付近で側岸部の影響が無視できるという仮定が成立しなくなる。ここでは側岸部の影響が無視できる限界として中央付近の  $\phi$  が 0.98,  $\sigma$  にして 0.96 となる範囲をこの理論の適用限界と考える。この条件を満たす aspect 比の最小値 (限界 aspect 比) の  $\chi$  による変化を式 (34), (53)~(55) を用いて求めたのが Fig. 12 である。  $\chi=7$  までの領域ではほぼ一定の値 8~9 となり、これ以上であれば適用可能であることがわかる (限界 II)。

以上の結果から川幅について適用限界を越える領域を斜線で示したのが Fig. 13 である。有効な領域でも、 $Q$  の減少によって樹木の効果は減少する。これは aspect 比が小さい河川の場合、側岸部に樹木があることによって生じる流速の欠損が、水深の増大による河積の増大を相殺するために生じるものと考えられる。

7. 理論結果と野外実測値の比較

Andrews<sup>17)</sup>, Charlton ら<sup>18)</sup>は側岸部に樹木を有する河道の流量、水深、川幅、河床材料の粒径等について実測を行っている。Andrews によれば側岸に植生 (主に樹木) がある場合にはない場合に比べて、水深が約 60 % 増加し、川幅が約 55 % 減少することが知られている。樹木の効果を考慮しない Ikeda ら<sup>7)</sup>の理論を用いて理論値と実測値の比較を行ったのが Fig. 14 である。従来の理論では樹木の密度が高い場合、水深は実測値よりも小さく、川幅は実測値よりも大きく見積りすぎていることがわかる。次に樹木の効果について式 (62) および式 (73) を用いて検討を行う。Figs. 8, 10 では代表的な  $C_r$  として 0.00445 を用いたが、ここで用いた観測データは山間部にある水深の浅い河川であり、水深と粒径の比の平均値は、7.6 (Andrews), 15 (Charlton) と通常の河川よりかなり小さくなっている。このような場合には相当粗度  $k$  の値自体が大きくなり、野外観測の結果から  $k=3d_{90}$  程度となる<sup>5)</sup>ことが知られており、ここではこの値を用いる。Andrews, Charlton らのデータには、植生の密度に関する詳しい情報がないので、 $\chi$  の合理的な値を以下で見積る。Andrews の野外測定では全測定値の平均水深は  $D_c=0.80$  m であるので、平均の  $d_{90}=0.11$  m を用いて式 (69) から平均の  $C_r=0.021$  となる。さらに前述の  $a=0.04$  m<sup>-1</sup> を用いると  $\chi=1.14$  となる。また Charlton らの野外測定値の平均水深は  $D_c=1.77$  m であ

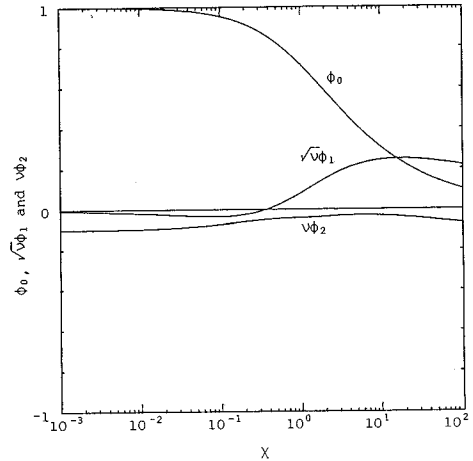


Fig. 11  $\phi_0, \sqrt{v}\phi_1$  and  $v\phi_2$  in Eq. (52) versus  $\chi$ .

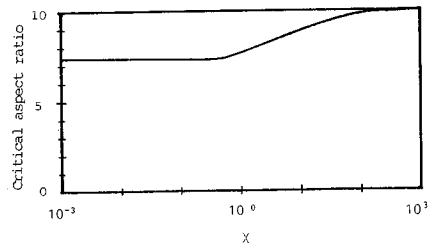


Fig. 12 Critical aspect ratio versus  $\chi$ .

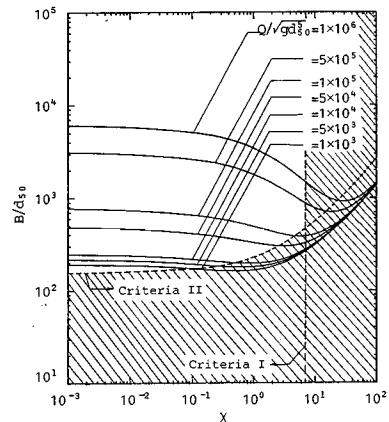


Fig. 13  $B/d_{90}$  versus  $\chi$  and  $Q/\sqrt{gd_{90}^3}$ , in which hatched region is invalid;  $S=0.002, m=2$ .

り、同様にして  $\chi=3.92$  となる。これらの  $\chi$  の値は 7 よりも十分小さく本理論の適用範囲内である。これらの値を用いて理論値と実測値の比較を示したものが Fig. 15 である。Fig. 14 でみられた植生のあるなしによる差異は今回はみられず、実測値と理論値は良好な一致を示しており、樹木の効果を考慮することの必要性が伺



われる。

### 8. 結 論

本研究により次の諸点が明らかとなった。

(1) 水深平均流れの運動量方程式を特異摂動と接合漸近展開法を用いることによって解き、水深平均流速の横断方向分布を側岸に樹木がない場合について求めた。その流速分布から底面せん断力の分布を求め接合点で限界掃流力状態にあることから  $\tau_c^*/\tau_{th}^*$  の値を求め、1.23 の値を得た。この値は、Ikeda らが Lundgren・Jonsson の式を用いることによって得た値 1.23 と一致しており、この解法の妥当性が示された。

(2) 樹木が存在する側岸部の形状は、樹木の抗力分だけ減少させた底面せん断力を用い、側岸部全域で静的安定状態にあることから求められた。それによると樹木の密度が濃くなるにつれて側岸部の勾配は急になり、最終的には側岸部全域で水中安息角となる。また、それとともに  $2D_c/B_s$  の値は増加することがわかった。

(3) 次に (1) で述べた方法を、樹木を有する河道に適用することによって底面せん断力分布を求め、これから動的安定水深が求められた。また、流路全体としての運動量平衡 (抵抗式) を考えることにより安定川幅が求められた。樹木の密度が濃くなればなるほど安定水深は大きくなり、安定川幅は小さくなるのが定量的に明らかとなった。また安定川幅が減少する効果は、流量が大きいほど顕著に現われることが示された。理論値は野外実測値と比較され、樹木が濃い場合、 $\chi = 1.14$  (Andrews), 3.92 (Charlton ら) 程度と見積った場合の値と良好に一致することが示された。

(4) 樹木の密度を表わす  $\chi$  の値は、実際の河川では最大 7 程度の値をとる。この領域での摂動解の精度を調べるため、接合点における摂動解の各オーダーの項を比較した結果、 $\chi$  が 7 までの領域では得られた摂動解は発散せず、本理論は実際の河川に対し適用可能であることがわかった。また aspect 比が小さい河川では、河道中央に側岸の影響が及ぶため本理論は適用できない。その際、適用可能な aspect 比の最小値は、8~9 となり、これ以上の値であれば本理論は適用できるこ

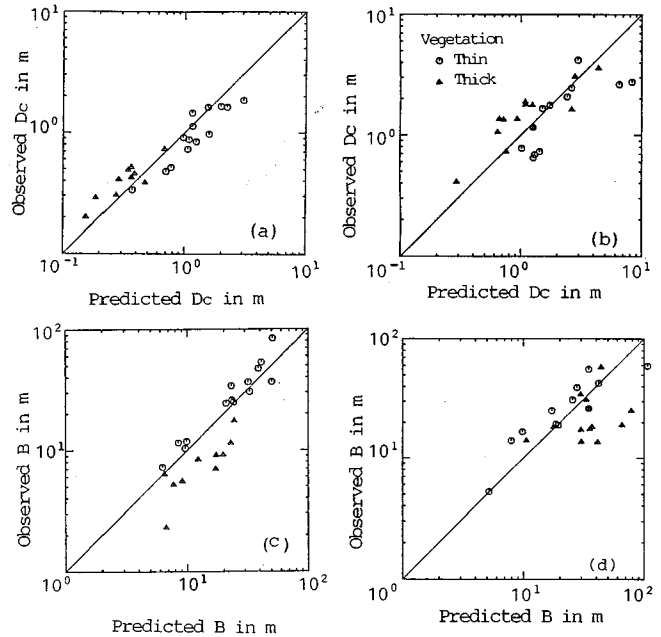


Fig. 14 Test of  $D_c$  and  $B$  by field data, in which vegetation effect is neglected; (a)  $D_c$  from Andrews, (b)  $D_c$  from Charlton *et al.*, (c)  $B$  from Andrews, (d)  $B$  from Charlton *et al.*

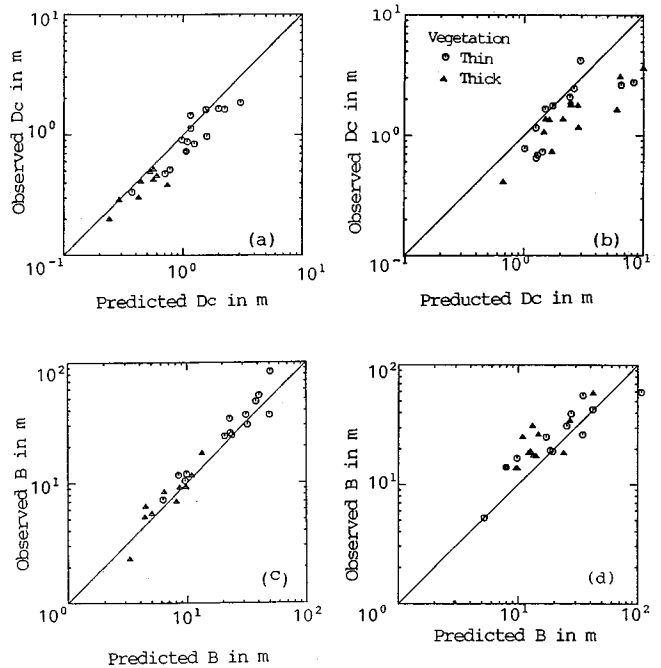


Fig. 15 Test of present theory by field data; (a)  $D_c$  from Andrews, (b)  $D_c$  from Charlton *et al.*, (c)  $B$  from Andrews, (d)  $B$  from Charlton *et al.*

とがわかった。

謝 辞：本研究に際して文部省科学研究費“植生が河川の流れや河道形状に及ぼす効果に関する研究”（一般C，代表者：池田駿介）の補助を受けた。

付 録

式 (54) から式 (58) 中の係数は次のように表わせる。

$$\tilde{C}_0 = \nu^{-1/2} \frac{1 - (1 + \chi)^{1/4}}{(1 + \chi)^{1/4}} + \frac{s_n(0)}{2\sqrt{2} (1 + \chi)^{3/2} \{1 + (1 + \chi)^{1/4}\}} \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

$$\hat{C}_0 = \nu^{-1/2} \left\{ \frac{1}{(1 + \chi)^{1/4}} - \frac{1}{(1 + \chi)^{1/2}} \right\} + \frac{s_n(0)}{2\sqrt{2} (1 + \chi)^{3/2} \{1 + (1 + \chi)^{1/4}\}} \dots\dots\dots (A \cdot 2)$$

$$C_2 = -\frac{\{2 + (1 + \chi)^{1/4}\}}{6 \{1 + (1 + \chi)^{1/4}\}} \tilde{C}_0^2 - \frac{(1 + \chi)^{3/4}}{6 \{1 + (1 + \chi)^{1/4}\}} \hat{C}_0^2 + \frac{(1 + \chi)^{1/4}}{1 + (1 + \chi)^{1/4}} \Xi_1 + \frac{\hat{C}_0}{\sqrt{2} \{1 + (1 + \chi)^{1/4}\}} \Xi_0 \dots\dots\dots (A \cdot 3)$$

$$\hat{C}_2 = -\frac{1}{6 \{1 + (1 + \chi)^{1/4}\}} \tilde{C}_0^2 - \frac{(1 + \chi)^{1/2} \{1 + 2(1 + \chi)^{1/4}\}}{6 \{1 + (1 + \chi)^{1/4}\}} \hat{C}_0^2 - \frac{1}{1 + (1 + \chi)^{1/4}} \Xi_1 + \frac{\hat{C}_0}{\sqrt{2} \{1 + (1 + \chi)^{1/4}\}} \Xi_0 \dots\dots\dots (A \cdot 4)$$

$$\Xi_0 = -\frac{4\chi + 3}{8(1 + \chi)} s_n(0) \dots\dots\dots (A \cdot 5)$$

$$\Xi_1 = \frac{s_{nn}(0)}{4(1 + \chi)^2} - \frac{2\chi - 1}{8(1 + \chi)^3} s_n^2(0) - \frac{\sqrt{C_r} s_n^2(0)}{4\alpha(1 + \chi)^{1/2}} \dots\dots\dots (A \cdot 6)$$

参 考 文 献

1) 高山茂美：河川地形，共立出版，1974。  
 2) Leopold, L.B. and Maddock, T. Jr. : The hydraulic geometry of stream channels and physiographic implications, U.S.G.S. Prof. Paper, No.252, 1953.

3) Lane, E.W. : Design of stable channels, Trans. ASCE, Vol.120, pp.1234~1279, 1955.  
 4) 平野宗夫：拡幅を伴う流路変動について，土木学会論文報告集，第210号，pp.13~20, 1973.  
 5) Leopold, L.B., Wolman, M.G. and Miller, J.P. : Fluvial processes in geomorphology, W.G. Freeman and Company, San Francisco, 1964.  
 6) Parker, G. : Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. part 2. The gravel river, J. Fluid Mech., Vol.89, No.1, pp.127~146, 1978.  
 7) Ikeda, S., Parker, G. and Kimura, Y. : Stable width and depth of straight gravel rivers with heterogeneous bed materials, Water Resour. Res., Vol.24, No.5, pp.713~722, 1988.  
 8) 吉川秀夫・池田駿介・北川 明：湾曲水路の河床変化について，土木学会論文報告集，第251号，pp.65~75, 1976.  
 9) Lundgren, H. and Jonsson, I.G. : Shear and velocity distribution in shallow channels, J. Hydraul. Div., ASCE, Vol.90, No. HY 1, pp.1~21, 1964.  
 10) Ikeda, S., Izumi, N. and Itoh, R. : Effects of pile-dikes on flow retardation and sediment transport, J. Hydraul. Eng., ASCE, 投稿中。  
 11) Webel, G. and Schatzman, M. : Transverse mixing in open channel flow, J. Hydraul. Eng., ASCE, Vol.110, No.4, pp.423~435, 1984.  
 12) Nayfeh, A.H. : Perturbation methods, John Wiley & Sons, Inc., 1973.  
 13) Keulegan, G.H. : Laws of turbulent flow in open channels, Research Paper No. RP 1151, NBS, 1938.  
 14) Egiazaroff, I.V. : Calculation of nonuniform sediment concentration, J. Hydraul. Div., ASCE, Vol.91, No. HY 1, pp.1~21, 1964.  
 15) Schlichting, H. : Boundary Layer Theory, 6th Ed., McGraw-Hill Co., New York, 1968.  
 16) Li, R.M. and Shen, H.S. : Effect of tall vegetations on flow and sediment, J. Hydraul. Div., ASCE, Vol.99, No. HY 5, pp.793~814, 1973.  
 17) Andrews, E.D. : Bed-material entrainment and hydraulic geometry of gravel-bed rivers in Colorado, Geol. Soc. America Bull., Vol.95, pp.371~378, 1984.  
 18) Charlton, F.G., Brown, P.M. and Benson, R.W. : The hydraulic geometry of some gravel rivers in Britain, Wallingford, Great Britain, Hydraulics Research Station, 48 p., 1978.

(1989.6.17・受付)