
投稿論文
Paper
(In Japanese)

縮約変位関数による離散 Kirchhoff 帯板要素の一般的定式化

GENERAL FORMULATION OF DISCRETE KIRCHHOFF STRIP ELEMENTS
WITH CONDENSED DISPLACEMENT FUNCTIONS

林 正*・藤井 政美**

By Masa HAYASHI and Masami FUJII

Sub-parametric strip elements based on the discrete Kirchhoff theory were proposed for the bending analysis of thin plates with arbitrary shape. In this paper, a general formulation of the above-mentioned strips is shown by the use of new condensed displacement functions, in which the static condensation of stiffness matrices is not required. The new functions are derived from an analytical elimination of the internal degrees of freedom in the displacement functions of the parent elements using the Kirchhoff constraint conditions. The present method contains the ordinary bending strip elements and the bending analysis of thin plates with arbitrary shape could be easily performed by much the same algorithm as in the common finite strip methods.

Keywords: finite strip method, discrete Kirchhoff strip, plate bending, condensed displacement function

1. 緒 言

先に、写像変換の手法を用いて任意な形状の薄板の曲げ解析に適用できるサブパラメトリック帯板要素を開発した¹⁾。本文ではこの手法を改良して、より簡潔で計算効率のよい定式化の手法を考案し、薄板の曲げ解析に関して拡張された有限帯板法を提案する。

文献1)では、親要素に厚板要素を用いて写像変換した要素の平衡方程式を求め、これを薄板の曲げ解析に適用するために Kirchhoff の拘束条件を課して中間節線などの内部自由度を消去し、離散 Kirchhoff 要素として定式化した。この手法では、拘束条件を課す前の親要素の平衡方程式の次元数は内部自由度を含めた親要素の自由度に等しい。また、内部自由度の消去には、行列演算による縮約の手法を用いた。

本報告では、Kirchhoff の拘束条件を親要素の変位関数に課して、数値計算を行う前に解析的に要素の内部自由度を消去した縮約変位関数を用いて要素の平衡方程式を求める。したがって、方程式の次元数は薄板の曲げ解

析に用いられる通常の低次帯板要素の自由度に等しいので²⁾、最低次の次元数で数値計算を行うことができる。また、縮約の手法を用いないのでプログラムが簡単になる利点がある。このような定式化によって計算時間はかなり短縮される。

本研究の特徴は、任意形状の帯板要素を解析的に定式化するために新しい変位関数として縮約変位関数の概念を提唱したことであり、これによって要素の平衡方程式の定式化とプログラムのフローは通常の有限帯板法と同じになる。ただし、要素座標系を全体座標系に写像変換するための操作が必要である。なお、本手法による計算値は文献1)の結果と全く同じ値になる。

本文では、まず自由度の異なる3種類の親要素を用いてそれぞれの縮約変位関数を求め、これを用いて離散 Kirchhoff 帯板要素の一般的定式化を行う。次に、簡単な形状に対する縮約変位関数とひずみマトリックスについて、拘束条件と自由度の違いによる影響を解析的に調べ、この結果から本解析法は規則的な形状の要素に対しては従来の帯板法に一致することを示す。最後に本解析法の汎用性を示す一例として、正三角形板の曲げ解析を行う。

* 正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部建設系
(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)

** 正会員 トビー工業(株)(元・長岡技術科学大学大学院
建設工学専攻)

2. 縮約変位関数

(1) 親要素

写像変換する前の親要素には長方形の厚板要素を用いることにし、図-1のように要素座標として正規座標系(ξ, η)を定める。

中央面上のたわみ w と ξ 軸まわりの回転角 θ を独立な変位関数に選び、それぞれを中間節線を含む3本の節線 i, j, k での一般化変位 w_{im}, θ_{im} (l=i, j, k; m: 級数番号) と節線に関係しない内部自由度 (bubble mode) w_{bm}, θ_{bm} で表わすことにすれば変位関数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_m X_m (f_i w_{im} + f_j w_{jm} + f_k w_{km} + f_b w_{bm}) \\ \theta &= \sum_m X_m (f_i \theta_{im} + f_j \theta_{jm} + f_k \theta_{km} + f_b \theta_{bm}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} f_i(\eta) &= \eta(\eta+1)/2, & f_j(\eta) &= \eta(\eta-1)/2 \\ f_k(\eta) &= 1-\eta^2, & f_b(\eta) &= \eta(1-\eta^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

また、X_m(ξ) は w, θ を ξ 軸方向に級数展開するための形状関数である¹⁾。

変位関数が式(1)で与えられる帯板要素を8自由度要素とよぶことにし、文献1)で用いたようにθ_{bm}を省いた7自由度要素およびw_{bm}, θ_{bm}を省いた6自由度要素についても検討する。

図-1の要素を任意の形状に変換するために全体座標系としてデカルト座標系(x, y)を用いれば、変換された曲線座標系(ξ, η)とx-y座標系との微分関係はヤコビ行列Jで与えられる³⁾。Jとその逆行列Iを一般的に次式のように表わす。

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \dots\dots (3)$$

(2) 拘束条件式

Kirchhoffの拘束条件式として次式を用いる¹⁾。

$$\partial w / \partial \eta - J_{21} \theta = 0 \dots\dots (4)$$

ここに、

$$J_{21} = \sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2} \dots\dots (5)$$

式(4)に式(1)を代入して、各級数ごとに拘束条件を課すものとする。このとき、離散化の方法として文献1)と同じ手法を用いると次式が得られる。

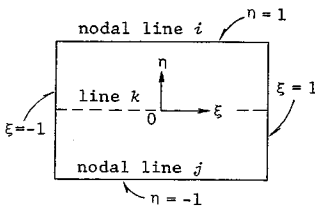


図-1 親要素

$$\begin{aligned} &g_{k0} w_{km} + g_{b0} w_{bm} - F_0 (f_{k0} \theta_{km} + f_{b0} \theta_{bm}) \\ &= -g_{i0} w_{im} - g_{j0} w_{jm} + F_0 (f_{i0} \theta_{im} + f_{j0} \theta_{jm}) \end{aligned} \quad (m=1, 2, \dots) \dots\dots (6)$$

ここに、

$$g_i = df_i / d\eta \quad (l=i, j, k, b) \dots\dots (7)$$

$$F_0 = \begin{cases} \int_{-1}^1 J_{\eta 0} J_{\xi 0} d\xi / \int_{-1}^1 J_{\xi 0} d\xi & \text{(線拘束)} \dots\dots (8-a) \\ (J_{\eta 0} + J_{\eta 0}^*) / 2 & \text{(点拘束)} \dots\dots (8-b) \end{cases}$$

$$J_{\xi} = \sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2} \dots\dots (9)$$

上記の式において添字0はη=η₀を、上付符号±はξ=±ξ₀を代入した値を意味する。なお、線拘束は式(4)をη=η₀の線に沿って課したものであり、点拘束は2点(±ξ₀, η₀)で平均的に課したものである¹⁾。

(3) 8自由度要素

8自由度要素を基本として縮約された変位関数を求める。式(6)を用いて左辺の4個の自由度を消去するために、η₀=±1/√3と±1で4本の式を立てる。点拘束の場合にはξ₀に適当な値(たとえば、±1/√3)を用いるものとする。これより次式が得られる。

$$\begin{aligned} &4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -F_{12} & -F_{21}/\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 & -F_{21} & -F_{12}/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{km} \\ w_{bm} \\ \theta_{km} \\ \theta_{bm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 6 & F_{12} + \sqrt{3} F_{21} & F_{12} - \sqrt{3} F_{21} \\ -4\sqrt{3} & -4\sqrt{3} & F_{21} + \sqrt{3} F_{12} & F_{21} - \sqrt{3} F_{12} \\ -1 & 1 & F_3 & F_4 \\ -2 & -2 & F_3 & -F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{im} \\ w_{jm} \\ \theta_{im} \\ \theta_{jm} \end{bmatrix} \dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに、

$$F_{12} = F_1 + F_2, \quad F_{21} = F_1 - F_2 \dots\dots (11)$$

F₁, F₂はη₀=1/√3, -1/√3を、F₃, F₄はη=1, -1を式(8)に代入した値である。式を簡潔に示すために、式(10)の第1, 2式はη₀=±1/√3, 第3, 4式はη₀=±1での式の和と差をとって変形したものである。

式(10)を解いて求めた左辺の自由度を式(1)に代入すると、縮約された変位関数として、通常の低次要素の式²⁾と同じ形の次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_m X_m (H_1 w_{im} + H_2 \theta_{im} + H_3 w_{jm} + H_4 \theta_{jm}) \\ \theta &= \sum_m X_m (G_1 w_{im} + G_2 \theta_{im} + G_3 w_{jm} + G_4 \theta_{jm}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

ここに、

$$H_1 = f_i, \quad H_2 = F_3 f_2, \quad H_3 = f_j, \quad H_4 = F_4 f_4 \dots\dots (13)$$

$$G_1 = 3 \left(\frac{f_5}{F_1} + \frac{f_7}{F_2} \right), \quad G_2 = f_6 + \sqrt{3} F_3 \left(\frac{f_5}{F_1} - \frac{f_7}{F_2} \right)$$

$$G_3 = -G_1, \quad G_4 = f_8 - \sqrt{3} F_4 \left(\frac{f_5}{F_1} - \frac{f_7}{F_2} \right) \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4}(1+\eta)^2(2-\eta), & f_2 &= -\frac{1}{4}(1+\eta)^2(1-\eta) \\ f_3 &= \frac{1}{4}(1-\eta)^2(2+\eta), & f_4 &= \frac{1}{4}(1-\eta)^2(1+\eta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} f_5 &= \frac{1}{8}(1+\sqrt{3}\eta)(1-\eta^2), & f_6 &= \frac{1}{4}(1+\eta)(3\eta^2-1) \\ f_7 &= \frac{1}{8}(1-\sqrt{3}\eta)(1-\eta^2), & f_8 &= \frac{1}{4}(1-\eta)(3\eta^2-1) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式 (15) は正規座標 η で表わしたエルミートの 3 次多項式である。

(4) 7 自由度要素

7 自由度要素では θ_{6m} を省略し、拘束条件式として $\eta_0 = \pm 1/\sqrt{3}$ での 2 本の式と、 ± 1 での式をたし合わせて 1 本にした式を用いる。

したがって、式 (10) の 4 行目を省略して解を求め、これを式 (1) に代入して整理すると式 (12) と同じ形の縮約された変位関数が求められる。ただし、各項の係数 (形状関数) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= f_1 - \frac{\sqrt{3} F_{21}}{4 F_{12}} f_k, & H_2 &= -\frac{F_1 F_2}{2 F_{12}} f_k - \frac{F_3}{4} f_b \\ H_3 &= f_3 + \frac{\sqrt{3} F_{21}}{4 F_{12}} f_k, & H_4 &= \frac{F_1 F_2}{2 F_{12}} f_k - \frac{F_4}{4} f_b \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{3}{2 F_{12}} f_k, & G_2 &= g_2 - \frac{\sqrt{3} F_{21}}{4 F_{12}} f_k \\ G_3 &= -G_1, & G_4 &= g_4 + \frac{\sqrt{3} F_{21}}{4 F_{12}} f_k \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$g_n = df_n/d\eta \quad (n=1\sim 4) \quad (19)$$

ここに、 f_k, f_b には式 (2)、 f_n ($n=1\sim 4$) には式 (15) を用いる。

(5) 6 自由度要素

内部自由度 w_{6m}, θ_{6m} を省いて $\eta_0 = \pm 1/\sqrt{3}$ での拘束条件式を用いる。したがって、式 (10) の第 3, 4 行目を省略して同様の方法で 6 自由度要素の縮約された変位関数を求めると、 θ は 7 自由度要素の式に一致し、 w は式 (12) において次の係数を用いたものになる。

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}(1+\eta) - \frac{\sqrt{3} F_{21}}{4 F_{12}} f_k, & H_2 &= -\frac{F_1 F_2}{2 F_{12}} f_k \\ H_3 &= \frac{1}{2}(1-\eta) + \frac{\sqrt{3} F_{21}}{4 F_{12}} f_k, & H_4 &= -H_2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

以上で、離散化された Kirchhoff の拘束条件を用いて解析的に縮約された変位関数を求めることができた。式 (12) の変位関数には一般性があり、写像変換によって

与えられる式 (3) の J を用いて形状関数 $H_n(\eta), G_n(\eta)$ を求めれば種々の形状の要素に適用することができる。

なお、式 (5) の J_n が座標 η に依存しない要素では、式 (12) の変位関数はきわめて簡単になる。これについては 4. で説明する。

3. 平衡方程式

(1) ひずみ成分

式 (12) の変位関数を次式のように表わす。

$$w = \sum_m X_m f_1^T d_m, \quad \theta = \sum_m X_m f_2^T d_m \quad (21)$$

ここに、 T は転置記号で

$$d_m = \{w_{im}, \theta_{im}, w_{jm}, \theta_{jm}\}^T \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \{H_1, H_2, H_3, H_4\}^T \\ f_2 &= \{G_1, G_2, G_3, G_4\}^T \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

薄板解析におけるひずみ ϵ

$$\epsilon = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \quad (24)$$

は文献 1) と同様な方法で求められる。すなわち、式 (4) の Kirchhoff の仮定を用いて

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = J_\eta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial J_\eta}{\partial \xi} \theta, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = J_\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} \theta \quad (25)$$

の関係式から次式で与えられる¹⁾。

$$\epsilon = -z [C] \sum_m [B_m] d_m \quad (26)$$

ここに、 B_m はひずみマトリックス、 C はひずみの変換行列で、式 (3) の要素と式 (23) を用いて次のようになる。

$$B_m = \begin{bmatrix} X_m^T f_1^T \\ X_m \{J_\eta g_1^T + K_\eta f_1^T\} \\ 2 \{J_\eta X_m^T + K_\eta X_m\} f_2^T \end{bmatrix} - [G] \begin{bmatrix} X_m^T f_1^T \\ J_\eta X_m^T f_2^T \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$C = \begin{bmatrix} I_{11}^2 & I_{12}^2 & I_{11}I_{12} \\ I_{21}^2 & I_{22}^2 & I_{21}I_{22} \\ 2 I_{11}I_{21} & 2 I_{12}I_{22} & I_{11}I_{22} + I_{12}I_{21} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$G = \begin{bmatrix} \partial J_{11}/\partial \xi & \partial J_{12}/\partial \xi \\ \partial J_{21}/\partial \eta & \partial J_{22}/\partial \eta \\ 2 \partial J_{11}/\partial \eta & 2 \partial J_{22}/\partial \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$g_i = df_i/d\eta \quad (i=1, 2) \quad (30)$$

$$K_\xi = \partial J_\eta/\partial \xi, \quad K_\eta = \partial J_\eta/\partial \eta \quad (31)$$

プライム記号は ξ に関する微分を表わす。

式 (26)~(31) は文献 1) と同じ式であるが、式中の d_m と f_i は縮小された式 (22), (23) のベクトルを用いるので B_m の列数、したがって後述の剛性行列の次元数が小さいので計算時間がかなり短縮される²⁾。

(2) ひずみの簡略式

式 (12) または (21) の変位関数には Kirchhoff の拘

注 1) 7 自由度要素では、要素数は約 1/3 になる。

束条件を用いているので w と θ は独立ではない。しかし、拘束条件を離散化しているために式 (4) の薄板の仮定が完全に満足されていないので、式 (25) を用いてひずみ成分を求めた。

しかし、幅が一定で $J_n = \text{const.}$ になる帯板に 7 自由度または 8 自由度要素を用いた場合には、後述の式 (46) から式 (23) の f_i について

$$f_2 = \frac{1}{J_n} \frac{df_1}{d\eta} = \frac{1}{J_n} g_1 \dots\dots\dots (32)$$

の関係が成り立ち、式 (4) が要素全体について満足される (式 (46) において $F_0 = J_n$ となる。式 (8) 参照)。

したがって、このような要素では式 (27) の代わりに次の簡単なひずみマトリックスを用いることができる。

$$\tilde{B}_m = \begin{bmatrix} X_m'' f_1^T \\ X_m h_1^T \\ 2 X_m g_1^T \end{bmatrix} - [G] \begin{bmatrix} X_m' f_1^T \\ X_m g_1^T \end{bmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

$$h_1 = d^2 f_1 / d\eta^2 \dots\dots\dots (34)$$

また、幅がほぼ一定とみなせる 7, 8 自由度の要素では、近似的に上式を用いることができると考えられる。

(3) 剛性行列

式 (26) のひずみを用いると級数項 m, n に対する帯板要素の剛性行列は次式のようになる。

$$k_{mn} = D \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_m^T C^T D C B_n |J| d\xi d\eta \dots\dots\dots (35)$$

ここに、要素は厚さ一定で等方性材料とすると、

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \lambda = \frac{1-\nu}{2} \dots\dots\dots (36)$$

t は板厚、 E はヤング係数、 ν はポアソン比である。

ここで、次の行列の三重積を求めておく。

$$\bar{D} = C^T D C = \begin{bmatrix} A^2 & C^2 + \nu I^2 & AC \\ & B^2 & BC \\ \text{sym.} & & C^2 + \lambda I^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (37)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A &= I_{11}^2 + I_{21}^2, & B &= I_{12}^2 + I_{22}^2 \\ C &= I_{11}I_{12} + I_{21}I_{22}, & I &= I_{11}I_{22} - I_{12}I_{21} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

\bar{D} を解析的に求めると上式のように簡単な式になり、数値計算の効率を上げることができる。

(4) 平衡方程式

帯板要素の平衡方程式は、通常の有限帯板法の式と同一の形で表わされる。すなわち、

$$\sum_n [k_{mn}] d_n = q_m + p_m \quad (m=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (39)$$

ここに、 q_m は式 (22) の d_m に対応する一般化力、 p_m は荷重ベクトルで表面力 q に対して次のようになる。

$$p_m = \int_A q X_m f_1 |J| d\xi d\eta \dots\dots\dots (40)$$

4. 縮約変位関数の性質

(1) 写像変換

写像変換において、要素の形状を決定するための関数には、有限要素法のセレンディピティ要素族の形状関数 N_i を用いる。

図-2 のような直線要素では、次式の 4 節点要素の式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= (1+\xi)(1+\eta)/4, & N_2 &= (1-\xi)(1+\eta)/4 \\ N_3 &= (1-\xi)(1-\eta)/4, & N_4 &= (1+\xi)(1-\eta)/4 \end{aligned} \right\} \dots\dots (41)$$

写像変換では有限要素法³⁾と同じく節点 i の座標値 (x_i, y_i) を次式の座標変換式

$$x = \sum_i N_i x_i, \quad y = \sum_i N_i y_i \dots\dots\dots (42)$$

に用いて式 (3) の J を求める。式 (41) を用いた場合には次のようになる。

$$J = \begin{bmatrix} X_1 + X_3\eta & Y_1 + Y_3\eta \\ X_2 + X_3\xi & Y_2 + Y_3\xi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (43)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)/4 \\ X_2 &= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)/4 \\ X_3 &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

Y_i は上式において x_i を y_i に置き換えたものである。

(2) 任意四辺形要素

図-2 の要素に対して式 (43) を用いると、式 (5) の J_n は座標 ξ のみの関数で η に依存しない。また、式 (9) の J_ξ は η のみの関数である。したがって、線拘束と点拘束では式 (8) の F_0 の値は異なるが、式 (10) で用いた F_n はそれぞれの拘束条件式において同一の値になる。そこで、

$$F_n = F_0 \quad (n=1\sim 4) \dots\dots\dots (45)$$

と置くと、式 (12) の変位関数は 7 自由度と 8 自由度の場合に一致して、式 (23) の形状関数ベクトル f_i は次式のように簡単になる。

$$f_1 = \{f_1, F_0 f_2, f_3, F_0 f_4\}^T \dots\dots\dots (46 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \{g_1/F_0, g_2, g_3/F_0, g_4\}^T \\ &= \frac{1}{F_0} \frac{df_1}{d\eta} = \frac{1}{F_0} g_1 \dots\dots\dots (46 \cdot b) \end{aligned}$$

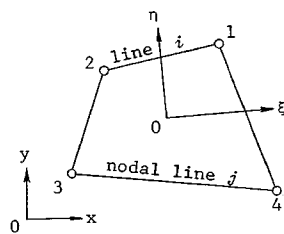


図-2 直線要素

ここに、 g_n は式 (19) で与えられる関数である。

式 (46) を式 (21) に用いると

$$\partial w / \partial \eta = F_0 \theta \dots \dots \dots (47)$$

の従属関係があるが、一般に $J_n \neq F_0$ であるので式 (4) の薄板の仮定は完全には満足されない。

なお、7 自由度と 8 自由度の式が一致する理由は、式 (45) を用いて式 (10) を解くと $\theta_{0m} = 0$ になるためである。したがって、8 自由度要素は曲線要素に対して有効な要素と考えられる^{注2)}。

6 自由度要素では、 θ の形状関数は式 (46・b) の f_2 に等しいが、 w の形状関数 f_1 は f_2 よりも低次の関数になって、式 (23) の成分は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= (1 + \eta) / 2, & H_3 &= (1 - \eta) / 2 \\ -H_2 &= H_4 = F_0 (1 - \eta^2) / 4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

したがって、6 自由度要素では式 (47) は成立せずに、拘束線上 ($\eta = \pm 1/\sqrt{3}$) のみで成り立つ。

次に、図-2 において辺 $\bar{14}$ と $\bar{23}$ が平行な台形要素を考える。この要素では、平行条件より

$$(x_1 - x_4)(y_2 - y_3) = (x_2 - x_3)(y_1 - y_4) \dots \dots \dots (49)$$

の関係が得られるので J_n は ξ の 1 次式になる。これと J_ξ が η のみの関数であることを考慮すると、式 (8) の拘束条件は線拘束と点拘束と同じになる。さらに、式 (8・b) による 2 点拘束と原点において 1 点拘束 ($\xi_0 = 0$) を課した結果は同じである。

また、節線 i, j が平行な台形要素では J_n が ξ の無理式になるので、2 つの拘束条件式による結果は一致しない。

(3) 平行四辺形要素

図-3 のような平行四辺形要素を考えると、式 (43) のヤコビ行列は定行列になる。

$$J = \begin{bmatrix} a \cos \alpha & a \sin \alpha \\ b \sin \gamma & b \cos \gamma \end{bmatrix} \dots \dots \dots (50)$$

ここで、

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi / 2 \dots \dots \dots (51)$$

の関係を用いると次式が得られる。

$$|J| = ab \sin \beta, \quad J_\xi = a, \quad J_n = b \dots \dots \dots (52)$$

また、式 (8) の F_0 は拘束の方法には関係なく

$$F_0 = J_n = b \dots \dots \dots (53)$$

となるので、式 (46) を用いた式 (21) の変位関数は要素の全領域で式 (4) を満たす。さらに、式 (32) も満足されるので、ひずみマトリックスには式 (33) の簡略式を用いることができる。なお、 G 行列は零行列になる。

式 (53) を式 (46) に用いると、 w の η 方向の形状関数は区間 $-1 \leq \eta \leq 1$ で正規化されたエルミートの 3 次多項式に等しいので、この変位関数は薄板の曲げ解析に

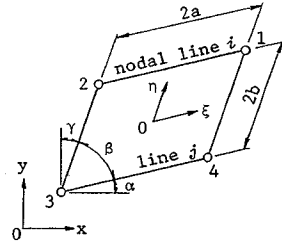


図-3 平行四辺形要素

用いられる通常の有限帯板要素の式に一致する。また、式 (35) の剛性行列は斜交座標を用いて定式化された式に一致する²⁾。しかし、6 自由度要素では式 (48) から明らかなように、エルミートの 3 次多項式を用いた式には一致しない。このことから、親要素に用いた式 (1) の内部自由度 w_{0m} は有効な成分であることがわかる。

(4) 三角形要素

三角形要素の式は有限要素法⁴⁾の手法と同じく、四辺形要素において隣接する隅角点の節点を一致させて求めることができる。

図-4 のように節点 1 と 4 を一致させた場合には、式 (43) は次のようになる。

$$J = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \eta & Y_1 - Y_2 \eta \\ X_2(1 - \xi) & Y_2(1 - \xi) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (54)$$

ここで節点 1 に相対する辺の長さを $2b$ とすると、式 (54) より次式が求められる。

$$J_n = b(1 - \xi) / 2 \dots \dots \dots (55)$$

したがって、辺 $\bar{14}$ と $\bar{23}$ が平行な台形要素の場合と同じく式 (8) の 2 つの拘束条件式は一致し、かつ、原点における 1 点拘束と同じになる。すなわち、式 (8) に式 (55) を代入すると

$$F_0 = b / 2 \dots \dots \dots (56)$$

式 (56) を代入した式 (46) の形状関数は、長方形要素の関数と θ_{im}, θ_{jm} に関する項が $1/2$ だけ異なる。また、 $J_n \neq F_0$ であるので式 (32) は成り立たないがひずみマトリックスは簡単な式になるので、5. (2) に示すように剛性行列を解析的に求めることができる。なお、節点 2 と 3 を一致させた三角形要素についても以上のことがいえる。

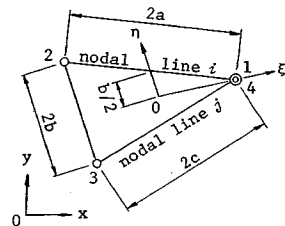


図-4 三角形要素

注 2) 曲線要素でも J_n が η に依存しない要素では $\theta_{0m} = 0$ になる。

次に、節点1と2を一致させて節線*i*を退化させた図-5の帯板要素を考える。

この要素について以下の式が得られる。

$$J = \begin{bmatrix} X_1(1-\eta) & Y_1(1-\eta) \\ X_2 - X_1\xi & Y_2 - Y_1\xi \end{bmatrix} \dots\dots\dots(57)$$

この三角形帯板要素の形状関数も式(46)または式(48)で与えられるが、 J_n が ξ に関する無理式になるために式中の F_0 の値は拘束条件によって異なる。したがって要素の形状が図-4と合同な三角形であってもその性質は異なったものになる。

(5) 曲線要素

相対する2辺が直線で、他の2辺が曲線である図-6のような要素を考える。

写像変換には式(42)の N_i に8節点セレンディピティ要素の式を用いることにして、直線上の2節点6, 8を中点にとると、式(3)の J の要素は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= X_1 + 2(X_0 - X_4)\xi + X_3\eta + 2(X_2 - X_5)\xi\eta \\ J_{12} &= Y_1 + 2(Y_0 - Y_4)\xi + Y_3\eta + 2(Y_2 - Y_5)\xi\eta \\ J_{21} &= X_5 + X_3\xi + (X_2 - X_5)\xi^2 \\ J_{22} &= Y_5 + Y_3\xi + (Y_2 - Y_5)\xi^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(58)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4, & X_1 &= (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)/4 \\ X_2 &= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)/4, & X_3 &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/4 \\ X_4 &= (x_5 + x_7)/2, & X_5 &= (x_5 - x_7)/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(59)$$

Y_i ($i=0\sim5$)は X_i において x_i を y_i に置き換えたものである。

式(58)の J_{21} 、 J_{22} より J_n は η に依存しないので、点拘束の場合には式(45)が成り立ち、7と8自由度要素の形状関数は式(46)、6自由度要素の形状関数は式(48)と(46・b)で与えられる。しかし、線拘束の場合には式(45)の関係が成立しないので、変位関数は自由度によって異なり、一般式(12)で与えられる。

次に、図-6において曲線1-5-2は曲線4-7-3を平行移動して与えられるような幅が一定な曲線要素を考える。この場合には、式(59)の X_i と Y_i は

$$X_3 = Y_3 = 0, \quad X_2 = X_5, \quad Y_2 = Y_5$$

となるので、これを式(58)に代入すると次のようになる。

$$J = \begin{bmatrix} X_1 + 2(X_0 - X_4)\xi & Y_1 + 2(Y_0 - Y_4)\xi \\ X_5 & Y_5 \end{bmatrix} \dots\dots(60)$$

したがって、 $J_n = b$ ($2b$:要素の幅)であるので、8自由度要素では式(32)が成り立ち、拘束条件にかわりなく薄板の仮定が満たされて、形状関数はエルミートの3次多項式で与えられる。

同様のことは2辺が同心円の円弧である扇形要素についてもいえる。ただし、座標変換式(42)によって円弧を2次曲線で近似するために $J_n \neq b$ となるので、厳密には成り立たない。式(42)に極座標の式を用いた場合には、本手法による7, 8自由度要素の式は通常の扇形帯板要素の式²⁾と完全に一致する。

5. ひずみマトリックス

7自由度要素の縮約変位関数を用いて簡単な形状の要素のひずみマトリックスを求め、形状が規則的な場合には従来の解法による式に一致することを確かめる。

(1) 四辺形要素

まず最初に、図-2の四辺形要素の式を求める。このときには、式(43)の要素を式(29)、(31)に代入すると次のようになる。

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2G_{31} & 2G_{32} \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{aligned} G_{31} &= (X_3 Y_2 - X_2 Y_3) / |J| \\ G_{32} &= (X_1 Y_3 - X_3 Y_1) / |J| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(61)$$

$$\left. \begin{aligned} J_n &= \sqrt{(X_2 + X_3\xi)^2 + (Y_2 + Y_3\xi)^2}, & K_n &= 0 \\ K_\xi &= (X_2 X_3 + Y_2 Y_3) + (X_2^2 + Y_2^2)\xi / J_n \end{aligned} \right\} \dots\dots(62)$$

これらの式を式(27)に代入して、式(30)、(34)、(46)を用いると

$$B_m = \begin{bmatrix} X_m'' f^T \\ (J_n / F_0) X_m h^T \\ 2 |F_m g^T - G_{31} X_m' f^T| \end{bmatrix} \dots\dots\dots(63)$$

ここに、 f は式(46・a)の形状関数ベクトル f_i ($\equiv f$)で、添字を省略した。また、 F_m は

$$F_m = (J_n X_m' + K_\xi X_m - G_{32} J_n X_m) / F_0 \dots\dots\dots(64)$$

(2) 三角形要素

式(54)~(56)より、図-4の三角形要素について次式が得られる。

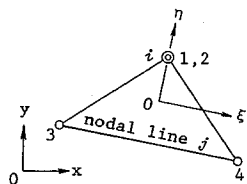


図-5 三角形要素

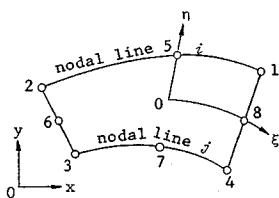


図-6 曲線要素

$$\left. \begin{aligned} |J| &= (1-\xi)\Delta/4, & K_\xi &= -F_0 \\ G_{31} &= 0, & G_{32} &= -1/(1-\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (65)$$

ここに、 Δ は三角形の面積である。

式 (55), (65) を式 (63) に用いると、ひずみマトリックスは簡単な式になる。

$$B_m = \begin{bmatrix} X_m'' f^T \\ (1-\xi)X_m h^T \\ 2(1-\xi)X_m' g^T \end{bmatrix} \dots\dots\dots (66)$$

上式において、 $\xi=0$ とおくと長方形要素の式 (式 (33) で $G=0$ とした式) になる。

式 (37) の変換された弾性マトリックス \bar{D} と B_m を式 (35) に代入して剛性行列を求めると

$$k_{mn} = (4 b^4 D / \Delta^2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{k}_{mn} + \bar{\bar{k}}_{mn}] d\xi d\eta \dots\dots\dots (67)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \bar{k}_{mn} &= (1-\xi)X_m'' X_n'' [f f^T] + \frac{(Y^2 + \rho^2)^2}{1-\xi} X_m X_n [h h^T] \\ &\quad + (Y^2 + \nu \rho^2) \{ X_m'' X_n [f h^T] + X_m X_n'' [h f^T] \} \\ &\quad + 4(1-\xi)(Y^2 + \lambda \rho^2) X_m' X_n' [g g^T] \dots\dots\dots (68 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{k}}_{mn} &= -2(1-\xi)Y \{ X_m'' X_n' [f g^T] + X_m' X_n'' [g f^T] \} \\ &\quad - 2Y(Y^2 + \rho^2) \{ X_m' X_n [g h^T] + X_m X_n' [h g^T] \} \\ &\quad \dots\dots\dots (68 \cdot b) \end{aligned}$$

$$Y = -\eta + (c^2 - a^2) / 4 F_0^2, \quad \rho = \Delta / 4 F_0^2 \dots\dots\dots (69)$$

$f f^T, f h^T$ などはダイアドで、4 次の正方行列である。

上記の式を図-3 の平行四辺形要素に適用することができる。すなわち、式 (53) と式 (56) を比較して

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= b, & \xi &= \eta = 0 \\ \Delta &= 4 ab \sin \beta, & c^2 - a^2 &= 4 ab \cos \beta \\ Y &= (a/b) \cos \beta, & \rho &= (a/b) \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (70)$$

とおけば、式 (67) は平行四辺形要素の剛性行列を表わす。この式は、斜交座標を用いて導かれる式に一致する。

さて、式 (68・a) の右辺第 2 項により、式 (67) の三角形帯板要素の剛性行列は有限要素と同じく特異点を有する。しかし、特異点 ($\xi=1, \eta=0$) で単純支持または固定支持された場合には、展開関数 $X_m(\xi)$ に多項式を用いると分母の項は約分されて特異点はなくなる。

次に、節線を退化させた図-5 の三角形要素を考える。式 (57) より、式 (61) の要素は

$$|J| = (1-\eta)\Delta/4, \quad G_{31} = -1/(1-\eta), \quad G_{32} = 0$$

となるが、 J_η が η の無理式になるために、式 (63) のひずみマトリックスはこれ以上簡単な式にならない。

これらの式を用いて剛性行列を求めると、 $(1-\eta)$ の累乗の項が分母に現われる。したがって、図-5 の三角形要素は ($\xi=0, \eta=1$) で特異点を有することがわかる。

(3) 扇形要素

扇形要素の式を写像変換の手法によって求める。

図-7 に示す座標系について以下の式が成り立つ。

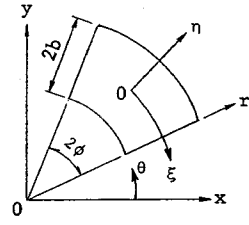


図-7 扇形要素

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \dots\dots\dots (71)$$

$$r = b\eta + r_0, \quad \theta = -\phi\xi + \theta_0 \dots\dots\dots (72)$$

ここに、 (r_0, θ_0) は要素座標系 (ξ, η) の原点の座標値である。

式 (72) を式 (71) に代入すると、式 (42) に対応する座標変換式として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} x &= (b\eta + r_0) \cos(-\phi\xi + \theta_0) \\ y &= (b\eta + r_0) \sin(-\phi\xi + \theta_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (73)$$

これより、式 (3) のヤコビ行列を求めると

$$J = \begin{bmatrix} \phi r \sin \theta & -\phi r \cos \theta \\ b \cos \theta & b \sin \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (74)$$

また、定式化に必要な諸量は次のようになる。

$$|J| = \phi b r, \quad J_\eta = F_0 = b \dots\dots\dots (75)$$

J_η が定数であるから、ひずみマトリックスを式 (33) から求めると、

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -\phi^2 r / b \\ 0 & 0 \\ 2 b / r & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (76)$$

$$\bar{B}_m = \begin{bmatrix} X_m'' f^T + (\phi^2 r / b) X_m g^T \\ X_m h^T \\ 2 X_m' [g^T - (b/r) f^T] \end{bmatrix} \dots\dots\dots (77)$$

ここに、 f は式 (46・a) の f_1 である。

式 (37) の変換された弾性マトリックス \bar{D} は次式のように簡単になる。

$$\bar{D} = \frac{1}{(\phi b)^4} \begin{bmatrix} (b/r)^4 & \nu(\phi b/r)^2 & 0 \\ \text{sym.} & \phi^4 & 0 \\ & & \lambda(\phi b/r)^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (78)$$

式 (77), (78) を式 (35) に用いると、式 (68) と同様な形で剛性行列を定式化することができる。この行列は、極座標表示のひずみ成分を用いて求めた剛性行列と一致する。なお、式 (42) を用いると円弧は 2 次曲線で近似されるが、 $2\phi=30^\circ$ の場合には粗い要素分割でもよい結果が得られている¹⁾。

6. 正三角形板の曲げ解析

本解析法による計算結果は文献 1) の解法による計算値と完全に一致するので、文献 1) と異なる計算例として正三角形板⁵⁾を解析する。

(1) 計算諸量

周辺で単純支持された高さ a の正三角形板に、満載等分布荷重 q が作用する場合について計算する。

数値計算では、図-8のように x 軸に平行で等間隔な節線で三角形全体を4要素に分割し、さらに上の三角形要素を2等分割する。これらの三角形と台形要素には6自由度と7自由度要素を用いる。式(1)の展開関数 X_m には対称モードの多項式¹⁾を3項採用し、数値積分にはガウスの13点公式を用いる。また拘束条件には線拘束と1点拘束 ($\xi_0=0$) を使用する。なお、板のポアソン比は0.3である。

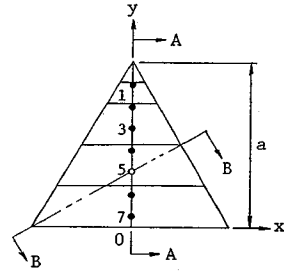


図-8 正三角形板の要素分割

(2) 計算結果

計算では、 y 軸(断面 A-A)上の7点(No.1~7. 図-8の上から $y/a=13/15, 11/15, \dots, 1/15$. 図心点は No.5)のたわみ w と曲げモーメント M_x, M_y を求める。また、断面 B-B 上の対応する点での値も計算する。 y 軸上の計算値を解析解⁵⁾に対する誤差(%)で表わして表-1に示す。

表-1より、拘束条件については1点拘束(point)よりも線拘束(line)の方が精度のよいことがわかる。これらの計算とは別に、 $\xi_0 = \pm 1/\sqrt{3}$ で2点拘束した計算結果では、1点拘束よりもよくて線拘束に近い値が得られた。自由度に関しては各点によってばらつきがあり、どちらの要素がよいとはいえないが、点1での曲げモーメントについては7自由度要素の方がよい。なお、縮約変位関数を用いているので、自由度数の違いによる計算時間の差は少ない。

次に、B-B断面での w と M_x の分布を、A-A断面での値とともに図-9, 10に示す。計算値は線拘束を課した7自由度要素による値であり、実線と点線は解析解である。図より、B-B断面でもA-A断面と同精度の値が

得られていることがわかる。

ここで、特に強調したいことは、任意点の応力を何らの補間を行わずに計算していることである。有限要素法では、数値積分を用いたアイソパラメトリック要素内の応力はガウス積分点で最も精度がよくて、要素周辺上の応力を求めるには外挿または平滑化の手法が用いられている^{6),7)}。このことは、本解析法の大きな特徴であるといえる。

7. 結 論

本研究について以下のことがいえる。

(1) 縮約変位関数を考案したことにより、通常の有限帯板法とほぼ同じ計算手順で任意形状の薄板の曲げ解析を行うことができる。

(2) 拘束条件の離散化手法を解析的に検討し、 J_n が一定な場合には Kirchhoff の仮定が満たされることが確かめられた。

表-1 y 軸上の計算値の誤差 (%)

	Const. Cond.	DOF	Point No.						
			1	2	3	4	5	6	7
w	point	6	4.41	-0.82	-3.49	-2.57	-3.95	-4.63	-1.75
		7	0.71	-1.55	-2.37	-3.05	-3.43	-3.45	-4.53
	line	6	-0.79	-0.38	-0.47	2.10	1.61	1.58	5.05
		7	-3.93	-1.08	0.72	1.55	2.18	2.84	2.03
	Analytical		0.038519	0.23177	0.56000	0.88494	1.0288	0.85333	0.33877
M_x	point	6	17.24	5.32	0.14	-1.55	-7.03	-5.20	-11.04
		7	12.51	4.84	1.39	-2.82	-6.32	-5.72	-9.72
	line	6	10.56	5.30	3.04	2.61	-2.44	-0.14	-6.17
		7	6.68	4.97	4.35	1.81	-1.67	-0.70	-4.80
	Analytical		1.0593	1.8741	2.4000	2.5926	2.4074	1.8000	0.72593
M_y	point	6	23.60	-2.10	4.22	1.36	1.07	-1.26	-12.06
		7	-4.48	-0.66	5.86	0.31	-7.14	-2.04	-10.90
	line	6	26.64	21.75	1.99	2.44	-5.31	2.23	-8.61
		7	-3.71	22.84	3.67	1.33	-4.79	1.39	-7.38
	Analytical		-0.55852	-0.17926	0.72000	1.7215	2.4074	2.3600	1.1615

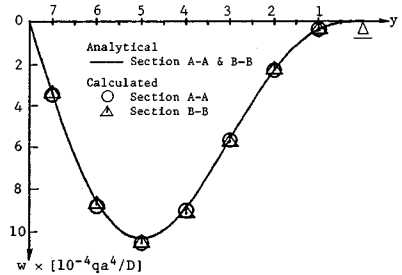


図-9 たわみ w の分布

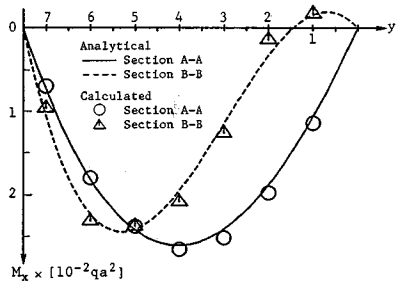


図-10 曲げモーメント M_x の分布

(3) この結果、デカルト座標系、斜交座標系、極座標系で定式化された従来の帯板要素と縮約変位関数を用いた7自由度要素は理論的に一致し、本解析法はこれらの要素を包含するものであることを示した。

(4) さらに、三角形帯板要素などを解析的に定式化できることを示した。

(5) 本計算例と文献1)の計算例より、本解析法は要素周辺上も含めて要素内の任意点の応力を直接求めることができる。

終わりに、本研究は昭和62年度文部省科学研究費の援助を受けたことを付記する。

参 考 文 献

1) 林 正・坂田 敦・西谷雅弘：サブパラメトリック帯

板要素による薄板の曲げ解析，土木学会論文集，No. 398 / I-10，1988年10月。

- 2) Cheung, Y.K. : Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, pp.25~66, 1976.
- 3) Zienkiewicz, O.C. (吉識雅夫・山田嘉昭監訳) : マトリックス有限要素法，三訂版，培風館，pp.173~204, 1984.
- 4) Bathe, K.J. : Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, pp.194~300, 1982.
- 5) Timoshenko, S.P. and Woinowski-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, pp.313~314, 1959.
- 6) 前掲3), pp.277~279.
- 7) Hinton, E. and Owen, D.R.J. (川井忠彦監訳) : 有限要素プログラミング，丸善，pp.285~287, 1979.

(1988.3.28・受付)