

曲げとせん断を受けるひずみ軟化はりの弾塑性変位解析

DEFLECTION OF STRAIN-SOFTENING BEAM IN ELASTIC-PLASTIC RANGE

長谷部 薫*・薄木 征三**

By Kaoru HASEBE and Seizou USUKI

Materials such as timber, concrete, rock and soil exhibit a strain softening behavior after reaching a peak stress in compression tests. The present paper is concerned with deflections of elastic-plastic strain softening timber beams. The theoretical method for calculating the deflections due to bending and shear is developed, using the virtual work principle for beams. For Japanese cedar, the simplified bi-linear σ - ϵ relationship with a linear falling branch is used, according to compression and tension tests. The shearing stresses of timber beams in the elastic-plastic range are also presented. The numerical solutions obtained from the presented virtual work principle are compared with the test results, and the accuracy and the efficiency of this method may be verified.

Keywords: elasto-plastic, strain-softening, shear deformation, timber beam

1. ま え が き

ひずみが増加するとともに応力が減少するひずみ軟化挙動が、木材、コンクリート、岩石や土などの材料にみられることはよく知られている。たとえば針葉樹のスギの場合、圧縮試験による応力-ひずみ曲線（以後、略して σ - ϵ 曲線）において0.4~0.6%のひずみを越えたところからひずみ軟化挙動を示すことが報告されている¹⁾。

集成材を含む木桁の終局曲げ強さに関する研究報告^{1)~9)}によると、圧縮試験と引張試験による σ - ϵ 曲線をもとに、木桁のひずみ分布の直線性を仮定することにより終局曲げ強さが評価できるとされている。今²⁾とZakic^{6),7)}は、圧縮応力に対しては完全弾塑性、引張応力に対しては弾性とするbi-linear型の σ - ϵ 関係を仮定し、単純はりの曲げ破損法則を述べ、塑性域におけるせん断応力の効果を評価した。Robinsonら³⁾は引張側で弾性、圧縮側でひずみ軟化を考慮した三角形の σ - ϵ 関係を用いており、圧縮、引張およびせん断の組合せで破壊が起こるとしている。Moe⁴⁾もひずみ軟化を考慮した

σ - ϵ 関係を用いているが、圧縮側で曲げ破壊が支配されるとしており、引張強さとせん断応力には言及していない。Malhotraら⁸⁾は、ひずみ軟化を考慮したbi-linear型の σ - ϵ 関係を用いて木桁の終局曲げ強さ理論を展開し、寸法効果を考慮したはりの終局曲げモーメントを求めているが、終局時の応力分布を仮定しているために漸増荷重に対する塑性域の広がりを求めることができず、せん断応力に関しても触れていない。Buchanan⁹⁾はMalhotraらが用いたbi-linear型を一部修正し、曲げおよび曲げと軸力を受ける部材の終局モーメントを求めているが、せん断応力については議論していない。

これらの報告では、文献1)を除いて弾塑性状態のはりの変位には言及していない。木桁の設計法は耐荷力を基本とする許容応力度設計法^{10),11)}が主流と思われるが、橋梁部材として木材を用いる場合は曲げ耐荷力と変位限界を明らかにしておく必要がある。近年アメリカ、カナダ¹²⁾およびヨーロッパ^{13),14)}等で木橋の開発研究が行われており、集成材を含む木材が橋梁構造の主要部分に使用されていることが報告されている。わが国においても集成材を主要部材とした歩道橋^{15),16)}および林道橋^{17),18)}の架設例が報告されている。

著者ら¹⁾はすでに、完全弾塑性モデルを用いて集成材高欄支柱の弾塑性状態における曲げによる変位を求めて

* 正会員 工修 秋田大学助手 鉾山学部土木工学科
(〒010 秋田市手形学園町1-1)

** 正会員 工博 秋田大学教授 鉾山学部土木工学科 (同上)

いる。ここではこれを進展させ、Malhotraらが用いたbi-linear型の σ - ϵ 関係を用いて圧縮ひずみのひずみ軟化を考慮した弾塑性解析を行い、破壊に至るまでの曲げによるはりの変位を求めた。また、直応力とつり合うせん断応力を用いてはりのせん断による変位を求め、塑性域におけるせん断応力の効果を評価した。さらに実験値との比較により本解析法の検証を行った。

2. 応力分布と塑性域

一軸対称断面を対象とし、曲げとせん断を受けるひずみ軟化はりを考える。断面内の任意点の変位は、断面形不変とベルヌーイ・オイラーの仮定より

$$u(x, z) = u_0 \dots\dots\dots (1)$$

$$w(x, z) = w_0 - x \cdot u_0' \dots\dots\dots (2)$$

ここで、座標軸 x と z は直角座標系 (図-3参照)、 u_0 , w_0 は部材 z 軸上のたわみおよび軸方向変位であり、上付き'は z に関する微分を表わす。また直ひずみは次式で与えられる。

$$\epsilon_z(x, z) = u_0' - x \cdot u_0'' \dots\dots\dots (3)$$

弾性部と塑性部に対する断面力-変位関係から軸ひずみ w_0' と曲率 ($-u_0''$) を求め式 (3) に代入すると、弾塑性状態にある断面内の任意点のひずみは、完全弾塑性¹⁾の場合と同様に弾性部分の受け持つ軸力、曲げモーメントおよび弾性部分の断面定数で表示できる。しかしながら、ここでは弾塑性状態における断面内の応力分布をもとに、中立軸の移動を示す変数 η と弾塑性境界を示す変数 c を用いてひずみを表現する。

図-1の黒丸と白丸は、圧縮試験と引張試験から得られたスギ材の2試験片の応力-ひずみ関係¹⁾を示している。圧縮試験側では圧縮強さを越えると木材の細胞の破壊によりひずみ軟化挙動を示すのがみられるが、引張側では破断点まではほぼ直線関係となっている。これらの試験結果をもとに、曲げを受けるひずみ軟化集成材桁の応力-ひずみ関係を図-1の破線のように比例限界までは応力分布は線形で、圧縮側と引張側におけるヤング係数 E は等しいと仮定する。応力-ひずみ曲線をこのように

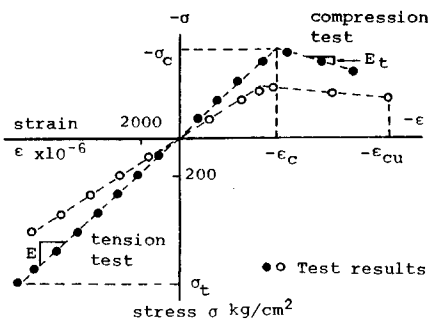


図-1 応力-ひずみ関係

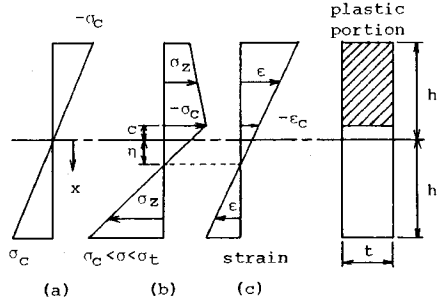


図-2 はりの応力とひずみ分布

単純化しても実際の応力分布を十分に表わすことができる⁸⁾。また、破壊に至るまで曲げによる断面内直ひずみ分布は線形とする。

図-2に弾塑性状態における断面内の応力とひずみ分布を示しているが、図の応力分布から弾性部の応力とひずみ軟化部の応力 σ_z が次式で示される。

$$\sigma_z = \frac{\sigma_c(x-\eta)}{(\eta+c)} \quad (-c \leq x \leq h) \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma_z = \frac{n\sigma_c(x-\eta)}{(\eta+c)} + (n-1)\sigma_c \quad (-h \leq x \leq -c) \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 σ_c =圧縮強さ、 $c(z)$ =弾塑性境界の位置、 $\eta(z)$ =断面重心から中立軸までの距離、 $n = E_t/E$, E_t =ひずみ軟化係数 (図-1参照)である。ひずみは上記の仮定より弾性部とひずみ軟化部において

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_c(x-\eta)}{E(\eta+c)} \quad (-h \leq x \leq h) \dots\dots\dots (6)$$

図-2(a)に示すように、はりの上下縁の応力度が $\pm\sigma_c$ になるまでは弾性であるが、荷重を増加すると (b) に示すように圧縮側塑性域でひずみ軟化を示し、引張縁が引張強さ σ_t に達するかあるいは圧縮縁のひずみが図-1の ϵ_{cu} になると崩壊する。断面に生じる軸力 N ($=0$) と曲げモーメント M は図-2(b)の弾塑性状態に対して式 (4), (5) を用いると

$$N = \int_F \sigma_z dF = \int_{-h}^{-c} \left\{ \frac{n\sigma_c(x-\eta)}{(\eta+c)} + (n-1)\sigma_c \right\} t dx + \int_{-c}^h \frac{\sigma_c(x-\eta)}{(\eta+c)} t dx = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$M = \int_F \sigma_z x dF = \int_{-h}^{-c} \left\{ \frac{n\sigma_c(x-\eta)}{(\eta+c)} + (n-1)\sigma_c \right\} x t dx + \int_{-c}^h \frac{\sigma_c(x-\eta)}{(\eta+c)} x t dx = M(z) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 F =断面積、 $2h$ =はりの高さ、 t =はりの幅である。

式 (7) から η を求め式 (8) に代入し積分すると η と c が次式で与えられる。

$$\eta = \frac{(1-n)(h-c)^2}{4h} \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned}
 &2h\sigma_c t(1-n)c^2 + 3M(1-n)c^2 \\
 &- 6h\{\sigma_c t h^2(1-n) - M(1+n)\}c \\
 &- 4h^4\sigma_c t(1+n) + 3h^2(1-n)M = 0 \dots\dots\dots(10)
 \end{aligned}$$

式(10)は c に関する3次式であるので、弾塑性境界 c はニュートン法を用いて求める。完全弾塑性材料に対しては、式(10)で $n=0$ とすると

$$(2h\sigma_c t c - 4h^2\sigma_c t + 3M)(c+h)^2 = 0 \dots\dots\dots(11)$$

c は M の1次式となり、集中荷重が作用する場合桁軸方向に直線変化する¹⁾。

終局状態は上記のように引張強さ σ_t が圧縮ひずみ ϵ_{cu} に支配されるが、曲げを受けるはりが引張側で曲げ破壊する場合、式(4)で $x=h$, $\sigma_x = \sigma_t$ とし、式(9)と連立させて解くと終局状態における弾塑性境界 c_u は

$$\begin{aligned}
 c_u = &\frac{h}{(1-n)(\sigma_c + \sigma_t)} \{ (1-n)\sigma_c - (1+n)\sigma_t \\
 &+ 2h\sqrt{(1-n)\sigma_c^2 + n\sigma_t^2} \} \dots\dots\dots(12)
 \end{aligned}$$

となり、圧縮強さ σ_c 、引張強さ σ_t およびひずみ軟化の程度を表わす係数 n の関数となる。この c_u を式(10)に代入すると終局モーメント M_u は

$$\begin{aligned}
 M_u = &[2h\sigma_c t \{(n-1)c_u^2 + 3h^2(1-n)c_u \\
 &+ 2h^2(1+n)\}]/[3\{(1-n)c_u^2 \\
 &+ 2h(1+n)c_u + h^2(1-n)\}] \dots\dots\dots(13)
 \end{aligned}$$

終局時における弾塑性境界の位置 a_u (図-3参照)は、式(10)で $c=h$, $M=M$ ($z=a_u$) として得られる。図-3の2点集中荷重が作用する場合 $M = P_u \cdot a_u$ を代入すると

$$a_u = \frac{2h^2 t \sigma_c}{3P_u} \dots\dots\dots(14)$$

となり、完全弾塑性の場合¹⁾と同じである。図-4の単一集中荷重の場合の a_u は、式(14)で $P_u = P_u/2$ とし得られる。

3. 曲げによる変位

前節で求めた結果を用い、弾塑性状態にあるはりの曲げによる変位を求める。

図-3の単純ばりに2点集中荷重が作用するときの支間中央の曲げによる変位を u_b 、はりの内部の応力とひずみを (σ, ϵ) とし、支間中央に仮想単位力 $P=1$ を作用させた弾性はり内部の応力とひずみを $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$ とする

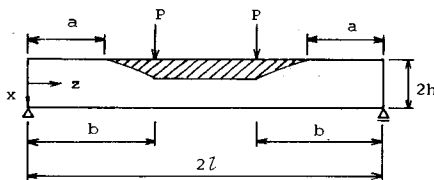


図-3 2点集中荷重を受けるはりの弾塑性境界

と、弾塑性状態での補仮想仕事の原理は

$$\begin{aligned}
 1 \cdot u_b = &\int_V \bar{\sigma} \epsilon dV = 2 \int_0^a \int_F \bar{\sigma} \epsilon dF dz \\
 &+ 2 \int_b^l \int_F \bar{\sigma} \epsilon dF dz + 2 \int_b^l \int_F \bar{\sigma} \epsilon dF dz \dots\dots\dots(15)
 \end{aligned}$$

ここで V は体積、 b は支点から荷重点までの距離である。弾性域 $0 \leq z \leq a$ においてひずみは断面二次モーメント I を用い $\epsilon = x \cdot M/EI$ 、弾塑性域 $a \leq z \leq l$ において式(6)が成り立つ。仮想の状態での曲げモーメントを \bar{M} とすると $0 \leq z \leq l$ において $\bar{\sigma} = x \cdot \bar{M}/I$ であるからこれらを式(15)に代入すると

$$\begin{aligned}
 u_b = &2 \int_0^a \frac{\bar{M} M}{EI} dz + 2 \int_a^b \frac{\bar{M} \sigma_c}{E(\eta + c)} dz \\
 &+ 2 \int_b^l \frac{\bar{M} \sigma_c}{E(\eta_b + c_b)} dz = \frac{P a^3}{3EI} \\
 &+ \frac{4h\sigma_c}{E} \int_a^b \frac{z}{(h+c)^2 - n(h-c)^2} dz \\
 &+ \frac{2h\sigma_c(l^2 - b^2)}{E\{(h+c_b)^2 - n(h-c_b)^2\}} \dots\dots\dots(16)
 \end{aligned}$$

ここで c_b と η_b は $z=b$ における値である。軸方向の弾塑性境界 a は式(14)で $a_u = a$, $P_u = P$ とすればよい。式(16)の積分は積分区間を分割し、各区間で式(10)より c を求めその平均値を用いて行う。 $n=0$ とした完全弾塑性の場合、 u_b は式(11)の c を用いると次式のように陽形で得られる。

$$\begin{aligned}
 u_b = &\frac{P a^3}{3EI} \left[1 + 12 \left\{ \frac{3}{3-b/a} - \frac{3}{2} + \ln \frac{1}{2} \left(3 - \frac{b}{a} \right) \right\} \right. \\
 &\left. + \frac{6(l^2 - b^2)}{(3a - b)^2} \right] \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

図-4の単純ばりに中央集中荷重が作用するときの載荷点の曲げによる変位 u_b は、式(16)と(17)で $P = P/2$, $b=l$ とし得られる。

4. せん断による変位

2. で示した直応力分布を用いてつり合い条件を満たすせん断応力を求め、弾塑性状態にあるはりのせん断による変位を求める。

(1) せん断応力分布

はり断面材の微小要素の z 方向の力のつり合い条件より、せん断応力 τ_{xz} は

$$\frac{\partial(\tau_{xz}t)}{\partial x} = -\frac{\partial(\sigma_z t)}{\partial z} \dots\dots\dots(18)$$

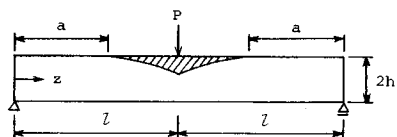


図-4 単一集中荷重を受けるはりの弾塑性境界

上式を積分し、 $x = -h$ で $\tau_{xz} = 0$ より積分定数を決定すると

$$\tau_{xz}t = -\int_{-h}^x t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dx \dots\dots\dots (19)$$

式 (19) に式 (4), (5) を代入し積分を行い整理すると、弾塑性状態にある断面内のひずみ軟化部のせん断応力 τ_{xz} と弾性部の τ_{xz} が次式で与えられる。

$$\tau_{xz} = -nA \frac{S_{x1}}{t} - nB \frac{S_{x2}}{t} \quad (-h \leq x \leq -c) \dots\dots (20)$$

$$\tau_{xz} = \tau_1 - A \frac{S_{x3}}{t} - B \frac{S_{x4}}{t} \quad (-c \leq x \leq h) \dots\dots (21)$$

ここで

$$A = A_0 \frac{dc}{dz} = -\frac{8h\sigma_c(h+c) + n(h-c)}{(h+c)^2 - n(h-c)^2} \frac{dc}{dz} \dots\dots (22)$$

$$B = B_0 \frac{dc}{dz} = \frac{4h\sigma_c(1-n)(h^2 - c^2)}{(h+c)^2 - n(h-c)^2} \frac{dc}{dz} \dots\dots (23)$$

$$S_{x1} = \int_{-h}^x xt \cdot dx \quad (-h \leq x \leq -c) \dots\dots (24)$$

$$S_{x2} = \int_{-h}^x t \cdot dx \quad (-h \leq x \leq -c) \dots\dots (25)$$

$$S_{x3} = \int_{-c}^x xt \cdot dx \quad (-c \leq x \leq h) \dots\dots (26)$$

$$S_{x4} = \int_{-c}^x t \cdot dx \quad (-c \leq x \leq h) \dots\dots (27)$$

τ_1 は弾塑性境界におけるせん断応力で、式 (20) で $x = -c$ より得られる。断面に生じているせん断力 Q は

$$Q = \int_{F_p} \tau_{xz} dF + \int_{F_e} \tau_{xz} dF \dots\dots (28)$$

ここで、 F_p と F_e は断面内の塑性部分および弾性部分の断面領域を示す。上式に (20) と (21) を代入すると (22), (23) の dc/dz は次式のように得られ、せん断応力がせん断力と断面定数で表示できる。

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dz} = & \left[-n \left\{ \frac{A_0}{2} I_p + B_0 Z_p - \left(\frac{A_0 h^2}{2} - B_0 h \right) F_p \right\} \right. \\ & - n \left\{ \frac{A_0}{2} (c^2 - h^2) + B_0 (-c + h) \right\} F_e - \frac{A_0}{2} I_e \\ & \left. - B_0 Z_e + \left(\frac{A_0 c^2}{2} - B_0 c \right) F_e \right]^{-1} Q \dots\dots (29) \end{aligned}$$

ここで断面定数は以下のような、ひずみ軟化部および弾性部の断面積、断面一次および二次モーメントである。

$$[F_p, Z_p, I_p] = \int_{F_p} [1, x, x^2] dF \dots\dots (30)$$

$$[F_e, Z_e, I_e] = \int_{F_e} [1, x, x^2] dF \dots\dots (31)$$

完全弾塑性の場合のせん断応力は、式 (29) で $n=0$ とし式 (20), (21) に代入すると

$$\tau_{xz} = 0 \quad (-h \leq x \leq -c) \dots\dots (32)$$

$$\tau_{xz} = \frac{2Q}{I_p \cdot t} S_{x3} - \frac{(h-c)Q}{I_e \cdot t} S_{x4} \quad (-c \leq x \leq h) \dots\dots (33)$$

ここで、 $I_p = I_e - (h-c)Z_e - hcF_e$ である。

(2) せん断による変位

曲げによる変位を求める方法と同様にして補仮想仕事の原理を用い、せん断による変位を求めることとする。

図-3の単純ばりに2点集中荷重が作用するときのはり中央点のせん断による変位を u_s 、はりの内部のせん断応力とせん断ひずみを (τ, γ) とし、支間中央に仮想単位力 $P=1$ を作用させた弾性は内部のせん断応力とせん断ひずみを $(\bar{\tau}, \bar{\gamma})$ とする。 $b \leq z \leq l$ の荷重点間において、曲げモーメントが一定ゆえに式 (19) で $\partial \sigma_z / \partial z = 0$ となり、荷重点間でせん断ひずみは零となる。これより、弾塑性状態での補仮想仕事の原理は

$$1 \cdot u_s = \int_V \bar{\tau} \gamma dV = 2 \int_0^a \int_F \bar{\tau} \gamma dF dz + 2 \int_a^b \int_F \bar{\tau} \gamma dF dz \dots\dots (34)$$

弾性域 $0 \leq z \leq a$ においてせん断ひずみは $\gamma = \tau/G$ を仮定して

$$\gamma = -\frac{Q}{GI_t} S_x, \quad S_x = \int_{-h}^x xt \cdot dx \dots\dots (35)$$

ここで、 G = せん断弾性係数である。

弾塑性域 $a \leq z \leq b$ のひずみ軟化部は、圧縮強さに達してからマイクロ組織の破壊が生じていると考えられる。これより、ひずみ軟化部のせん断応力とせん断ひずみの関係は、ひずみ硬化の場合¹⁹⁾と同様に、図-5に示すようにせん断弾性係数が曲げ応力の減少と同じ割合で低下し、圧縮側と引張側において応力-ひずみ関係は対称であると仮定する。文献19)のせん断応力とせん断ひずみの関係を本論文での記号で表わすと

$$\frac{\dot{\tau}}{\gamma} = \frac{G}{E} \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \dots\dots (36)$$

ここで、 $\dot{\sigma}/\dot{\epsilon}$ は図-1よりひずみ軟化部で E_s 、弾性部で E である。これよりひずみ軟化部のせん断応力は

$$\dot{\tau} = G \frac{E_s}{E} \dot{\gamma} = nG \dot{\gamma} \dots\dots (37)$$

図-5の関係を用い、式 (37) を全応力と全ひずみで表わすとひずみ軟化部のせん断ひずみは

$$\gamma = \frac{\tau - (1-n)\tau_1}{nG} \dots\dots (38)$$

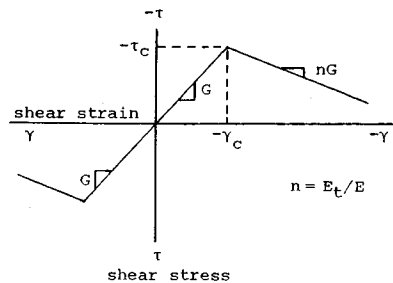


図-5 せん断応力-せん断ひずみ関係

また、弾性部で $\gamma = \tau/G$ の関係を用いると、弾塑性域のひずみ軟化部と弾性部のせん断ひずみは式(20)と(21)から求めることができる。

仮想の状態でのせん断力を \bar{Q} とすると、 $0 \leq z \leq b$ において $\bar{\tau} = -s_x \bar{Q}/I \cdot t$ であるからこれらを式(34)に代入すると支間中央のせん断による変位は

$$\begin{aligned}
 u_s = & 2 \int_0^a \int_x \frac{\bar{Q}Q}{GF} dz + 2 \int_a^b \int_{-h}^{-c} -\frac{\bar{Q}s_x}{It} \gamma dx dz \\
 & + 2 \int_a^b \int_c^{-h} -\frac{\bar{Q}s_x}{It} \gamma dx dz = \frac{\kappa Pa}{GF} \\
 & + \int_a^b \left\{ \frac{tA}{60GI} (6h^5 - 15h^4c \right. \\
 & + 10h^3c^2 + 20h^2c^3 - 5c^5) \\
 & + \frac{tB}{6GI} (-2h^4 + h^3c - 3h^2c^2 - hc^3 + c^4) \\
 & + \frac{\tau_1 t}{6GI} (2h^3 + 3h^2c - c^3) \\
 & \left. + \frac{(1-n)\tau_1 t}{6GIn} (-2h^3 + 3h^2c - c^3) \right\} dz \dots\dots(39)
 \end{aligned}$$

ここで、 κ は弾性域における既往のせん断補正係数で

$$\kappa = \frac{F}{I^2} \int_F \left(\frac{s_x}{t} \right)^2 dF \dots\dots(40)$$

長方形断面の場合 $\kappa = 1.2$ である。完全弾塑性の場合の u_s は式(32)、(33)のせん断応力を用いると

$$\begin{aligned}
 u_s = & \frac{\kappa Pa}{2htG} \left[1 + \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{9}{20} \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3}{20} \left(\frac{b}{a} \right)^3 - \frac{9}{10} \right] \right] \dots\dots(41)
 \end{aligned}$$

図-4の単純ばりに中央集中荷重が作用するとき、載荷点のせん断による変位 u_s は、式(39)と(41)で $P = P/2$ 、 $b = l$ として得られる。

5. 数値計算

(1) モデル 1

数値計算で対象としたモデル1桁は、坊川林道橋^{17),20)}の主桁を製作する際に余分に1本作製した集成材で、2.5cm厚の秋田杉のひき板21層をレゾルシノール樹脂接着剤で接着積層したものである。図-6に示すように20.2×53cmの長方形断面で桁長6m、支間Lを坊川林道橋と同じ5.6mとして支間中央に集中荷重を作用させて曲げ破壊実験を行っている²⁰⁾。

図-6は載荷点における荷重と変位の関係を示している。図中の白丸は実験値で、載荷点付近の引張側での曲げ破壊であった。図の実験値で弾性状態における荷重-変位関係を用い、次式の長方形断面に対する曲げとせん断による変位の式より、スギを用いた集成材に対する $E/G = 80000/4000 = 20^{21)}$ と仮定して E と G を決定した。

$$u = \frac{PL^3}{48EI} \left\{ 1 + \kappa \frac{(2h)^2 E}{L^2 G} \right\} \dots\dots(42)$$

また、実験値の比例限界荷重を降伏限界荷重 P_Y とし、降伏モーメント $M_Y = P_Y l/2 = 2\sigma_c t h^2/3$ より圧縮強さ σ_c を推定した。ひずみ軟化の程度を表わすパラメーター n は秋田杉の場合材料試験¹⁾によると $-0.12 \leq n \leq 0$ の範囲にあり、表-1に示すように n の値により荷重-変位曲線は異なるが、ここでは実験結果をほぼ説明し得ると思われる $n = -0.09$ を用いて計算を行った。実線はひずみ軟化を考慮した曲げとせん断による変位で、破線は完全弾塑性 ($n=0$) の場合である。図より、ここで用いた例では完全弾塑性として計算しても実験値をほぼ追跡できることがわかる。最大荷重時の曲げによる変位は、ひずみ軟化を考慮すると完全弾塑性と比べて5%程度大きくなる。図中にせん断による変位を示しているが、完全弾塑性の場合塑性化が進行すると変位に及ぼすせん断の影響は小さくなっている。また、ひずみ軟化を考慮すると、ひずみ軟化部の負のせん断ひずみにより変位を拘束するのがみられ、最大荷重時のせん断による変位はひずみ軟化を考慮すると完全弾塑性より15%小さな値となっている。

図-7は最大荷重時における載荷点近傍の断面内の直応力とせん断応力分布を示しているが、実線のひずみ軟化を考慮した引張応力とせん断応力は、破線の完全弾塑性の場合より増加するのがみられる。せん断応力図で一点鎖線は弾性解を示しているが、ひずみ軟化を考慮すると最大せん断応力は弾性解の約3倍、完全弾塑性解の約2倍と大きくなり、せん断破壊についても検討する必要がある。実験結果に従い、最大荷重時の引張応力で曲げ破壊すると仮定し、式(4)から得られる引張縁応力を引張強さとする。次式の木材の降伏条件式²²⁾にせん断強さ $\tau_c = 55 \text{ kg/cm}^2$ (日本農林規格²³⁾)、引張強さ $\sigma_t = 413 \text{ kg/cm}^2$ (図-7参照) および圧縮強さの推定値 $\sigma_c = 192$

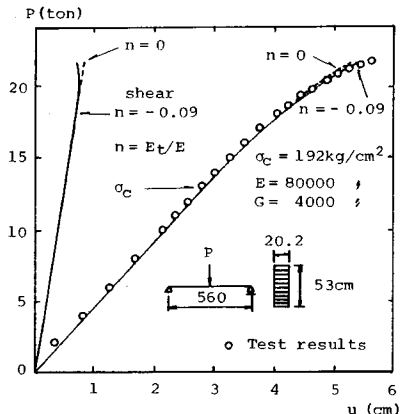


図-6 荷重-変位曲線

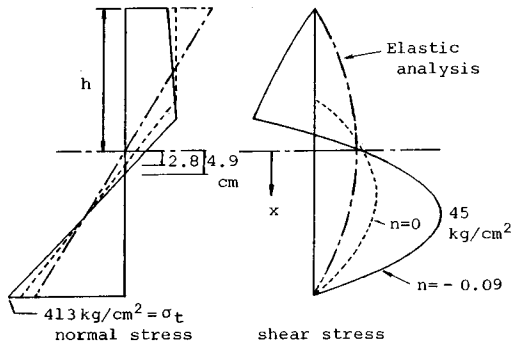


図-7 直応力とせん断応力分布

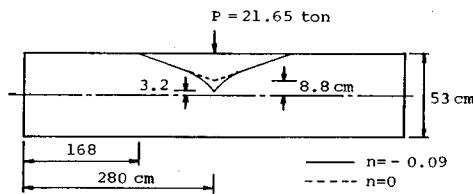


図-8 塑性域の分布

kg/cm² (図-6 参照) を代入すると、最大荷重時に於いて最大せん断応力が生じる $x \approx 12$ cm の点の値は、 $\sigma_x = 111$ kg/cm² と $\tau_{xz} = 45$ kg/cm² より

$$\left(\frac{1}{\sigma_t} - \frac{1}{\sigma_c}\right)\sigma_x + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_t\sigma_c} + \frac{\tau_{xz}^2}{\tau_c^2} = 0.52 < 1 \dots\dots\dots(43)$$

となる。また、完全弾塑性の場合 $x \approx 8$ cm でせん断応力が最大となり、 $\sigma_t = 371$ kg/cm² (表-1 参照) を代入すると上式の値は 0.05 である。

図-8 は最大荷重時における塑性域の分布を示しており、塑性域の広がりにはスパン長に対して 0.4 である。図より、荷重点付近でひずみ軟化の影響が現われているのがわかる。

(2) モデル 2

数値計算で用いたモデル 2 桁は、坊川林道橋の主桁の 1/3 モデル桁で、2.2 cm 厚の秋田杉のひき板 8 層をレゾルシノール樹脂接着剤で接着積層した集成材である。図-9 に示すように 7.2×17.8 cm の長方形断面で、支間を 2.8 m として 2 点集中荷重を作用させて曲げ破壊実験を行った。荷重点間距離は日本農林規格の曲げ A 試験に従い、4L/18 とした。

図-9 は支間中央における荷重と変位の関係を示している。図中の白丸は実験値で、載荷点付近の引張側での曲げ破壊であった。(1) と同様に図の実験値で弾性状態における荷重-変位関係を用い、曲げとせん断による変位の式から $E/G=20$ と仮定して E と G を決定した。また、圧縮強さは実験値の比例限界荷重より推定した。ひずみ軟化の程度を表わすパラメーター n は -0.09 を

表-1 弾塑性境界と引張強さ

n	Model 1		Model 2	
	C_u (cm)	σ_t (kg/cm ²)	C_u (cm)	σ_t (kg/cm ²)
0	8.8	371	3.0	482
-0.01	8.5	373	2.9	485
-0.02	8.2	376	2.8	489
-0.03	7.8	379	2.6	493
-0.04	7.4	383	2.5	497
-0.05	7.0	387	2.4	502
-0.06	6.5	391	2.2	508
-0.07	5.8	397	2.0	515
-0.08	4.9	404	1.7	524
-0.09	3.2	413	1.1	536
Elastic analysis		321		416

1 kg/cm² = 0.098 MPa

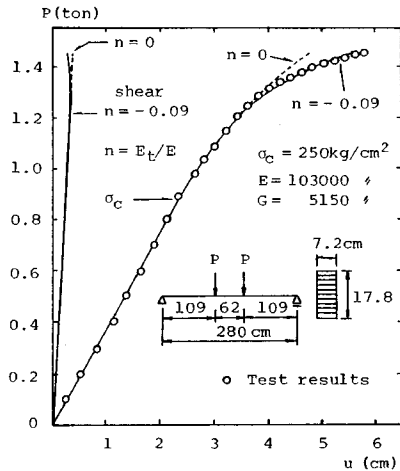


図-9 荷重-変位曲線

用いて計算を行った。実線はひずみ軟化を考慮した曲げとせん断による変位で、破線は $n=0$ とした完全弾塑性の場合である。図より、ここで用いた例では完全弾塑性として計算すると実験値を追跡することができず、ひずみ軟化を無視できないことがわかる。最大荷重時の曲げによる変位は、ひずみ軟化を考慮すると完全弾塑性の場合より 20% 大きくなる。また、せん断による変位を図中に示しているが、単一集中荷重の場合と同様に、完全弾塑性の場合塑性化が進行すると変位に及ぼすせん断の影響は小さくなっている。最大荷重時のせん断による変位は、ひずみ軟化を考慮すると完全弾塑性より 14% 小さな値となっている。

最大荷重時における荷重点近傍の断面内の直応力とせん断応力分布を図-10 に示す。式 (43) の降伏条件式の値は、最大せん断応力が生じる点でひずみ軟化を考慮すると 0.65、完全弾塑性の場合 0.09 である。

最大荷重時における塑性域の分布を図-11に示す。塑性域は荷重点間で一定分布となり、荷重点付近でひずみ軟化の影響が現われているのがわかる。

図-12は支間中央における直ひずみと荷重の関係を示している。0.9 t付近から非線形性がみられ、計算値は実験値とほぼ等しい値となっている。また、弾性状態と弾塑性状態の断面内ひずみ分布を図-13に示してい

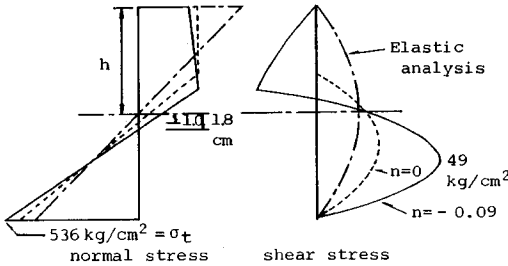


図-10 直応力とせん断応力分布

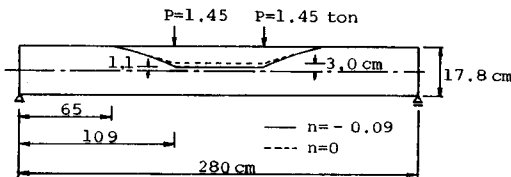


図-11 塑性域の分布

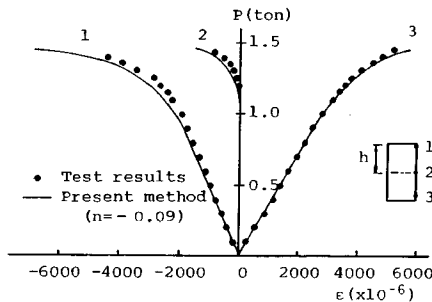


図-12 荷重-ひずみ曲線

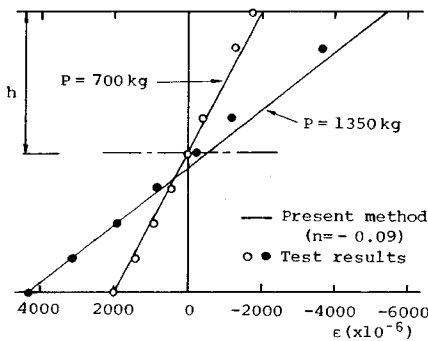


図-13 断面内ひずみ分布

るが、弾塑性状態でも断面内のひずみ分布を直線とみなしてよさそうである⁸⁾。なお、図-12, 13で接着不良等のために測定できなかったひずみは除外してある。

モデル2桁の終局モーメントは、実験値の最大荷重 $P=1.45\text{ t}$ より $M_u=P \cdot b=1.58\text{ tm}$ となる。 M_u と圧縮強さの推定値 $\sigma_c=250\text{ kg/cm}^2$ (図-9参照) を式 (13) に代入して、ひずみ軟化の程度を示す係数 n を変数とすると、パラメーター n に対する弾塑性境界 c_u が得られる。また、この c_u を式 (12) に代入すると引張強さ σ_t が決定できる。完全弾塑性の $n=0$ から数値計算で用いた $n=-0.09$ までのこれらの関係を、モデル1とともに表-1に示す。表よりひずみ軟化の程度が大きくなるにつれて引張強さの増加がみられ、両モデルとも $n=-0.09$ に対する σ_t は $n=0$ の場合と弾性解よりそれぞれ 11% と 29% 増加している。また、ひずみ軟化が大きくなると c_u が減少し、断面内の塑性域分布が増加するのがわかる。両モデルともに塑性域の広がりには桁高に対し $n=0$ の場合 0.33, $n=-0.09$ の場合 0.44 となっている。

6. あとがき

弾塑性状態でも木材の圧縮側のひずみ軟化を考慮したはりの変位を求める手法を示した。材料試験の $\sigma-\epsilon$ 曲線をもとにして、圧縮側でひずみ軟化を、引張側で弾性とする bi-linear 型の $\sigma-\epsilon$ 曲線を仮定し、軸力および曲げモーメントとのつり合いより中立軸の移動と塑性域分布を求めた。単純ばりに集中荷重を作用させると、塑性域分布は完全弾塑性の場合曲げモーメントの1次式、ひずみ軟化を考慮すると3次式で軸方向に分布し、荷重点付近でひずみ軟化の影響が現われるのが数値計算で確かめられた。

曲げを受ける弾性はりの補仮想仕事の原理を弾塑性状態のはりへ適用し、曲げによるはりの変位を求めた。ここで、はりの内部のひずみは中立軸の移動を示す変数 η と弾塑性境界を示す変数 c で表示した。bi-linear 型で仮定した直応力分布とつり合うせん断応力を用いて、曲げによる変位を求めるのと同様な手法でせん断による変位を求めた。

秋田杉集成材桁に単一集中荷重と2点集中荷重を作用させた曲げ破壊実験と比較するために、曲げとせん断による変位の解析解を求め比較検討を行った。ここで用いた例では、材料試験¹⁾の結果と同様に、完全弾塑性にモデル化しても実験値を追跡できる場合もあるが、同じスギでも $\sigma-\epsilon$ 曲線が異なるのでひずみ軟化を無視できない場合があることが認められた。また、せん断による変位は、ひずみ軟化を考慮すると完全弾塑性として得られる値より小さくなっている。数値計算より、ひずみ軟化

を考慮するとせん断応力の増加がみられ、終局状態において曲げ破壊のみならずせん断破壊に対しても留意すべきであると思われる。なお、圧縮側のひずみ軟化がより顕著で荷重変位関係に下降域があるような場合には、新たに載荷除荷基準を導入する必要がある。

ここで用いた、断面内直ひずみ分布を弾塑性状態でも直線とする仮定の妥当性が実験結果より認められ、以上のように、本解析法は曲げとせん断を受ける節等の欠点のない集成材桁の破壊実験結果をよく説明し得るものと思われる。

参 考 文 献

- 1) 薄木征三・堀江 保・亀井義典：集成材高欄支柱の弾塑性状態における変位，構造工学論文集，Vol. 35A，pp. 861~870，1989.
- 2) 今 俊三：木材の曲げ破損法則について，北海道大学工学部研究報告，pp. 1~28，1949.
- 3) Robinson, H. and Cooper, D.W. : The ultimate strength in bending of solid beams of structural grade European redwood. J. Inst. Wood Sci. 1(2), pp. 40~65, 1958.
- 4) Moe, J. : The Mechanism of Failure of Wood in Bending, Publication International Association for Bridge and Structural Engineering 21, pp. 163~178, 1961.
- 5) Zacic, B.D. : Inelastic Bending of Wood Beams, Jour. of the Struct. Engrg., ASCE, Vol. 99, No. 10, pp. 2079~2095, 1973.
- 6) Zacic, B.D. : Shearing Stress in Plastic Bending of Wood Beams, Jour. of the Struct. Engrg., ASCE, Vol. 109, No. 4, pp. 1042~1060, 1983.
- 7) Zacic, B.D. : Shearing Failure in Plastic Bending of Wood Beams, Holz-Forschung und Holzverwertung, Vol. 36, pp. 85~93, 1984.
- 8) Malhotra, S.K. and Bazan, I.M.M. : Ultimate Bending Strength Theory for Timber Beams, Wood Sci. Vol. 13, No. 1, pp. 50~63, 1980.
- 9) Buchanan, A.H. : Combined Bending and Axial Loading in Lumber, Jour. of the Struct. Engrg., ASCE, Vol. 112, No. 12, pp. 2592~2609, 1986.
- 10) American Association of State Highway and Transportation Officials : Standard Specifications for Highway Bridges, 13th edition, 1983.
- 11) American Institute of Timber Construction : Timber Construction Manual, 3rd edition, Englewood, Colo., 1985.
- 12) Gutkowski R.M. and Williamson, T.G. : Timber Bridges : State-of-the-Art, Jour. of the Struct. Engrg., ASCE, Vol. 109, No. 9, pp. 2175~2191, 1983.
- 13) Wilson, M.C. and Bell, R.D. : The Design and Construction of the River Rother Cable-Stayed Footbridge, Rother Valley Park, Proc. Instn Civil Engrs, Part 1, 78, pp. 545~563, 1985.
- 14) Hay, R.M. : The Role of the Civil Engineer in the Forestry Commission, Proc. Instn Civil Engrs, Part 1, 80, pp. 707~729, 1986.
- 15) 林野庁林産課監修：大断面集成材建築物の手引き，1985.
- 16) 鈴木 基：矢ヶ崎大橋（軽井沢町），NIKKEI ARCHITECTURE, pp. 154~158, 1988年8月8日号.
- 17) 長谷部薫・薄木征三：集成材を主桁とした格子桁の解析と実験的研究，土木学会論文集，第397号/VI-9, pp. 85~94, 1988.
- 18) 長谷部薫・薄木征三：集成材格子桁橋鶴養林道橋の現場実験と解析，構造工学論文集，Vol. 35A, pp. 879~887, 1989.
- 19) Hasegawa, A., Liyanage, K., Noda, M. and Nishino, F. : An Inelastic Finite Displacement Formulation of Thin-Walled Members, Proc. of JSCE, No. 386/I-8, pp. 269~276, 1987.
- 20) 薄木征三・長谷部薫：集成材を主構造とした坊川林道橋の防霉処理と架設，土木学会論文集，第403号/VI-10, pp. 249~255, 1989.
- 21) 日本建築学会：木構造設計規準・同解説，1973.
- 22) Hasebe, K. and Usuki, S. : Application of an Orthotropic Failure Criterion to Wood, Jour. of Eng. Mech., ASCE, Vol. 115, No. 4, pp. 867~872, 1989.
- 23) 日本合板検査会：構造用大断面集成材の日本農林規格，1987.

(1989. 4. 26・受付)