

# 時間領域の有限要素法と境界要素法の 結合解法による地盤振動解析

## DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS OF GROUND USING A COUPLED FINITE ELEMENT AND BOUNDARY ELEMENT METHOD IN TIME DOMAIN

東平光生\*・吉田 望\*\*

By Terumi TOUHEI and Nozomu YOSHIDA

A coupled finite element and boundary element method in time domain is presented for the anti-plane strain and the plane strain wave fields. The wave equation is transformed into an ordinary differential equation with respect to time in FE region and that in BE region is transformed into a recurrence procedure with respect to time step. Basic equations in these regions are coupled by using the method of weighted residuals, and a recurrence procedure similar to the Newmark's beta method is obtained. This procedure is a scheme to solve BE region and FE region under the same time increment.

*Keywords: coupled FE and BE method, time domain, elastic wave equation*

### 1. はじめに

近年、地盤振動解析に、境界要素法や境界要素法と有限要素法の結合解法が活発に用いられるようになってきた。これは、境界要素法を用いることによって、波動の逸散減衰が厳密に評価されるばかりでなく、任意の入射角の地震動を簡単に扱うことができるためである。これらの特徴は、有限要素法にはない境界要素法の大きな利点であり、境界要素法が活発に用いられるようになったのも、これらの特徴のためである。ところで、これらの解析法の大部分は振動数領域で定式化されたものであり、時間領域で直接定式化されたものは非常に少ない。これは、過去において境界要素法が、まず時間依存性のない線形問題に適用され、その後、時間依存性を示す問題へと適用範囲が拡大されてきた<sup>1)</sup>ことが背景になっている。また、時間依存性を示す偏微分方程式に境界要素法を直接適用する場合には、定式化が複雑になり安定な解が得られにくい<sup>2)</sup>ことも原因と考えられる。

振動数領域で定式化された手法で、時間領域の解を得るためには、振動数成分ごとの解の重ね合わせが必要で

ある。しかし、たとえば時間の進行とともに材料性状が変化するような非線形問題に対してはこのような重ね合わせの原理は成立しないため、時間領域で定式化された手法が必要である。非線形挙動に対し、等価線形手法を用いて解析する方法は多く用いられてきており、周波数領域で定式化された手法でもその適用が可能である。しかし、材料が強い非線形性を示す場合には、等価線形手法の適用には限界がある<sup>3)</sup>。

時間領域境界要素法を用いて弾性波動方程式を解く最も初期の研究として、Coleらの研究が挙げられる。彼らは二次元面外波動場の解析で、表面力に対するGreen関数の積分が不要なモデルを用い、安定な解を得るためには、補関数の選択に制限があることを示した<sup>4)</sup>。続いて、Mansur、福井らのグループが、二次元の面外および面内波動場に対する研究を進めてきた。Mansurらは数値計算を行い、安定な数値積分を行うための時間ステップ増分は、境界要素の長さや波動の伝播速度によって制限され、任意に選択できないことを示した<sup>5)</sup>。福井らは、波動方程式のGreen関数の単位階段関数を定式化の段階で省略し、そのかわりに波動の進行に合わせて空間の離散化を行う方法を示した<sup>6)-8)</sup>。この手法は定式化が簡略なばかりでなく、波動方程式のGreen関数の特異性の処理をうまく行うことができるといった特徴を

\* 正会員 工修 佐藤工業(株)中央技術研究所  
(〒243-02 神奈川県厚木市三田47-3)

\*\* 正会員 工博 佐藤工業(株)中央技術研究所(同上)

もっている。しかし、波動の進行に合わせて、マトリックスを計算しなおす手間も必要となる。

ところで、これらの時間領域境界要素法を用いて、剛性の差が大きな領域が接しているモデルを解析する場合には、解の精度および安定性に問題が生じるようである<sup>9)</sup>。これは、波動の伝播速度が非常に異なる領域を同一の時間増分で解析するため、先の Mansur らの示した時間増分の制限を満たすことができなくなるためである。

このような時間増分に対する制限の問題を解決する方法として、境界要素法と有限要素法の結合解法を用いることが考えられる。これは、有限要素法における時間増分の取り方は、境界要素法の時間増分の制限に比べれば、比較的的自由であるためである。さらに、有限要素法は地盤振動解析において、地盤の非線形性や不均質性を合理的に考慮することもできる。このような意味においても、時間領域における有限要素法と境界要素法の結合解法は、時間領域境界要素法に比べ実用性をもっている。

時間領域境界要素法と有限要素法の結合解法に関する研究は福井らのグループと著者らによって論じられている。福井らの方法は有限要素領域と境界要素領域を異なる時間増分で解き、2つの領域の解を結合するために、最小二乗法と繰り返し計算を行うものである<sup>9)</sup>。これは、有限要素領域の時間積分法に Euler 法を用いているので、有限要素領域で安定な解を得るための時間増分を細かくとる必要が生じ、これと境界要素領域で要求される時間増分の大きさが異なるためである。

一方、著者らは二次元面外波動場について、有限要素領域と境界要素領域を同一の時間増分で解く、繰り返し計算の不要な解析法を提示した。この方法では、Newmark の  $\beta$  法に類似した漸化式が得られ、時間増分と無関係に安定な数値積分を行うことが可能である。また、漸化式のこうした性質を利用することで、有限要素領域と境界要素領域を同一の時間増分で解析することも可能である。著者らはこの方法を用いて、有限要素領域と境界要素領域の剛性の差が大きなモデルを解析し、安定で適切な解が得られることを実証した<sup>10),11)</sup>。

これら、著者らが示した手法は、重み付き残差法により有限要素法と境界要素法を結合するものであり、この手法は単に二次元面外波動場のみならず、一般的な問題についても適用可能と考えられる。本論文ではこのような観点で、時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法のアルゴリズムを二次元の面外および面内波動場について統一的に展開する。

## 2. 時間領域の有限要素法と境界要素法の基本式

ここでは、時間領域における弾性波動方程式の有限要素法と境界要素法の基本式を示す。

### (1) 弾性波動方程式

二次元の面外および面内の弾性波動方程式は以下のよう表わされる。

$$\mu \nabla^2 u_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_3 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{u} = \vec{0} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\lambda, \mu$  は Lamé の定数、 $\nabla$  は勾配演算子、 $\rho$  は質量密度、 $t$  は時間を表わす。また、 $u$  は変位を表わし、

$$\bar{u}^T = \{u_1, u_2\} \dots\dots\dots (3)$$

である。ここに  $u$  に関する添字は座標成分で、添字の 3 は面外方向を表わし、1 と 2 は面内の自由度を表わすものとする。なお、上式では慣性力以外の物体力は考慮していない。

### (2) 有限要素法

式 (1), (2) で示した弾性波動方程式に対する有限要素表示は、たとえば重み付き残差法を適用することによって得られ次式となる。

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K] \{u\} = \{P(t)\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $[M], [K]$  はそれぞれ質量および剛性マトリックス、 $\{\ddot{u}\}, \{u\}$  は加速度および変位ベクトルである。また、 $\{P(t)\}$  は境界条件より定められる節点力ベクトルである。なお、動的応答解析でよく用いられる、速度比例型の減衰を考慮するときには、対応する項を加え次式のよう表わすことができる。

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{P(t)\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $[C]$  は減衰マトリックス、 $\{\dot{u}\}$  は速度ベクトルを表わす。

### (3) 境界要素法

Fig.1 に示すように、半無限弾性体中の散乱体に波動が入射し、散乱波が発生する波動場を考える。時刻  $t=0$  では、まだ散乱波が発生していないという条件のもとで、面外および面内の波動場について境界積分方程式をたてると次のようになる。

$$c_{ij} u_j(\bar{r}, t) + \int_0^t \int_r T_{ij}(\bar{r} - \bar{r}_0, t - \tau) u_j(\bar{r}_0, \tau) d\tau d\tau \\ = \int_0^t \int_r G_{ij}(\bar{r} - \bar{r}_0, t - \tau) \sigma_j(\bar{r}_0, \tau) d\tau d\tau + f_i(\bar{r}, t) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、上式の添字は座標成分を表わし、総和規約を用いている。面外波動場では添字は常に 3 をとり、面内波動場では 1 または 2 をとる。また  $c_{ij}$  は境界の形状によって定められる定数、 $\sigma_j$  は表面力、 $f_i$  は均質半無限

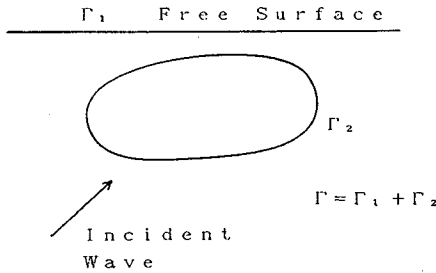


Fig. 1 Analyzed model in the BEM.

弾性体の応答によって定められる外力項、 $\vec{r}$  は境界上の位置ベクトル、 $r$  はベクトル  $\vec{r}$  の絶対値を示す。また、 $G_{ij}$ 、 $T_{ij}$  はそれぞれ変位と表面力に関する Green 関数であり、式 (1) および式 (2) に対応する変位の Green 関数はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} G_{33}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\pi\rho} \Phi_1^{(T)}(r, t) \\ G_{ij}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\pi\rho} \left[ \{\Phi_1^{(T)}(r, t) + \Phi_2^{(T)}(r, t) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_2^{(L)}(r, t)\delta_{ij} + \Phi_3^{(L)}(r, t) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_3^{(T)}(r, t) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタを表わす。また、 $\Phi$  は波動関数であり、その添字は波動関数を識別するためのものである。すなわち、 $\Phi$  につけた添字は座標成分を表わす添字とは区別する。また、 $\Phi$  の添字の  $T$  と  $L$  は、それぞれ  $\Phi$  が  $S$  波と  $P$  波の波動関数であることを表わす。波動関数  $\Phi$  は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^{(p)}(r, t) &= \frac{1}{c_p \sqrt{c_p^2 t^2 - r^2}} H[c_p t - r] \\ \Phi_2^{(p)}(r, t) &= \frac{\sqrt{c_p^2 t^2 - r^2}}{c_p r^2} H[c_p t - r] \\ \Phi_3^{(p)}(r, t) &= \Phi_1^{(p)}(r, t) + 2\Phi_2^{(p)}(r, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $p$  は  $T$  または  $L$  をとり、 $c_T$ 、 $c_L$  はそれぞれ  $S$  波と  $P$  波の速度である。また、 $H$  は単位階段関数である。

式 (1) および式 (2) に対応する表面力の Green 関数はそれぞれ次のように表わされる<sup>12)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} T_{33}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial x_i} G_{33}(\vec{r}, t) n_i \cdot \mu \\ T_{ij}(\vec{r}, t) &= \left[ \lambda \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_m} G_{im}(\vec{r}, t) \right. \\ &\quad \left. + \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} G_{ik}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(\vec{r}, t) \right) \right] n_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、添字の  $i, j, k, m$  は座標成分を表わし、それぞれ 1 または 2 をとる。また、 $n$  は法線方向を表わす。また、上式では添字に関して総和規約を用いる。式 (9) より明らかなように、表面力の Green 関数を求めるた

めには、変位の Green 関数を空間座標で微分する必要がある。このことは波動関数  $\Phi$  を空間座標で微分することに帰着する。Mansur らの研究を参考にすれば、波動関数  $\Phi_1$  の導関数は次のように表わされる<sup>5)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Phi_1^{(p)}(r, t - \tau) &= -\frac{c_p(t - \tau) - r}{c_p \sqrt{c_p^2(t - \tau)^2 - r^2}} H[c_p(t - \tau) - r] \\ &\quad - \frac{1}{c_p} \Phi_1^{(p)}(r, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

また、波動関数  $\Phi_2$  の導関数に関しては次式が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi_2^{(p)}(r, t) = -\frac{1}{r} \Phi_2^{(p)}(r, t) \dots\dots\dots (11)$$

したがって、表面力の Green 関数も波動関数  $\Phi$  とそれに付随した波動関数に帰着されることがわかる。

時間領域境界要素法は、式 (6) で示される積分方程式を直接離散化し、数値的に解いていく手法である。式 (6) を直接離散化するために、境界上に  $M$  個の節点を設け、時間  $t$  を  $N$  ステップに等分割する。さらに、補間関数を用いて変位および表面力を次のように近似する。

$$\left. \begin{aligned} u_j(\vec{r}, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_m(\vec{r}) \zeta_n(t) u_j^{m,n} \\ \sigma_j(\vec{r}, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \psi_m(\vec{r}) \eta_n(t) \sigma_j^{m,n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $u_j^{m,n}$  および  $\sigma_j^{m,n}$  は  $n$  ステップ目の時刻における節点  $m$  の変位および表面力を表わす。また、 $\phi_m$ 、 $\psi_m$  は空間に対する補間関数、 $\zeta_n$ 、 $\eta_n$  は時間に対する補間関数である。

式 (12) を式 (6) に代入することで境界積分方程式は離散化されるが、離散化過程で注意すべきことは、時間に関する積分は解析的に行い、空間に関する積分のみ Gauss 積分公式により数値的に行う点である。また、特異点を含む積分に関しては、時間に対する積分、空間に対する積分とも解析的に行う。この場合、先に示した波動関数  $\Phi$  を解析的に積分することは比較的容易であるから、Green 関数を波動関数  $\Phi$  とそれに付随する波動関数に展開しておくことは、定式化を容易にする利点をもっている。特に、高次の補間関数を用いて積分方程式を離散化する場合においては、解析的な積分は困難になるので、こうした配慮は重要になる。

このようにして離散化された積分方程式は次式のように表わすことができる。

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [H_{im}^{m,n}] \{u^{m,n}\} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [G_{im}^{m,n}] \{\sigma^{m,n}\} + \{f^{i,m}\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $\{u^{m,n}\}$ 、 $\{\sigma^{m,n}\}$  は節点  $m$  の  $n$  ステップ目の時刻の変位と表面力のベクトルを表わし、 $[H_{im}^{m,n}]$ 、 $[G_{im}^{m,n}]$  はそれ

それぞれに対応する影響係数マトリックスである。また、 $\{f^m\}$  は式 (6) の離散化によって得られる、節点  $i$  の外力項に相当するベクトルである。もちろん、面外波動場においては、これらはすべてスカラー量である。ここで、このような、マトリックスとベクトルを用いた表現としたのは、面外波動場と面内波動場を統一的に記述するためである。

式 (13) を空間に関してマトリックスとベクトル表示を用いて表わす場合は次式のように表わす。

$$\sum_{n=1}^N [H^{nm}] \{u^n\} = \sum_{n=1}^N [G^{nm}] \{\sigma^n\} + \{f^m\} \dots \dots \dots (14)$$

また、影響係数マトリックスに関しては、Green 関数の性質から次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} [H^{nm}] &= [H^{n+q, n+q}] \\ [G^{nm}] &= [G^{n+q, n+q}] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

ここで、 $q$  は  $q \geq -n$  の任意の整数である。したがって、今後これらの影響係数マトリックス  $[H^{nm}]$ ,  $[G^{nm}]$  は  $q = -n$  として、 $[H^{N-n}]$ ,  $[G^{N-n}]$  と書き表わすことにする。さらに、 $[H^{N-n}]$ ,  $[G^{N-n}]$  をそれぞれ  $[H]$ ,  $[G]$  で表わし、式 (14) を  $\{\sigma^m\}$  について解くと次のようになる。

$$\{\sigma^m\} = [k] \{u^m\} - [F^m] \dots \dots \dots (16)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} [k] &= [G]^{-1} [H] \\ [F^m] &= [G]^{-1} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} [G^{N-n}] \{\sigma^n\} - \sum_{n=1}^{N-1} [H^{N-n}] \{u^n\} + \{f^m\} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

式 (16) が境界要素法の基本式である。すなわち、境界要素法の基本式は、 $N$  ステップ目の時刻の変位と表面力を  $N-1$  ステップ目の時刻以前の変位と表面力および半無限均質弾性体の応答によって決定する漸化式となる。

### 3. 時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法の定式化

有限要素法と境界要素法を結合するために、まず表面力と変位の関係式を与える境界要素法の基本式を、節点力と変位の関係式に変換する必要がある。節点力と表面力の関係は、分布マトリックス<sup>12)</sup>  $[D]$  により、式 (18) のように与えられる。

$$\{P^m\} = [D] \{\sigma^m\} \dots \dots \dots (18)$$

このマトリックスを用いれば、境界要素領域の節点力と変位の関係式は次のように表わすことができる。

$$\{P^m\} = [K^*] \{u^m\} - [D] \{F^m\} \dots \dots \dots (19)$$

ここに、

$$[K^*] = [D] [k] \dots \dots \dots (20)$$

次に有限要素法と境界要素法を結合するために、有限要素領域と境界要素領域の境界上の変位の連続条件と力

のつり合い条件について考察する。一般には、有限要素法と境界要素法を結合するために、有限要素領域と境界要素領域の境界上で、変位の連続条件と力のつり合い条件を満たす必要がある。この条件は、

$$\left. \begin{aligned} \{u\}_F &= \{u\}_B \\ \{P\}_F + \{P\}_B &= \{0\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

と表わされる。ここで、添字の  $F$  と  $B$  は有限要素領域と境界要素領域に属する量であることを表わしている。

しかしながら、有限要素領域の基本式は式 (5) で与えられるように微分方程式であり、変位および節点力は時間に関して連続的に変化する量として与えられている。また、境界要素領域の基本式は式 (19) で与えられる漸化式であり、変位および節点力は時間ステップごとに離散化された時刻で与えられている。したがって、式 (21) の条件をあらゆる時刻で成立させることはそのままでは不可能である。

ここでは、この問題を解決するために、まず有限要素領域の変位を時間の補間関数により離散化し、有限要素領域の基本式に時間ステップの概念を導入する。ここで、有限要素領域の変位の補間関数と境界要素領域の変位の補間関数に同じものを用いれば、変位の連続条件をあらゆる時刻で成立させることが可能になる。有限要素領域の基本式は時間に関して 2 階の微分方程式であるから、変位の時間に対する補間関数には 2 次以上の関数を用いる必要がある。

$N$  ステップ目の時刻を  $t_N$  と表わし、時間増分を  $\Delta t$  とおくと、 $t_N - 2\Delta t \leq t \leq t_N$  の間の変位は、2 次の補間関数  $\xi$  を用いて次のようになる。

$$\{u\} = \{u^{N-2}\} \xi_{N-2}(t) + \{u^{N-1}\} \xi_{N-1}(t) + \{u^N\} \xi_N(t) \dots \dots \dots (22)$$

ここに、時間に関する補間関数  $\xi$  は、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_{N-2}(t) &= \xi(\xi-1)/2 \\ \xi_{N-1}(t) &= 1-\xi^2 \\ \xi_N(t) &= \xi(\xi+1)/2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

また、 $\xi$  は時間を表わす無次元のパラメーターで次式で示される。

$$\xi = \frac{t}{\Delta t} - N + 1 \dots \dots \dots (24)$$

この補間関数を用いた場合、式 (5) より有限要素領域の節点力は明らかに 2 次関数の変化を示す。一方、境界要素領域では、表面力と変位の補間関数をそれぞれ別々にとっているため、節点力の時間変動は表面力の補間関数に依存する。安定な解を得るためには、表面力の時間に対する補間関数に 0 次の関数を用いなければならないことが指摘されているので<sup>5)</sup>、ここでもこの補間関数に 0 次の関数を用いることにする。このとき  $t_N - 2\Delta t \leq t \leq t_N$  の間の境界要素領域の節点力は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} |P|_B &= |P^N| \eta_N(t) + |P^{N-1}| \eta_{N-1}(t) \\ \eta_N(t) &= H(\xi) - H(\xi - 1) \\ \eta_{N-1}(t) &= H(-\xi) - H(-1 - \xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 $\eta$  は時間に対する補間関数、 $H$  は単位階段関数である。

以上の議論より、式 (21) の条件のうち、変位の連続条件はあらゆる時刻で保証できるものの、力のつり合い条件は、有限要素領域と境界要素領域の補間関数が異なるため、あらゆる時刻で成立させることは不可能であることがわかる。

同様な問題は有限要素解析でもすでに存在してきた。すなわち、波動方程式の有限要素表示は式 (5) に示すような時間に関する常微分方程式となり、従来これに差分的な展開を施してきた。そして、力のつり合い条件は離散化された時刻に対してのみ考慮し、その間の時刻の力のつり合いに関しては余り考慮されなかった。

また、今回の理論展開で行うように、式 (5) に示される有限要素表示に対し、式 (22) に示すような多項式で変位を補間する場合にも加速度、速度、変位はそれぞれ異なる次数の時間変動を示すので、式 (5) のつり合い条件をあらゆる時刻で成立させることは不可能である。

この問題は微分方程式の解を基底関数によって展開し、近似解を求める際に生じる一般的な問題としてとらえることも可能である。この場合、近似解は重み付き残差法を用いることにより求められる<sup>13)</sup>ことが知られている。ここではこの方法を拡張し、有限要素領域と境界要素領域の境界上での力のつり合い条件にも重み付き残差法を適用する。すなわち、重み付き残差法によって、有限要素領域と境界要素領域の境界上における力のつり合い条件の問題と、有限要素領域内部における力のつり合い条件の問題を統一的に解決する。

有限要素領域内部では、式 (5) の代わりに次式を力のつり合い条件とする。

$$\int_{-1}^{+1} W(\xi) [|M| \ddot{u} + |C| \dot{u} + |K| u] d\xi = |0| \dots\dots\dots (26)$$

有限要素領域と境界要素領域の境界上でも、式 (21) の代わりに次式を力のつり合い条件とする。

$$\int_{-1}^{+1} W(\xi) [|P|_B + |P|_B] d\xi = |0| \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 $W(\xi)$  は重み関数であり、ここでは、スカラー量である。

式 (26) と式 (27) に式 (5)、式 (19) および式 (22) ~ 式 (25) を代入して積分を実行し、式 (26) と式 (27) をまとめることで次式が得られる。

$$\begin{aligned} & [M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K + \alpha \Delta t^2 K^*] u^N \\ & = [2M - (1 - 2\gamma) \Delta t C - (1/2 - 2\beta + \gamma) \Delta t^2 K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - (1 - \alpha) \Delta t^2 K^*] u^{N-1} + [-M + (1 - \gamma) \Delta t C \\ & - (1/2 + \beta - \gamma) \Delta t^2 K] u^{N-2} + \alpha \Delta t^2 [D] F^N \\ & + (1 - \alpha) \Delta t^2 [D] F^{N-1} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここに、 $\alpha, \beta, \gamma$  は重み関数の形状によって決められる定数で、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\int_0^{+1} W(\xi) d\xi}{\int_{-1}^{+1} W(\xi) d\xi} \\ \beta &= \frac{\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} W(\xi) \xi (1 + \xi) d\xi}{\int_{-1}^{+1} W(\xi) d\xi} \\ \gamma &= \frac{\int_{-1}^{+1} W(\xi) \left( \xi + \frac{1}{2} \right) d\xi}{\int_{-1}^{+1} W(\xi) d\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

式 (28) で得た式は有限要素領域と境界要素領域を同一の時間増分によって解いていくための漸化式である。この式から境界要素領域に関する項を除くと Zienkiewicz が示した Newmark の  $\beta$  法<sup>13)</sup> と同じ式が得られる。すなわち、式 (28) の漸化式は有限要素解析でよく使われる Newmark の  $\beta$  法に境界要素領域の影響を組み入れたものと解釈することもできる。

#### 4. 漸化式のパラメーターの設定について

式 (28) で示した漸化式は、パラメーター  $\alpha, \beta, \gamma$  を含むので、安定な時間ステップ解析を行うためにこれらのパラメーターを適切に設定する方法を考える。

まず、式 (28) を非連成の式に置き換え、外力項をゼロとすると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & (m + \beta \Delta t^2 k + \alpha \Delta t^2 k^*) u^N \\ & + (-2m + (1/2 - 2\beta + \gamma) \Delta t^2 k + (1 - \alpha) \Delta t^2 k^*) u^{N-1} \\ & + (m + (1/2 + \beta - \gamma) \Delta t^2 k) u^{N-2} = 0 \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

ここで、添字の  $N$  等は時間ステップを表わし、 $m, k$  および  $k^*$  は質量、剛性、および境界要素領域の剛性マトリックスに対応する量であり正数とする。また、式 (30) では減衰項を省略している。これは減衰項は解の発散をおさえる働きがあるので、減衰項を省略して得られた漸化式の安定条件は、減衰項を有する漸化式の安定条件を包含すると考えられるからである。

$$\left. \begin{aligned} u^N &= \lambda u^{N-1} \\ u^{N-1} &= \lambda u^{N-2} \\ p &= \Delta t^2 k / m \\ q &= \Delta t^2 k^* / m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

とおくと、式 (30) は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} & \lambda^2 (1 + \beta p + \alpha q) + \lambda (-2 + (1/2 - 2\beta + \gamma) p \\ & + (1 - \alpha) q) + (1 + (1/2 + \beta - \gamma) p) = 0 \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

もし、式 (32) が  $\lambda$  に関して複素数の解かただ 1 つの実数解をもてば、2 次方程式の解と係数の関係より、

$$|\lambda|^2 = \frac{1 + (1/2 + \beta - \gamma)p}{1 + \beta p + \alpha q} \dots\dots\dots (33)$$

が得られる。漸化式が安定であるためには  $|\lambda| \leq 1$  が必要となるが、式 (33) がそのようになるためには

$$\alpha \geq 0 \quad \gamma \geq 1/2 \dots\dots\dots (34)$$

が必要である。

ところで、Newmark の  $\beta$  法において、Newmark は  $\gamma = 1/2$  を用いることを推奨しており、これは式 (29) より重み関数を偶関数とすることに相当する<sup>13)</sup>。ここでも  $\gamma = 1/2$  を用いることにすれば、式 (29) より、 $\alpha = 1/2$  となり、式 (34) の条件が自動的に満足されることになる。したがって、ここでは  $\alpha = 1/2$ 、 $\gamma = 1/2$  と設定することにする。

以上の議論により、漸化式のパラメーターのうち、 $\alpha$  と  $\gamma$  の値が設定された。次にこの条件のもとで、パラメーター  $\beta$  を設定しなければならない。これに関しては、著者らはすでに、式 (32) が  $\alpha = 1/2$ 、 $\gamma = 1/2$  のもとで、 $\lambda$  が複素数の解または、ただ 1 つの実数解をもつという条件から  $\beta \geq 1/4$  の条件を誘導し、さらに、実用上は  $\beta = 1/4$  で十分良好な解が得られることを示している<sup>11)</sup>。

したがって、本論文で示す数値計算例では、 $\alpha = 1/2$ 、 $\beta = 1/4$ 、 $\gamma = 1/2$  を用いる。これらのパラメーターの値に対応する重み関数は次式で表わされる。

$$w(\xi) = |\xi| \dots\dots\dots (35)$$

5. 数値計算例

ここでは、理論の妥当性を検証するために、不整形地盤モデルを用いた数値計算例を示す。面外波動場については、すでに理論を検証したので<sup>10), 11)</sup>、ここでは面内波動場の結果についてのみ示す。

面内波動場でも、半無限弾性体の Green 関数を用い

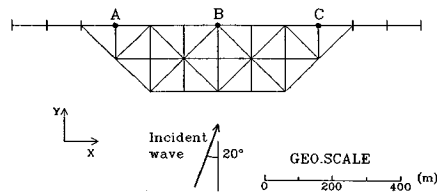


Fig. 2 Analyzed model.

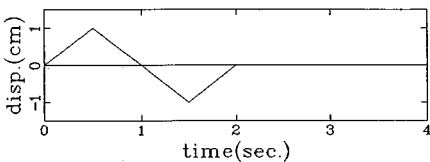
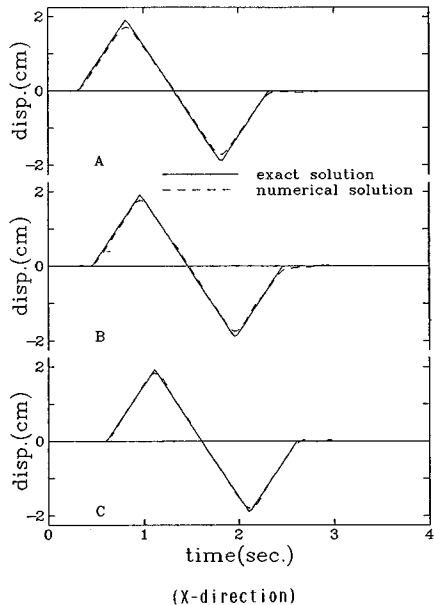


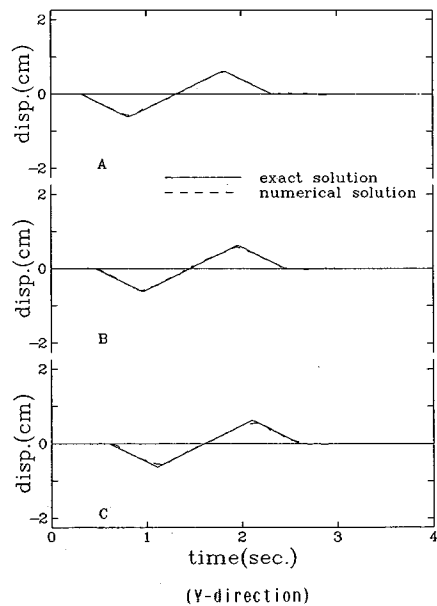
Fig. 3 Incident SV wave form.

れば、自由表面上の境界条件は自動的に満足されるが、時間領域でこれを用いることは難しい。ここでは、無限弾性体の Green 関数を用い、自由表面の境界条件は自由表面に境界要素を導入することで考慮する。ただし、この境界要素は、数値計算に影響しない領域で打ち切る。

解析モデルを Fig. 2 に示す。数値計算に用いる有限要素は三角形 6 節点要素であり、それと対応付ける意味で境界要素にも 2 次要素を用いている。ただし、表面力の空間に対する補間関数はそれより 1 次だけ下げ、1 次関



(X-direction)



(Y-direction)

Fig. 4 Comparison of displacement at point A, B, C.

数としている。

数値計算は、まず有限要素領域と境界要素領域の物性値を同じものとして行い、半無限均質弾性体の波動方程式の解析解との比較を行う。ここでは、せん断弾性係数  $\mu = 9.8 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ 、質量密度  $\rho = 2.0 \text{ t/m}^3$ 、ポアソン比  $\nu = 1/3$  とし、入射波の変位時刻歴として Fig. 3 に示すものを用いる。

入射波を入射角  $20^\circ$  の平面 SV 波とし、数値積分のための時間増分を 0.03 秒とした場合の数値解と解析解との比較を Fig. 4 に示す。時間増分が比較的粗いにもかかわらず、解析解と数値解は非常によく一致しており、本解析アルゴリズムの面内波動場に対する妥当性が検証されたものと考えられる。

次に、有限要素領域の剛性と境界要素領域の剛性の比が、不整形地盤の応答特性および解析アルゴリズムの安定性にどのような影響を与えるかについての検討を行う。

ここでは境界要素領域の物性値を先と同じ値に設定し、有限要素領域のせん断弾性係数を先の例より 1/20 ずつ小さくした  $\mu_{F1} = 4.9 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$ 、 $\mu_{F2} = 2.45 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$  の 2 つの場合を解析する。質量密度およびポアソン比は先の数値計算と同じ値とする。これらの解析についてそれぞれのせん断波速度をまとめたものを、Table 1 に示す。また、入射波は入射角  $20^\circ$  の平面 SV 波とし、その変位時刻歴は Fig. 5 に示すパルス波とする。このようなパルス波は、波形が単純であり継続時間も短いことから、軟弱地盤内における波動の増幅特性や散乱波の生成の様子を調べるのに都合がよい。数値積分のための時間増分を 0.035 秒とし、全地表面上の変位時刻歴を 4 秒まで表わしたものを Fig. 6 に、節点 A, B, C の変位時刻歴を比較したものを Fig. 7 に示す。ここでは、入射波が有限要素領域に始めて到達したときの時刻を時間軸の始点としている。

Table 1 Velocity of SV waves.

case	FE REGION	BE REGION
a	156.5m/s $\mu_F = 4.9 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$	700.0m/s
b	35.0m/s $\mu_F = 2.45 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	$\mu_B = 9.8 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$

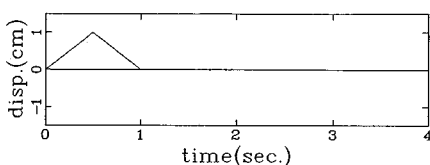


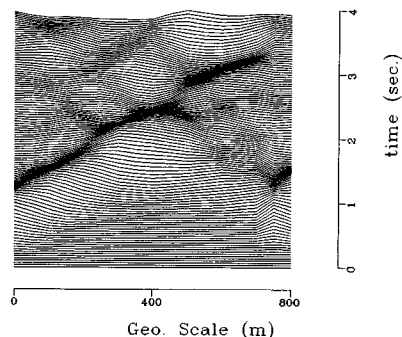
Fig. 5 Incident SV wave form.

節点 A は、有限要素領域にパルス波が入射するとすぐに振動を始め、パルス波が去ったあとも散乱波の影響で振動を続ける。また、振動の周期は有限要素領域の剛性が大きいほど短くなる。これは、地表面と基盤の間を波動が往復するのに要する時間は、有限要素領域の剛性が大きいほど短くなるためである。

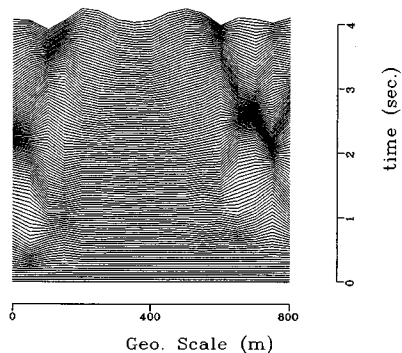
節点 B では振動が始まるまでにある程度の時間を要しており、特に有限要素領域の剛性が小さい場合には、パルスのピークが現われるまでに、かなりの時間を必要とする。これは、有限要素領域の剛性が小さくなるに従い、波動の水平方向の位相速度が小さくなるためである。

節点 C では、パルスのピークが現われるのに必要とする時間は、節点 B ほど有限要素領域の剛性の影響を受けない。これは、C 点にパルスが直接到達する前に、有限要素領域の右端から境界要素領域を通り回折してきた波動が到達するためである。C 点の変位時刻歴でパルス波形がくずれているのも、このためであると考えられる。

なお、Fig. 7 の全地表面上の時刻歴から明らかにように、水平方向に伝播する波動の位相速度は入射角  $20^\circ$  の SV 波から生成される実体波の速度より小さくなっている。したがって、ここに示された波動は表面波と考えられる。すなわち、このような不整形地盤においては、表



$\mu_F = 4.9 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$



$\mu_F = 2.45 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$

Fig. 6 Displacement on the surface (X-direction).

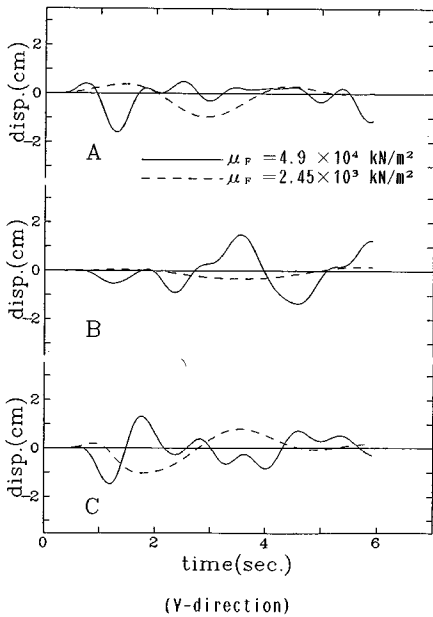
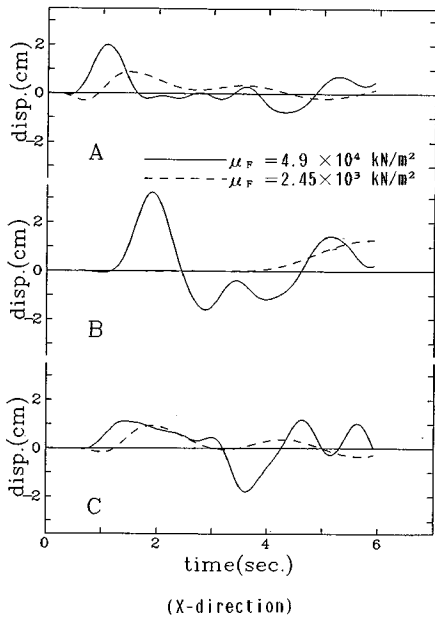


Fig. 7 Comparison of displacement at point A, B, C.

面波の問題が重要になることが示唆される。

以上に示したように、本論文で展開したアルゴリズムによって得た解は、有限要素領域と境界要素領域の剛性の差が大きな場合でも安定であり、不整形地盤の振動特性もよく説明している。すなわち、ここで示した手法は十分実用的である。

## 6. 結 論

本論文では、時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法のアルゴリズムを二次元の面外および面内の波動場について統一的に展開した。有限要素法と境界要素法は、有限要素領域と境界要素領域の境界上に作用する力のつり合い条件を、重み付き残差表示することによって結合した。これによって得られる漸化式は、Newmarkの $\beta$ 法に類似したものである。また、数値計算例で示したように、本アルゴリズムを用いることで、有限要素領域と境界要素領域の剛性の差が大きい場合にも安定で適切な解を得ることができる。

### 付録 波動関数 $\Phi$ の解析的な積分について

本文でも示したように、境界積分方程式の離散化で注意すべき点は時間に関する積分は解析的に行い、特異点を含む場合には、空間についても解析的に積分を行うことである。

ここでは、この点との関連で波動関数  $\Phi$  に補間関数をかけあわせ、解析的に積分を実行する方法について示す。

まず、式(12)に現われる時間の補間関数を具体的に示す。式(12)の $\zeta_n$ は2次の補間関数であり、 $\zeta_n$ は式(23)にも現われる。式(23)における添字の $N$ は時間ステップ数を表わすばかりでなく、式(28)における漸化式で、未知量に関する時間ステップである。このことを考慮して、 $\zeta_n$ を時間ステップ $N$ に関連づけて表わす。まず、 $N-n$ が偶数のときは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_n(\tau) &= \frac{(\tau - t_{n-1})(\tau - t_{n-2})}{2 \Delta t^2} \quad (t_{n-2} \leq \tau \leq t_n) \\ \zeta_n(\tau) &= \frac{(\tau - t_{n+1})(\tau - t_{n+2})}{2 \Delta t^2} \quad (t_n \leq \tau \leq t_{n+2}) \end{aligned} \right\} \dots (A.1)$$

また、 $N-n$ が奇数のときは次のようになる。

$$\zeta_n(\tau) = \frac{(t_{n-1} - \tau)(\tau - t_{n+1})}{\Delta t^2} \quad (t_{n-1} \leq \tau \leq t_{n+1}) \dots (A.2)$$

また、 $\eta_n$ は0次の補間関数であるから時間ステップ $N$ に関係なく次のように表わされる。

$$\eta_n(\tau) = 1 \quad (t_n \leq \tau \leq t_{n+1}) \dots (A.3)$$

ところで、波動関数  $\Phi$  は単位階段関数を含んでいるので、次のように表わすことができる。

$$\Phi(r, t) = H[ct - r] \Phi^*(r, t) \dots (A.4)$$

ここでは、混乱のおそれもないと考えられるので、波動関数の添字( $p$ )は省略し、以下数字の添字も必要なときのみにつける。

式(A.4)より、波動関数を時間に対して解析的に積分するためには  $\Phi^*$  の解析的な積分結果を知る必要がある。



いま、 $x$  を次のように定義する。

$$x = t_n - \tau \dots\dots\dots (A \cdot 5)$$

また、波動関数  $\Phi_i$  を以下のように定義する。

$$\Phi_i(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \Phi_1(r, t) \dots\dots\dots (A \cdot 6)$$

ここで、2 次の補間関数を式 (A・2) で代表させるものとすれば、波動関数  $\Phi^*$  の解析的な積分は次のようになる。

$$\int \Phi_1^*(r, x) \eta_n(\tau) d\tau = -\frac{1}{C^2} \ln(x + \sqrt{x^2 - T^2}) \dots (A \cdot 7)$$

$$\int \Phi_2^*(r, x) \eta_n(\tau) d\tau = -\frac{1}{2 r^2} [x \sqrt{x^2 - T^2} - T^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - T^2})] \dots (A \cdot 8)$$

$$\begin{aligned} & \int \Phi_3^*(r, x) / r \cdot \xi_n(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{r^3 \Delta t^2} [1/4 T^4 \ln(x + \sqrt{x^2 - T^2}) \\ &+ (1/2 x^3 - 2/3 (x_{n-1} + x_{n+1}) x^2 \\ &+ (x_{n-1} \cdot x_{n+1} + 1/4 T^2) x \\ &- 1/3 x^2 (x_{n-1} + x_{n+1})) \sqrt{x^2 - T^2}] \dots\dots\dots (A \cdot 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int \Phi_4^*(r, x) \xi_n(\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{C^2 \Delta t^2} \left[ \sqrt{\frac{x-T}{x+T}} (x+2T+x_{n-1}+x_{n+1}) \right. \\ &+ x_{n-1} \cdot x_{n+1} / T - 2 \sqrt{x^2 - T^2} \\ &\left. - T \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 - T^2}) \right] \dots\dots\dots (A \cdot 10) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} T &= r/C \\ x_j &= t_n - \tau_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 11)$$

次に、時間の補間関数の添字  $n$  が時間ステップ  $N$  に一致する場合には、時間積分された波動関数は空間に対して特異性を示すようになる。そして、空間積分の区間に特異点がある場合には、積分は解析的に実行する必要が<sup>5</sup>ある。

まず、時間の補間関数の添字  $n$  が時間ステップ  $N$  と一致した場合の積分結果は次のようになる。

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \Phi_1(r, x) \eta_n(\tau) d\tau = \frac{1}{C^2} \ln \frac{\chi L + \sqrt{\chi^2 L^2 - r^2}}{r} \dots\dots\dots (A \cdot 12)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Phi_2(r, x) \eta_n(\tau) d\tau &= \frac{\Delta t^2 \sqrt{\chi^2 L^2 - r^2}}{2 r^2 \chi L} \\ &\quad - \frac{\Delta t^2 \ln((\chi L + \sqrt{\chi^2 L^2 - r^2})/r)}{2 \chi^2 L^2} \dots\dots\dots (A \cdot 13) \end{aligned}$$

$$\int_{t_{n-2}}^{t_n} \Phi_3(r, x) / r \xi_n(\tau) d\tau = -\frac{\sqrt{4 \chi^2 L^2 - r^2}}{4 C^2 \chi L} + \frac{r}{8 C^2 \chi^2 L^2}$$

$$\cdot \ln \frac{2 \chi L + \sqrt{4 \chi^2 L^2 - r^2}}{r} \dots\dots\dots (A \cdot 14)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-2}}^{t_n} \Phi_4(r, x) \xi_n(\tau) d\tau &= -\frac{\sqrt{4 \chi^2 L^2 - r^2}}{2 C^2 \chi L r} + \frac{r}{2 C^2 \chi^2 L^2} \\ &\quad \cdot \ln \frac{2 \chi L + \sqrt{4 \chi^2 L^2 - r^2}}{r} \dots\dots\dots (A \cdot 15) \end{aligned}$$

ここに、 $L$  は境界要素の長さの 1/2 であり、 $\chi$  は次式で示される無次元量である。

$$\chi = C \cdot \Delta t / L \dots\dots\dots (A \cdot 16)$$

これらの積分結果をさらに空間的に積分する場合に注意すべきことは、 $1/r$  より強い特異性を示すものについては、積分は有限部分積分の意味で実行しなければならないことであり、積分区間は被積分関数の根号の中の符号が負にならないように設定することである。

なお、式 (A・12)~(A・15) をさらに空間的に解析的に積分し、その結果を完全に陽な形で記述すると、結果は非常に複雑になり、そのためにプログラムのデバッグも困難となる。このため、著者らは解析的な積分に必要な積分公式をすべて、プログラム上で関数副プログラムとして定義し、それらを組み合わせて、プログラム内で解析的な積分を実行している。このようにすれば、積分結果の陽な形の提示は不要となり、プログラムのデバッグも容易となる。ここでは、著者らが空間積分で用いた公式を示す。解析的な積分はすべて、これらの公式の組合せで表わされる。ただし、 $\int$  は有限部分積分を意味する。

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r^2} dr &= -\sin^{-1} \frac{b}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \\ \int_0^b \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} dr &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ &+ a \cdot \ln \frac{2ab}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - a \\ \int_0^b r^m \cdot \ln(a + \sqrt{a^2 - r^2}) dr &= \frac{1}{m+1} b^{m+1} \cdot \ln(a + as) - \frac{1}{(m+1)^2} b^{m+1} \\ &+ \frac{1}{m+1} a^{m+1} \int_0^s \sin^m \theta d\theta \\ \int_0^b r^m \cdot \ln(r) dr &= \frac{b^{m+1} \ln(b)}{m+1} - \frac{b^{m+1}}{(m+1)^2} \\ \int_0^b r \sqrt{a^2 - r^2} dr &= \frac{a^3}{3} - \frac{(a^2 - b^2)^{3/2}}{3} \\ \int_0^b \sqrt{a^2 - r^2} dr &= 1/2 b \sqrt{a^2 - b^2} \\ &+ 1/2 a^2 \sin^{-1} \frac{b}{a} \dots\dots\dots (A \cdot 17) \end{aligned}$$

ただし、

$$s = \cos(\sin^{-1} b/a) \dots \dots \dots (A \cdot 18)$$

#### 参 考 文 献

- 1) 鷺津久一郎・田中正隆・田中喜久昭：境界要素法—基礎と応用，丸善，1982.
- 2) 近江正徳・佐々木定雄・登坂宣好：時間領域境界要素法による3次元埋め込み剛基礎の動的応答解析，構造工学論文集，Vol. 33 B, pp. 93~101, 1987.
- 3) 土質工学会編：土質地震工学，土質工学ライブラリー 24, 1983.
- 4) Cole, D.M., Kosloff, D.D. and Minister, J.B. : Numerical Boundary Integral Equation Method for Elastodynamics I B.S.S.A., Vol. 68, No. 5, pp. 1331~1357, 1978.
- 5) Mansur, W.J. and Brebbia, C.A. : Numerical Implementation of the Boundary Element Method for Two Dimensional Transient Scalar Wave Propagation Problems, Appl. Math. Modelling, Vol. 6, pp. 299~306, 1982.
- 6) 福井卓雄：弾性半平面内空洞の過渡的応答の境界積分方程式法による時間 step 解析，境界要素法論文集，第1巻，pp. 175~176, 1984.
- 7) 福井卓雄：非均質弾性体の過渡的応答の境界積分方程式法による時間ステップ解析，境界要素法論文集，第2巻，pp. 53~58, 1985.
- 8) Fukui, T. : Time Marching Analysis of Boundary Integral Equations in Two Dimensional Elastodynamics, Proc. 4th Int. Symp. on Numerical Methods for Engineers, pp. 405~410, 1986.
- 9) Fukui, T. and Ishida, Y. : Time Marching BE-FE Method in Wave Problem, Proc. 1st Japan-China Symposium Boundary Element Methods, pp. 95~106, 1987.
- 10) Touhei, T. and Yoshida, N. : Dynamic Response Analysis of Ground Using a Coupled Finite Element and Boundary Element Method for Time Marching Analysis 6th ICONMIG, Innsbruck Austria, 1988.
- 11) 東平光生・吉田 望：時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析，構造工学論文集，Vol. 34 A, 1988.
- 12) Brebbia, C.A., Tells, J.C. and Wrobel, L.C. : Boundary Element Techniques-Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, 1984.
- 13) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method, third edition, McGraw-Hill, 1977.

(1988. 8. 31・受付)