

(II) 砂面上におかれた礫の限界掃流力について

正員 岩 垣 雄 一*
准員 土 屋 義 人**

(II) ON THE CRITICAL TRACTIVE FORCE FOR GRAVELS
ON A GRANULAR BED IN TURBULENT STREAM

(Trans. of JSCE, No.41, December, 1956)

By Dr. Eng., Yūichi Iwagaki, C.E. Member and
Yoshito Tsuchiya, C.E. Assoc. Member

Synopsis The critical tractive force for gravels on a granular bed in turbulent stream is an interesting and fundamental problem connected with the critical tractive force for mixed sand and gravel, the sieving action of flowing water and the effect of rubble on river bed protection from scouring. In 1953, experiments on the incipient motion of discrete particles resting on a stream bed of fixed granular roughness were carried out by A.T. Ippen and R.P. Verma using four samples of plastic and glass spheres, and an empirical entrainment function was produced. But nothing about the mechanism and its analysis of incipient motion of discrete particles was touched.

In this paper, theoretical considerations on the incipient motion of spheres on a fixed granular bed are made by means of the same treatment as in the previous paper and other modified treatment. From these considerations, it is shown that the dimensionless critical tractive forces are expressed as a function of the roughness Reynolds Number with respect to granular bed and the ratio of diameters of sphere and bed material, and that this function results in good agreement with the experimental data. Moreover, based upon the results obtained by the theoretical considerations described above, the critical tractive force for mixed sand and gravel is discussed.

要 旨 砂面上におかれた礫の限界掃流力は、混合砂礫の限界掃流力とか、水流の篩分作用あるいは捨石による河床洗掘防止効果などと関連して興味ある基礎的な問題である。1953年 A. T. Ippen および R. P. Verma は、プラスチックおよびガラス製の球を用いて、固定砂面上におかれた球の移動開始の実験を行い、実験的に限界掃流力のある関係を求めている。しかし球の移動開始に関する機構や解析には何らふれていない。

本論文はこのような固定砂面上におかれた球の限界掃流力に関して、前論文で取り扱ったと同じ解析の仕方と、これと若干取扱い方を変えた方法とによつて理論的考察を試み、無次元表示した限界掃流力が砂面の粗度に関する Reynolds 数と、球および砂面を構成している砂粒の粒径比との函数としてあらわされ、その関係が実験結果とよく一致することを示すとともに、その結果にもとづいて混合砂礫の限界掃流力について若干の考察を行つたものである。

目 次

- | | |
|--|------------------------------|
| 1. 序 論 | (3) 平衡条件 |
| 2. 限界掃流力の理論的考察 (1) | 4. 砂面上におかれた球状の礫の限界掃流力
の実験 |
| (1) $u_c^*k/\nu \leq (1/n)u_c^*\delta_L/\nu$ の場合 | (1) 実験方法 |
| (2) $u_c^*k/\nu \geq 51.1$ の場合 | (2) 実験結果 |
| (3) $6.83/n \leq u_c^*k/\nu \leq 51.1$ の場合 | (3) 理論結果との比較 |
| 3. 限界掃流力の理論的考察 (2) | 5. 混合砂礫の限界掃流力についての考察 |
| (1) 遮蔽効果 | 6. 結 論 |
| (2) 速度勾配のある流れの中でうける球の流体
抵抗 | |

* 工学博士，京都大学助教授，防災研究所

** 名古屋工業大学助手，土木工学教室

1. 序 論

流水中の砂面上におかれた礫の移動開始の問題は、混合砂礫の限界掃流力、水流の篩分作用あるいは捨石による洗掘防止効果などに関連して非常に興味深い問題である。

限界掃流力の力学的機構を解明しようとする試みは、A. Shields¹⁾ から C. M. White²⁾、栗原博士の研究³⁾ を経て、前論文で述べた岩垣の解析におよび、砂礫の移動開始の機構を乱流理論を用いて一応説明することのできる段階に至った。一方、砂面上におかれた球状粒子の移動開始に関する実験とその解析が、1953年 A. T. Ippen および R. P. Verma⁴⁾ によって行われたが、彼等の解析はその本質的な力学的機構にまで立ち入っておらず、実験結果の整理の域を脱していない。なおまた、彼等は後述するように著者らの解析結果や実験の結果とかなり系統的に離れて点描される二、三の実験資料を含めて実験曲線を定めており、不十分な点が多い。著者らはこのような理由から、この問題を取り上げて理論的考察を試み、実験を行つて理論結果を実証するとともに、得られた結果を上記の実際上の諸問題、とくに混合砂礫の限界掃流力の問題に適用することによつて、この限界掃流力と混合特性との関係を解明していく上に重要な示唆を与えることができた。

ここで論じようとする問題の理論的取扱いは、実験の結果を用いて最後に遮蔽の効果を定めようとする前論文と同じ取扱いのほか、さらにこれと若干取り扱い方を変え、最初から遮蔽効果を半理論的に求めて、できるだけ理論的に力学的機構を追求していこうとして、二通りの考察を試みた。これらの取扱い方によつて得られた結果はいずれも Ippen および Verma ならびに著者らの実験結果とかなりよく一致し、充分満足すべき成果が得られた。

2. 限界掃流力の理論的考察 (1)

いま 図-2.1 に示すように、粒径 k の砂面上におかれた粒径 d の球または球状の礫を対象とし、その球または礫の移動開始の条件を取り扱うものとする。そのためここでは前論文で述べた理論的取扱い方をそのまま用いることとしよう。

球または礫に作用する力としては、前論文と同様に鉛直方向の圧力勾配による揚力 R_L 、流れの方向の流体抵抗と圧力勾配による抵抗の和 R_T 、および球または礫に働く重力 W のみを考慮し、二次元的な流れを取り扱うこととする。砂面上におかれた球または球状の礫の静止摩擦角を φ とし、 R_T の作用点はつねに球または礫の中心を通るものとすれば、その平衡条件式はやはり (1.3) および (1.4) 式によつてあらわされる。この場合 σ は球または礫の密度を示すことになる。前論文と同様に、 R_T を層流底層の部分に働く抵抗 R_{T1} と乱れた部分に働く抵抗 R_{T2} とに分け、後者に対しては圧力勾配による抵抗を考慮すれば、 R_T は (1.5)、(1.6)' および (1.7) 式からつぎのようにあらわされる。

$$R_T = R_{T1} + R_{T2} = \frac{\rho}{2} C_{D2} u_2^2 (1 - \beta_s) \frac{\pi}{4} d^2 + \frac{\rho}{2} C_{D1} u_1^2 \beta_s \frac{\pi}{4} d^2 + \rho \beta_s \frac{\pi}{4} d^3 \left(\frac{Du}{Dt} \right)_d, \dots \dots \dots (2.1)$$

ここに、 β_s は層流底層 δ_L より上の部分の全体に対する比であつて、図-1.3 に示すように δ_L/d の函数であり、ここでは一応流速として乱れた部分に対しては $z=d$ における x 方向の流速を、層流底層の部分に対しては $z=\delta_L$ における流速 u_2 を採用した。また C_{D1} および C_{D2} はそれぞれ u_1 および u_2 に対応した抵抗係数である。

また鉛直方向の圧力勾配による揚力 R_L は、(1.8) および (1.9) 式がそのまま適用される。

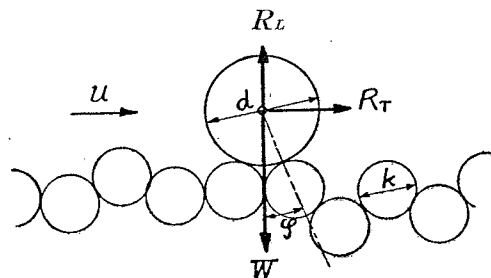
(1) $u_c^* k / \nu \leq (1/n) u_c^* \delta_L / \nu$ の場合 球または球状の礫が層流底層内に完全に入つてしまう場合であつて、 $R_L=0$ 、 $R_{T1}=0$ および $\beta_s=0$ であり、層流底層における流速分布 $u = u^*(u^*z/\nu)$ を用いれば、平衡条件式はつぎのようにかきあらわすことができる。

$$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g d \tan \varphi} = \frac{1}{\frac{3}{4} n^2 C_{D1} \left(\frac{u_c^* k}{\nu} \right)^2}, \dots \dots \dots (2.2)$$

ここに、 $d = nk$ であり、抵抗係数 C_{D1} としては 図-1.4 によつて示される一様流れ中の球の抵抗係数に関する実

図-2.1 粒径 k の砂面上におかれた粒径 d の球状の礫に作用する力

Fig.2.1 Forces acting on a spherical gravel of diameter d resting on a stream bed of granular roughness k



験値を用いることは前論文と同じである。 C_{D1} は Reynolds 数の函数であり、しかもその Reynolds 数 $u_1 d/\nu$ は

$$\frac{u_1 d}{\nu} = n \frac{u_c^* k}{\nu} \frac{u_1}{u_c^*} = n^2 \left(\frac{u_c^* k}{\nu} \right)^2 \dots\dots\dots (2.3)$$

と変形されるから、(2.2) 式の右辺は $u_c^* k/\nu$ と n のみの函数となる。層流底層の厚さを無次元表示した $u_c^* \delta_L/\nu$ の値は 6.83 であるから、結局つぎようになる。

$$\frac{u_c^* k}{\nu} \leq \frac{6.83}{n}; \quad \frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) g d \tan \varphi} = \frac{1}{\psi_1 \left(\frac{u_c^* k}{\nu}, n \right)} \dots\dots\dots (2.4)$$

ただし、

$$\psi_1 \left(\frac{u_c^* k}{\nu}, n \right) = \frac{3}{4} n^2 C_{D1} \left(\frac{u_c^* k}{\nu} \right)^2.$$

(2) $u_c^* k/\nu \geq 51.1$ の場合 この場合は前論文で述べたように層流底層が完全に消滅するから $\delta_L = 0$ および $\beta_c = 1$ となる。従つて R_T および R_L は (1.14) および (1.15) 式がそのまま適用され、また $u = \bar{u} + u'$, $w = w'$ として Du/Dt および Dw/Dt の統計的平均をとることによつて (1.25) および (1.31), さらに (1.33)~(1.41) 式をこの場合でもそのまま用いることができる。

以上の諸式の $z = d$ における値から、それぞれ前論文における (1.42) および (1.43) 式に対応した

$$\left(\frac{Du}{Dt} \right)_d = u^{*2} \left[\frac{11.5 \log_{10} n + 23.8}{\lambda_0 + 5d} + \frac{1}{l_0 + 0.4d} \right] \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\left(\frac{Dw}{Dt} \right)_d = u^{*2} \frac{(8.13 \log_{10} n + 14.8)}{\lambda_0 + 5d} \dots\dots\dots (2.6)$$

が得られる。

また平均流による流体抵抗を計算するに当つては、(1.14) 式の u_1 として

$$u_1 = (\bar{u} + \sqrt{u'^2})_d = (8.5 + 5.75 \log_{10} n) u^* + 2 u^{*2} = (5.75 \log_{10} n + 10.5) u^* \dots\dots\dots (2.7)$$

を用いれば、

$$R_T = \frac{(5.75 \log_{10} n + 10.5)^2}{8} \rho C_{D1} \pi d^2 u^{*2} + \frac{\rho}{4} \pi d^3 u^{*2} \left(\frac{11.5 \log_{10} n + 23.8}{\lambda_0 + 5d} + \frac{1}{l_0 + 0.4d} \right) \dots\dots\dots (2.8)$$

となり、(1.15) 式から

$$R_L = \frac{\rho}{4} \pi d^3 u^{*2} \frac{(8.16 \log_{10} n + 14.8)}{\lambda_0 + 5d} \dots\dots\dots (2.9)$$

とあらわされる。従つて以上の諸式を平衡条件式 (1.3) および (1.4) 式に代入することにより、つぎの関係式が得られる。

$$\frac{u_c^* k}{\nu} \geq 51.1; \quad \frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) g d \tan \varphi} = \frac{1}{\psi_3} \dots\dots\dots (2.10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \psi_3 = & \frac{1.5 \frac{u_c^* k}{\nu} (8.13 \log_{10} n + 14.8)}{\frac{u_c^* \lambda_0}{n \nu} + 5 \frac{u_c^* k}{\nu}} \tan \varphi + \frac{3}{4} (5.75 \log_{10} n + 10.5)^2 C_{D1} \\ & + \frac{1.5 \frac{u_c^* k}{\nu} (11.5 \log_{10} n + 23.8)}{\frac{u_c^* \lambda_0}{n \nu} + 5 \frac{u_c^* k}{\nu}} + \frac{1.5 \frac{u_c^* k}{\nu}}{\frac{u_c^* l_0}{n \nu} + 0.4 \frac{u_c^* k}{\nu}} \end{aligned}$$

この式に含まれる $u_c^* l_0/\nu$ は図-1.9 に示すように $u_c^* k/\nu$ の函数であつて、 $u_c^* k/\nu = 51.1$ のとき $u_c^* l_0/\nu = 0$ であり、 $u_c^* k/\nu$ とともに大体直線的に増大する。一方 $u_c^* \lambda_0/\nu$ と $u_c^* k/\nu$ との関係は明らかでないが、ここでは $u_c^* l_0/\nu$ の場合と全く同じ関係が成立するものと仮定する。

また Reynolds 数 $\bar{u}_1 d/\nu$ は

$$\frac{\bar{u}_1 d}{\nu} = \frac{u_c^* d}{\nu} \frac{\bar{u}_1}{u_c^*} = (8.5 + 5.75 \log_{10} n) n \frac{u_c^* k}{\nu}$$

と変形されるから、 C_{D1} の値は図-1.4 から求めることができる。さらに後述するように $\tan \varphi$ は n のみの函数と考えられるから、結局 ψ_3 すなわち (2.10) 式の右辺は $u_c^* k/\nu$ と n のみの函数となるわけである。

(3) $6.83/n \leq u_c^* k/\nu \leq 51.1$ の場合 この場合には球または球状の礫は一部層流底層外へ露出する。 R_T および

R_L の値ならびに Du/Dt および Dw/Dt の関係式は前論文の諸式がこの場合にもそのまま適用され、さらにこれらの式に $z=d$ とおいて得られる諸関係式を平衡条件式に代入することにより、(1.61) 式に対応してつぎの関係式が得られる。

$$\frac{6.83}{n} \leq \frac{u_c^* k}{\nu} \leq 51.1; \quad \frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) g d \tan \varphi} = \frac{1}{\psi_2}, \dots\dots\dots (2.11)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \frac{6 S \tan \varphi (\sqrt{4 \xi_1^2 + 1} - 1)}{\left(1 - \frac{u_c^* \delta_L / \nu}{n u_c^* k / \nu}\right) \xi_1} \left[0.354 \log_e (2 \xi_1 + \sqrt{4 \xi_1^2 + 1}) - \frac{0.177}{\xi_1} (\sqrt{4 \xi_1^2 + 1} - 1) \right. \\ & + 0.1414 \frac{u_c^* \delta_L}{\nu} + \frac{(\sqrt{4 \xi_1^2 + 1} - 1)}{\xi_1} \left(0.1414 + \frac{1}{4 \sqrt{4 \xi_1^2 + 1}} \right) \left. \right] + \frac{3}{4} C_{D1} \beta_s \left[2.5 \log_e (2 \xi_1 \right. \\ & + \sqrt{4 \xi_1^2 + 1}) - \frac{0.25}{\xi_1} (\sqrt{4 \xi_1^2 + 1} - 1) + \frac{u_c^* \delta_L}{\nu} \left. \right]^2 + \frac{3 \beta_s (\sqrt{4 \xi_1^2 + 1} - 1)}{2 \left(1 - \frac{u_c^* \delta_L / \nu}{n u_c^* k / \nu}\right) \xi_1} \left[\frac{1}{2} \log_e (2 \xi_1 \right. \\ & + \sqrt{4 \xi_1^2 + 1}) - \frac{1}{4 \xi_1} (\sqrt{4 \xi_1^2 + 1} - 1) + 0.2 \frac{u_c^* \delta_L}{\nu} + \frac{(\sqrt{4 \xi_1^2 + 1} - 1)}{\xi_1} \\ & \left. \times \left(0.825 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{25} + \frac{1}{4 \xi_1^2 + 1}} \right) \right] + \frac{3}{4} C_{D2} (1 - \beta_s) \left(\frac{u_c^* \delta_L}{\nu} \right)^2 \\ \xi_1 = & 0.4 \left(n \frac{u_c^* k}{\nu} - \frac{u_c^* \delta_L}{\nu} \right). \end{aligned}$$

この (2.11) 式の右辺はつぎに述べるように、 $u_c^* k / \nu$ と n のみの函数である。すなわち、

1. $u_c^* \delta_L / \nu$ は図-1.10 に示されているように $u_c^* k / \nu$ の函数である。
2. S は δ_L / d の函数であり、 $\delta_L / d = (u_c^* \delta_L / \nu) / (n u_c^* k / \nu)$ と変形されるから、結局 S は $u_c^* k / \nu$ と n の函数となる。同様にまた β_s も $u_c^* k / \nu$ と n の函数である。
3. $\tan \varphi$ は後述するように n の函数であり、 ξ_1 も n および $u_c^* k / \nu$ の函数である。
4. C_{D1} は図-1.4 に示されるように Reynolds 数の函数であるが、

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_1 d}{\nu} &= \frac{u_c^* d}{\nu} \frac{\bar{u}_1}{u_c^*} \\ &= n \frac{u_c^* k}{\nu} 2.5 \log_e (2 \xi_1 + \sqrt{4 \xi_1^2 + 1}) - \frac{1}{0.8 \xi_1} (\sqrt{4 \xi_1^2 + 1} - 1) + \frac{u_c^* \delta_L}{\nu} \end{aligned}$$

と変形されるから、 C_{D1} は $u_c^* k / \nu$ と n の函数である。

5. C_{D2} も C_{D1} と同様に Reynolds 数の函数であり、

$$\frac{\bar{u}_2 d}{\nu} = \frac{u_c^* d}{\nu} \frac{\bar{u}_2}{u_c^*} = n \frac{u_c^* k}{\nu} \frac{u_c^* \delta_L}{\nu}$$

と変形することにより $u_c^* k / \nu$ および n の函数となる。

以上の説明によつてわかるように、 ψ_2 は $u_c^* k / \nu$ および n の函数としてあらわされるわけである。

これまでの理論式を総合すると、砂面上におかれた球状の礫の限界掃流力はつぎのように無次元表示してあらわすことができることになる。

$$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) g d \tan \varphi} = \frac{1}{\psi \left(\frac{u_c^* k}{\nu}, n \right)}, \dots\dots\dots (2.12)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_c^* k}{\nu} &\leq \frac{6.83}{n}; \quad \psi \left(\frac{u_c^* k}{\nu}, n \right) = \psi_1, \\ \frac{6.83}{n} &\leq \frac{u_c^* k}{\nu} \leq 51.1; \quad \psi \left(\frac{u_c^* k}{\nu}, n \right) = \psi_2, \\ \frac{u_c^* k}{\nu} &\geq 51.1; \quad \psi \left(\frac{u_c^* k}{\nu}, n \right) = \psi_3. \end{aligned} \right\}$$

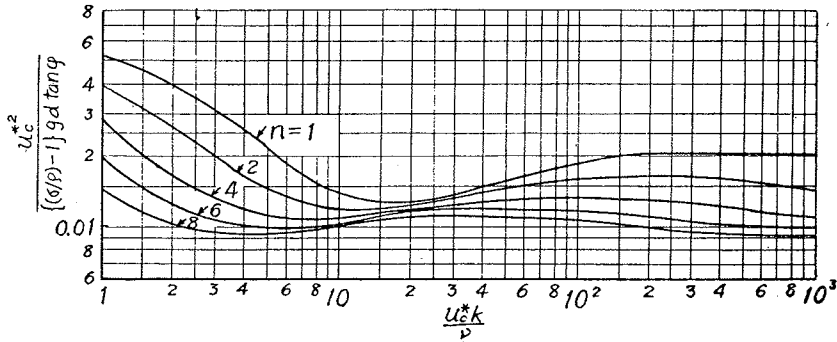
これらの諸式を $n=1, 2, 4, 6, 8$ に対して計算し、 n をパラメーターとして $u_c^{*2} / \{(\sigma/\rho) - 1\} g d \tan \varphi$ と $u_c^* k / \nu$ との関係を図示したものが図-2.2 である。この関係は n の値が 1 に近いほど砂面を構成する砂粒による遮蔽効果が大きく、そのため実際の限界掃流力より小さい値を与える。従つてこの場合も前論文の取扱いと同様 (2.12) 式に遮蔽係数 ϵ を導入して、

$$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)gd \tan \varphi} = \frac{1}{\varepsilon \psi\left(\frac{u_c^* k}{\nu}, n\right)} \dots\dots\dots(2.13)$$

とおき、このεの値を実験結果から定めることとする。εの値はn=1の場合は前論文で得られたように0.4となり、nが大きくなれば漸次1に近づいて行くような性質をもつ係数であることが予想される。

図-2.2 nをパラメーターとしてあらわした無次元限界掃流力の理論曲線

Fig.2.2 Theoretical curves of dimensionless critical tractive force with the parameter n



3. 限界掃流力の理論的考察(2)

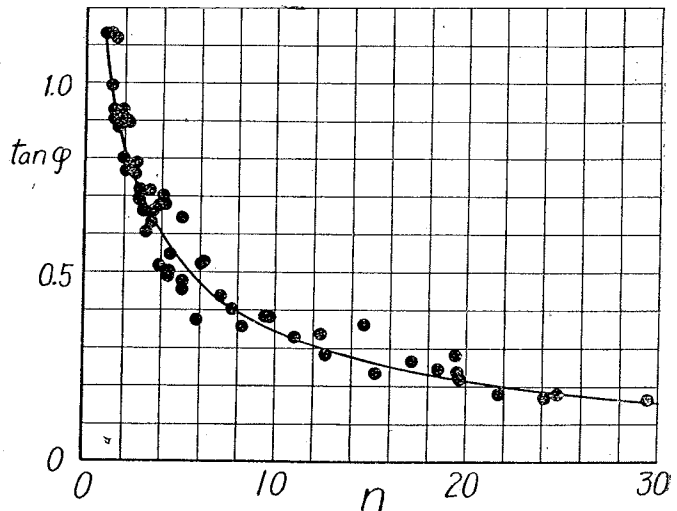
前章の考察では、前論文と同じ取扱い方によつて理論を展開したが、ここでは対象とする球または球状の礫の底部の遮蔽効果を最初から実験結果を加味して半理論的に解析し、その結果を流体抵抗の算定の際に使い、また速度勾配のある流れの中においてうける流体抵抗を前論文のように簡単に取扱わず、球が微小長さをもつ直径の異つた円柱の集合であるという考え方を流体抵抗の算定に適用した。

(1) 遮蔽効果 砂面上へおかれた球または球状の礫の底部は砂面を構成している他の砂粒によつて遮蔽されている。この程度を表現するために遮蔽部分の高さと礫の粒径 d との割合をとり、これを遮蔽比 φ_s とよぶことにする。この遮蔽効果は球または球状の礫に働く流体抵抗を小さくするわけであり、砂面上におかれた礫の限界掃流力について定量的な解析を進めて行くためには、この効果をできるだけ力学的に取り扱う必要がある。以下この現象はかなり複雑なので実験結果を参照し、さらに二、三の仮定を導入してこの効果を解析しよう。

さて砂面上におかれた球または球状の礫の静止摩擦角 φ は、礫の直径 d と砂面を構成する砂の粒径 k との比 n = d/k によつて当然変化すると考えられる。粒径 k の砂粒を一樣にニスつけた板の上に k より大きい直径をもつ球または礫(砂粒)を 10~15 個のせておき、これを水中に入れて徐々に傾斜させて、その静止摩擦角 φ を測定した。この場合、板を傾斜させていくと最初 1~2 粒移動し、やがて 4~5 粒同時に移動するときがあり、最後に 1~2 粒最も動きにくかつたものが動くというように、かなりその限界がはつきりしていたので、ここでは平均的な意味から 4~5 粒動いたときをもつてその限界とした。

図-2.3 はボールベアリングの鋼球を用いた場合、図-2.4 は砂礫の場合の静止摩擦係数の測定結果を示したもので、比較のため図-2.4 には球の場合の結果をも一緒に示してある。図-2.3 および図-2.4 であらわされている n=1, すなわち一樣粒径の砂粒

図-2.3 球に対する静止摩擦係数 tan φ と n との関係
Fig.2.3 Relation between static frictional coefficient tan φ for sphere and n



の場合に相当する $\tan \varphi$ の値と表-1.1に示されている値とは若干相違しているが、これはそれぞれ限界のとり方に相違があるためと考えられ、測定の精度を考慮すれば両者はほぼ一致しているとみなしてよいであろう。

以上のごとく $\tan \varphi$ と n との関係がわかると、これを用いてつぎのように遮蔽比 p_s を近似的に求めることができる。図-2.5に示すように $\tan \varphi$ に相当するだけ粒径 d の球または球状の礫が粒径 k の砂粒とかみ合っていると考える。厳密には三次元的に考えるべきであるが、いたづらにその関係を複雑化するおそれがあるので、ここでは簡単のために二次元的に取り扱うことにする。

このように考えれば、

$$p_s d = \frac{k}{2} (1 - \cos \varphi) \left(1 + \frac{d}{k} \right)$$

となり、とくに $d/k=1$ のときは

$$p_s d = k (1 - \cos \varphi)$$

となる。しかしながら実際に砂面に構成している砂粒の高さはある分布をしており、かつ図-2.5に示すように対象とする球または球状の礫より上流側にある突出した砂粒もある程度球または球状の礫に対して遮蔽効果を及ぼすことになるから、この効果をも考慮し、上の式に k に比例する項を加えた次式により、すべて遮蔽効果が表現されるものと仮定しよう。

$$p_s d = \frac{k}{2} (1 - \cos \varphi) \left(1 + \frac{d}{k} \right) + q_s k \quad (2.14)$$

図-2.6 遮蔽比 p_s と n との関係
Fig.2.6 Relation between sheltering ratio p_s and n

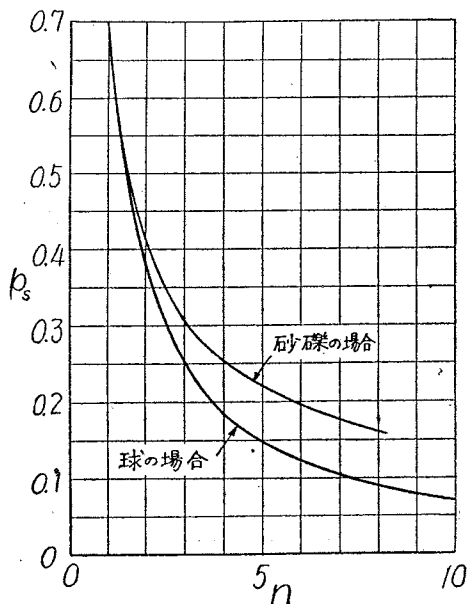


図-2.4 砂礫に対する静止摩擦係数 $\tan \varphi$ と n との関係

Fig.2.4 Relation between static frictional coefficient $\tan \varphi$ for sand and gravel and n

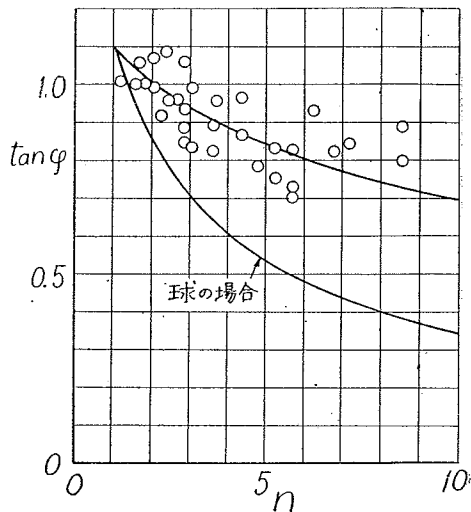
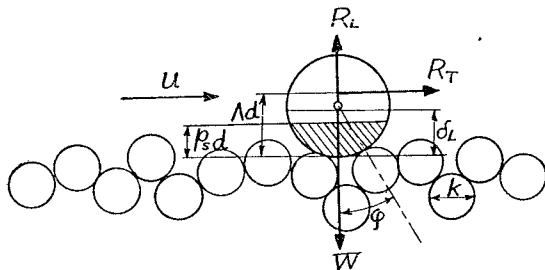


図-2.5 球状の礫に作用する力と遮蔽効果
Fig.2.5 Forces acting on a spherical gravel and the effect of sheltering



q_s の値は理論的に求めることが困難なので、実験結果を参照して定めなければならない。

いま $d/k=n=1$ の場合、 $u_c^* k/\nu \leq 6.83/n$ の範囲で後述するように $u_c^* / \{ (\sigma/\rho) - 1 \} g d \tan \varphi$ と $u_c^* k/\nu$ との関係が実験結果と一致するように q_s を定めると、 $q_s=0.375$ という値が得られる。従つて (2.14) 式はつぎのようにあらわされる。

$$p_s = \frac{1}{2} \left[(1 - \cos \varphi) \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{0.75}{n} \right] \dots (2.15)$$

図-2.3および図-2.4に示す球および砂礫の φ の値を用い、(2.15) 式の p_s と n との関係を図示したものが図-2.6である。

(2) 速度勾配のある流れの中でうける球の流体抵抗 速度勾配のある流れの中でうける球の流体抵抗については、現在までにその研究がなされていないので、ここでは球が微小長さをもつ直径の異つた円柱の集合であると考えて若干の仮定を用い、流体抵抗とその作用位置とを求めた。

一般に流体抵抗は $(1/2)\rho u^2 C_D \times$ (流れに直角方向の物体

の投影面積)によつて求められるが、速度勾配のある流れの中における場合にはその速度分布を考慮し、さらに微小長さの円柱に対する C_D として一様流れの中におかれた円柱の抵抗係数を用い、これを積分することによつて球の流体抵抗を求める方法をとつたのである。この際用いられる円柱の抵抗係数 C_D としては、図-2.7 に示す Wieselsberger の実験結果を採用した。

この方法によつて、一様流れの中における球の抵抗係数 C_D' を求めると、

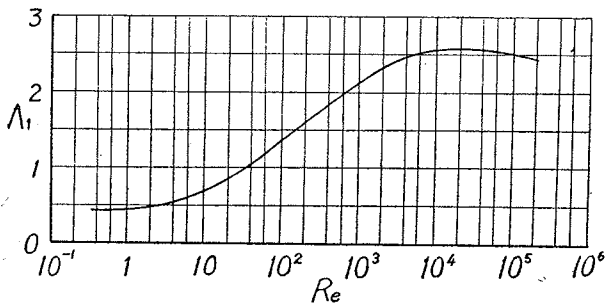
$$C_D' = \frac{8}{\pi} \int_0^1 \sqrt{m-m^2} C_D(R_e) dm \quad \dots\dots(2.16)$$

となる。ここに C_D は Reynolds 数 $R_e = 2\sqrt{m-m^2}ud/\nu$ に対応する円柱の抵抗係数であり、 m は z/d 、 u は一様流れの流速である。もちろん (2.16) 式で求められる C_D' は図-1.4 に示す一様流れの中における球の抵抗係数の実験結果とは一致しない。いま (2.16) 式によつて求められた抵抗係数 C_D' と図-1.4 に示される実験値 C_D との比を

$$A_1 = C_D'/C_D \quad \dots\dots(2.17)$$

とあらわせば、この A_1 の値と Reynolds 数との関係は図-2.8 のようになる。この図から A_1 が 1 になるのは、 $R_e \approx 40$ の付近であることがわかる。つぎにこの A_1 の特性について若干の考察をしてみよう。

図-2.8 A_1 と Reynolds 数との関係
Fig.2.8 Relation between A_1 and Reynolds Number



における球の抵抗係数に関する Stokes の理論値との比 A_1 を求めると、

$$A_1 = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{d_m}{2 - \log_e(\sqrt{2m-m^2}ud/\nu)} dm$$

となる。これは $ud/\nu < 1$ においては $\partial A_1 / \partial (ud/\nu) > 0$ であつて、 ud/ν が減少すれば A_1 は一様に減少していくことになる。

以上のことを考慮して図-2.5 に示されるような速度勾配のあるときの球のうける流体抵抗 R は、一般につきのようにあらわされるものと仮定する。

$$R = \frac{1}{A_1} \int_{P_s}^1 \rho u^2(z) C_D(R_e) d^2 \sqrt{m-m^2} dm \quad \dots\dots(2.18)$$

ここに、 u は z の函数であり、 $R_e = 2\sqrt{m-m^2}ud/\nu$ で、 A_1 は被積分函数値の分布の重心に対応する u および $2\sqrt{m-m^2}$ で作られる Reynolds 数を用いて図-2.8 から求めるものとする。すなわち、速度勾配のある流れの中においても、一様流れの中におかれた球の抵抗係数に対して求められた補正係数 A_1 がそのまま (2.18) 式の形で用いられるものと仮定したのである。なお、球の上下端においては $R_e = 0$ となり、それに対応する C_D は無限大となるから (2.16) および (2.18) 式の積分値の存在が問題となるが、一般にその存在は容易に証明することができる。

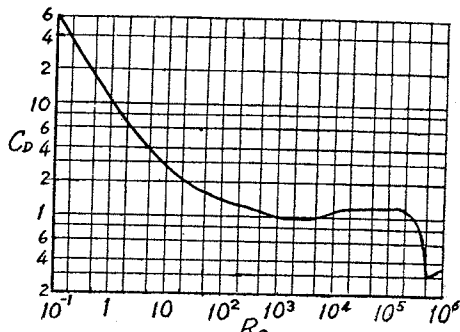
(3) 平衡条件 流体抵抗 R_T の作用位置を球の底部より図-2.5 に示すように $A d$ とすれば、平衡条件式はつぎのようにあらわされる。

$$\left(1 + \frac{2A-1}{\cos \varphi}\right) R_T = \left[(\sigma - \rho) g \frac{\pi}{6} d^3 - R_L \right] \tan \varphi. \quad \dots\dots(2.19)$$

(2.1) 式の第1項および第2項は流速分布をあたえたと (2.18) 式によつて計算することができるから、それら

図-2.7 円柱の抵抗係数と Reynolds 数との関係

Fig.2.7 Relation between drag coefficient of circular cylinder and Reynolds Number



Reynolds 数の小さい場合の一様流れの中における円柱の抵抗係数に関する Lamb の理論値はよく知られているように

$$C_D = \frac{8\pi}{R_e \{ (1/2) - \tau - \log_e(R_e/8) \}}$$

であらわされる⁵⁾。ここに τ は Euler の常数である。この関係を (2.16) 式に用い、かつ Reynolds 数の小さい場合の一様流れの中

をそれぞれ J_i および J_t とすれば, (2.1) 式は

$$R_T = J_i + J_t + \rho \beta_s \frac{\pi}{4} d^3 \left(\frac{Du}{Dt} \right)_d \dots\dots\dots (2.20)$$

とあらわされる。また $p_s d$ が δ_L に較べて大きいとき, あるいは $p_s d$ と δ_L とがあまり相違しないような場合には (2.20) 式は,

$$R_T = J_i + \rho A_0 \frac{\pi}{4} d^3 \left(\frac{Du}{Dt} \right)_d \dots\dots\dots (2.21)$$

とかかれ, ここに A_0 は $p_s d$ より上部の流れに垂直な断面積と全断面積との比であつて, β_s と同様のものであり,

$$A_0 = [\cos^{-1}(2p_s - 1) - (2p_s - 1)\sqrt{1 - (2p_s - 1)^2}] / \pi$$

とあらわされる。 p_s として 図-2.6 の関係を用い, A_0 と n の関係を示したものが 図-2.9 である。また鉛直方向の圧力勾配による揚力 R_L は, $\delta_L > p_s d$ の場合前論文の (1.8) および (1.9) 式がそのまま適用されるものとし, また $\delta_L < p_s d$ の場合には

$$R_L = A_2 \rho \frac{\pi}{4} d^2 (d - \delta_L) \left(\frac{Dw}{Dt} \right)_d \dots\dots\dots (2.22)$$

によつてあらわされるものとする。ここに A_2 は $z = p_s d$ で球または球状の礫をきつたときの断面積と全断面積との比であつて,

$$A_2 = 4 p_s (1 - p_s)$$

であらわされ, $p_s d < d/2$ の場合には $A_2 = 1$ とする。

(i) $u_c^* k / \nu \leq 6.83/n$ の場合 層流底層内の流速分布は, $u = u^* (u^* z / \nu)$ であるから, これを (2.18) 式に用いることによつて R_T およびその作用位置 A がつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} R_T &= J_i = \frac{n^2}{A_1} \left(\frac{u_c^* k}{\nu} \right)^2 \int_{p_s}^1 m^2 \sqrt{m - m^2} C_D(R_e) dm, \\ A &= J_i' / J_i, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.23)$$

ここに,

$$\begin{aligned} R_e &= 2 n^2 m \sqrt{m - m^2} u_c^* k / \nu, \\ J_i' &= \frac{n^2}{A_1} \left(\frac{u_c^* k}{\nu} \right)^2 \int_{p_s}^1 m^3 \sqrt{m - m^2} C_D(R_e) dm. \end{aligned}$$

従つて, これらを平衡条件式 (2.19) 式に代入すればつぎの式が得られる。

$$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g d \tan \varphi} = \frac{1}{6 J_i \left[\frac{2A-1}{\cos \varphi} + 1 \right] \sqrt{\pi}} \dots\dots\dots (2.24)$$

この (2.24) 式の右辺は (2.23) 式からわかるように, $u_c^* k / \nu$ と n のみの函数であり, いま $\tan \varphi$ の代りに $n=1$ のときの $\tan \varphi \equiv \tan \varphi_1$ を用いて,

$$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g k \tan \varphi_1} = n \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_1} \frac{1}{6 J_i \left[\frac{2A-1}{\cos \varphi} + 1 \right] \sqrt{\pi}} \dots\dots\dots (2.24')$$

とあらわせば, $n=1$ すなわち $d=k$ の場合を基準として $n>1$ の場合と比較することが可能となる。なお (2.23) 式の積分 J_i および J_i' の被積分函数値と m との関係の一例を示したのが 図-2.10 の上の図である。

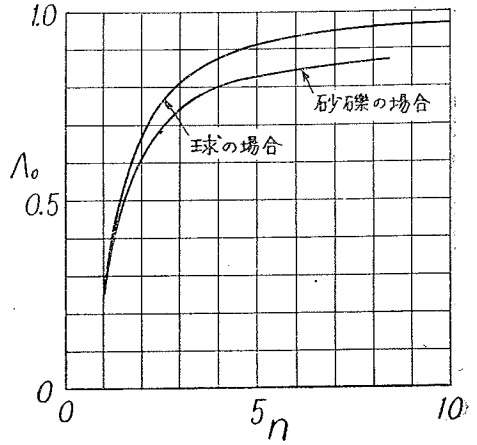
(ii) $u_c^* k / \nu \geq 51.1$ の場合 流速分布として (1.34) 式を用いれば, J_t および A はつぎのようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} J_t &= \frac{1}{A_1} \int_{p_s}^1 \sqrt{m - m^2} (8.5 + 5.75 \log_{10} nm)^2 C_D(R_e) dm, \\ A &= J_t' / J_t, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.25)$$

ここに,

$$\begin{aligned} R_e &= 2 n \sqrt{m - m^2} (8.5 + 5.75 \log_{10} nm) u_c^* k / \nu, \\ J_t' &= \frac{1}{A_1} \int_{p_s}^1 m \sqrt{m - m^2} (8.5 + 5.75 \log_{10} nm)^2 C_D(R_e) dm. \end{aligned}$$

図-2.9 A_0 と n との関係
Fig.2.9 Relation between A_0 and n



J_t および J_t' の被積分函数の値と m との関係の一例を図-2.10 の下の図に示した。(1.40) および (1.41) 式から $z=d$ における値 $(Du/Dt)_d$ および $(Dw/Dt)_d$ を作り, (2.25) 式を用いて R_T および R_L を求めれば, これらを平衡条件式に代入することにより, つぎの関係式がえられる。

$$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)gd \tan \varphi} = \frac{1}{\frac{6}{\pi} \left[\frac{2A-1}{\cos \varphi} + 1 \right] J_t + \left[\frac{2A-1}{\cos \varphi} + 1 \right] A+B} \dots\dots\dots(2.26)$$

ここに,

$$A = A_0 \left[\frac{3}{2} \left\{ \frac{2(8.5+5.75 \log_{10} n) + 4 + 2\sqrt{2}}{u_c^{*}\lambda_0/\nu + 5n \frac{u_c^{*}k}{\nu}} \right\} n \frac{u_c^{*}k}{\nu} + \frac{3}{2} n \frac{u_c^{*}k}{\nu} + \frac{u_c^{*}\lambda_0/\nu + 0.4n \frac{u_c^{*}k}{\nu}}{\nu} \right],$$

$$B = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{2}(8.5+5.75 \log_{10} n) + 2\sqrt{2}}{u_c^{*}\lambda_0/\nu + 5n \frac{u_c^{*}k}{\nu}} n \frac{u_c^{*}k}{\nu} \tan \varphi$$

上式における $u_c^{*}\lambda_0/\nu$ は前述のように $u_c^{*}k/\nu$ の函数であり, また $u_c^{*}\lambda_0/\nu$ についても前と同様に取り扱えば, (2.26) 式の右辺は (2.24) 式と同様に $u_c^{*}k/\nu$ と n のみの函数となるわけである。また (2.24)' 式と同じ表示の仕方をすれば,

$$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)gk \tan \varphi_1} = n \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_1} \frac{1}{\frac{6}{\pi} \left[\frac{2A-1}{\cos \varphi} + 1 \right] J_t + \left[\frac{2A-1}{\cos \varphi} + 1 \right] A+B} \dots\dots\dots(2.26)'$$

とあらわされる。

(iii) $6.83/n \leq u_c^{*}k/\nu \leq 51.1$ の場合 流速分布として層流底層の存在を考慮に入れた (1.52) 式を用いれば, (2.20) 式中の J_t とその作用位置は (2.18) 式からつぎのようにあらわされる。

$$J_t = \frac{1}{A_1} \int_{\delta_L}^1 []^2 \sqrt{m-m^2} C_D(R_e) dm, \quad A = J_t'/J_t, \dots\dots\dots(2.27)$$

ここに,

$$J_t' = \frac{1}{A_1} \int_{\delta_L'}^1 m []^2 \sqrt{m-m^2} C_D(R_e) dm, \quad \delta_L' = \delta_L/d,$$

$$R_e = 2n\sqrt{m-m^2} [] u_c^{*}k/\nu,$$

$$[] = \frac{1}{0.4 \xi_1} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\xi_1^2 + \frac{1}{4}} \right) + 2.5 \log_e \left(2\xi_1 + 2\sqrt{\xi_1^2 + \frac{1}{4}} \right) + \frac{u_c^{*}\delta_L}{\nu},$$

$$\xi_1 = 0.4(nmu_c^{*}k/\nu - u_c^{*}\delta_L/\nu).$$

また, z が δ_L と $p_s d$ との間では, 流速分布として $u \approx u^*(u^*z/\nu)$ を用いれば, (2.20) 式中の J_t およびその作用位置 A' は同様につぎのようにあらわされる。

$$J_t = \frac{1}{A_1} n^2 \left(\frac{u_c^{*}k}{\nu} \right)^2 \int_{p_s}^{\delta_L'} m^2 \sqrt{m-m^2} C_D(R_e) dm, \quad A' = J_t'/J_t, \dots\dots\dots(2.28)$$

ここに,

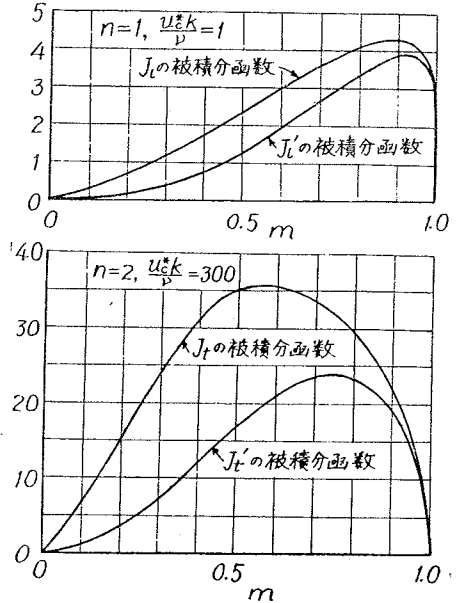
$$J_t' = \frac{1}{A_1} n^2 \left(\frac{u_c^{*}k}{\nu} \right)^2 \int_{p_s}^{\delta_L'} m^2 \sqrt{m-m^2} C_D(R_e) dm,$$

$$R_e = 2n^2 m \sqrt{m-m^2} u_c^{*}k/\nu.$$

(1.57) および (1.59) 式から $(Du/Dt)_d$ および $(Dw/Dt)_d$ を作り, (2.27) および (2.28) 式を用いて R_T および R_L を求め, 平衡条件式に代入すればつぎの関係式が得られる。

図-2.10 J_t および J_t' ならびに J_t および J_t' の被積分函数値と m との関係の一例

Fig.2.10 Some examples of the relations between the values of functions in the integrals J_t, J_t', J_t and J_t' and the value of m



$$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)gd \tan \varphi} = \frac{1}{\frac{6}{\pi} \left[\frac{2A-1}{\cos \varphi} + 1 \right] J_t + \left[\frac{2A-1}{\cos \varphi} + 1 \right] A + B + \frac{6}{\pi} \left[\frac{2A'-1}{\cos \varphi} + 1 \right] J_t} \quad (2.29)$$

ここに、

$$A = (\beta_s \text{ または } A_0) \left[\frac{3}{2} \frac{(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1)}{\left(1-\frac{u_c^* \delta_L/\nu}{nu_c^* k/\nu}\right) \xi_1} \left\{ \frac{1}{2} \log_e (2\xi_1 + \sqrt{4\xi_1^2+1}) - \frac{1}{4\xi_1} (\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) \right\} \right. \\ \left. + 0.2 \frac{u_c^* \delta_L}{\nu} + \frac{(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1)}{\xi_1} \left(0.825 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{25} + \frac{1}{4\xi_1^2+1}} \right) \right], \\ B = \frac{6S(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) \tan \varphi}{\left(1-\frac{u_c^* \delta_L/\nu}{nu_c^* k/\nu}\right) \xi_1} \left\{ 0.354 \log_e (2\xi_1 + \sqrt{4\xi_1^2+1}) - \frac{0.177}{\xi_1} (\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) \right. \\ \left. + 0.1414 \frac{u_c^* \delta_L}{\nu} + \frac{(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1)}{\xi_1} \left(0.1414 + \frac{1}{4\sqrt{4\xi_1^2+1}} \right) \right\}.$$

また、前と同様に $n=1$ のときを基準としてあらわせば、

$$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)gk \tan \varphi_1} = n \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_1} \frac{1}{\frac{6}{\pi} \left[\frac{2A-1}{\cos \varphi} + 1 \right] J_t + \left[\frac{2A-1}{\cos \varphi} + 1 \right] A + B + \frac{6}{\pi} \left[\frac{2A'-1}{\cos \varphi} + 1 \right] J_t} \quad (2.29)'$$

とかきかえられる。

この (2.29) 式の右辺は前と同様に $u_c^* k/\nu$ と n のみの函数であることが容易にわかる。

以上要するに、砂面上におかれた球または球状の礫の限界掃流力は無次元表示されて、前章と全く同様な

$$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)gd \tan \varphi} = f\left(\frac{u_c^* k}{\nu}, n\right) \dots\dots\dots (2.30)$$

の形の関係式が導かれたわけである。

なお、 $d/k=n$ があまり大きくなつて議論の対象としている場所が砂面を遠ざかると、 $(Du/Dt)_d$ および $(Dw/Dt)_d$ を求めるときの種々の仮定の妥当性が問題となるので (仮定自身が是正されるものもある)、大きい n の場合まで拡張して用いることが許されなくなるが、一方 n が大きくなると J_t の効果の方が支配的となつて、 $(Du/Dt)_d$ および $(Dw/Dt)_d$ の妥当性如何が問題とならなくなるということが考えられる。

(iv) 座標原点のとり方について 同一の砂面上へ順次異つた大きさの球または球状の礫をおいた場合、そのおのおの場合に対して座標 z の原点は同じ位置にとる必要がある。そのために座標 z をつぎのように n の変化に対して普遍的にとつた場合、どの程度上述の諸式が變つてくるかを確かめてみたい。図-2.11 に示すように、いままでの計算においては z なる座標を用いたが、ここでは $d/k=1$ のときの座標、すなわち粒径 k の砂粒の中心から上方 $0.175k$ の面を基準とした座標 z' を用いると、両者の座標原点の位置の差 δz は

$$\delta z = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cos \varphi - 1 - \frac{0.35}{n} \equiv rd$$

となる。 r は $d/k=n$ のみの函数であるから、図-2.3 の φ を用いて計算すれば、図-2.12 のようになる。またこの座標 z' に従つて上述の諸式のうちから二、三を選んでかきかえてみるとつぎのようになる。

(2.23) 式;

$$J_t = \frac{1}{A_1} n^2 \left(\frac{u_c^* k}{\nu} \right)^2 \int_{p_s}^1 (m+r)^2 \sqrt{m-m^2} C_D(R_e) dm.$$

(2.25) 式;

$$J_t = \frac{1}{A_1} \int_{p_s}^1 \sqrt{m-m^2} [8.5 + 5.75 \log_{10} n(m+r)]^2 C_D(R_e) dm,$$

(2.27) 式における ξ_1 ; $\xi_1 = 0.4 [n(m+r)u_c^* k/\nu - u_c^* \delta_L/\nu]$.

図-2.12 の r と上記諸式および図-2.10などを参照すれば、この r の影響はあまり大きくないものと考えられ、また流速分布を示すときの座標原点のとり方そのものにも議論があつて、いまだはつきりしていないことから、数値計算にあつてはこの r については考慮しないことにした。

図-2.11 座標原点の位置
Fig.2.11 Situation of the coordinate origins

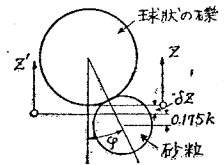
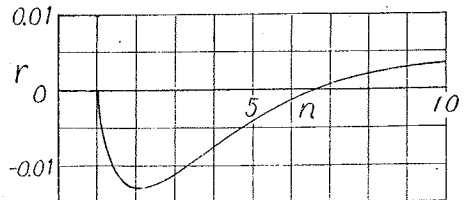


図-2.12 r と n との関係
Fig.2.12 Relation between r and n



以上の諸式を用いて $u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho)-1\}gd \tan \varphi$ と u_c^*k/ν との関係は $n=1, 2$ および 4 の場合について計算したのが、次章において示される 図-2.14, 図-2.15, 図-2.17 および 図-2.18 である。

4. 砂面上におかれた球状の礫の限界掃流力の実験

(1) 実験方法 砂面を構成している砂粒の粒径 k が小さく、かつ $d/k=n$ があまり大きくない場合、すなわち水樋の断面積に較べて砂粒および球状の礫の占める割合が充分小さいときには、前論文で用いた閉管路を使用し、また球状の礫がかなり大きくその占める割合が小さいとは考えられないような場合には、開水路を用いて実験を行った。

(i) 閉管路による実験 粒径の様な砂粒を底面にニスづけし、上流端から約 5.3 m の下流部に対象とする球状の礫をまばらに配置し、前論文と同じように流速分布を測定して限界摩擦速度 u_c^* を求める方法を採用した。すなわち、粗面上の流速分布は z が大きい部分に対して、

$$\bar{u} = u^*(A_r + 5.75 \log_{10} z/k)$$

とあらわされるから、流速分布を測定し \bar{u} と $\log_{10} z/k$ との関係をプロットすれば直線となる。従つて、その直線の勾配を 5.75 で割つて摩擦速度 u^* を求めたのである。

この場合、球状の礫として球を使用することとしたが、実験に用いるべき球の製作が困難であつたので、ボールベアリングの鋼球数種とガラス球二種を用いた。またその移動限界としてはつぎのような場合を採用した。すなわち、ニスづけした砂面上に球を相互に相当の間隔をおいて、その直径に応じて 5~13 個配置し、そのうち約半分が移動開始したときをもつて、その移動限界とした。このことは、 $\tan \varphi$ の値を測定して定めたときと同じ理由によるものである。

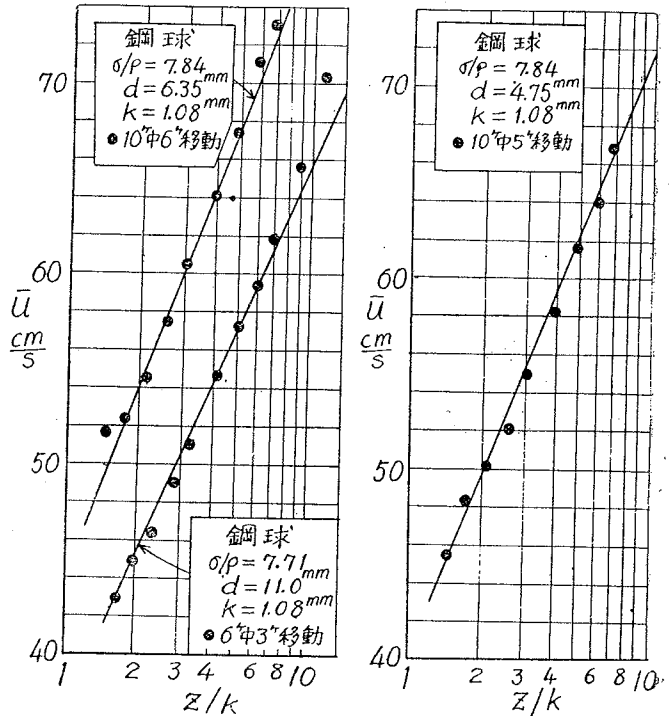
(ii) 開水路による実験 実験水樋として幅 20 cm, 深さ 10 cm の矩形断面、長さ 6 m のアルミニウム製のものを使用し、つぎのような方法で実験を行った。水樋の底面に一樣粒径の砂粒を一樣にニスづけし、上流端から約 5 m 付近に対象とする球を一個無作意におき、水樋の勾配および流量を変化せしめてその球の移動限界を求め、そのときの水面勾配 J と水深 h とを測定し、 $u_c^* = \sqrt{ghJ}$ の関係から限界摩擦速度を算出した。また同時に水温を測定して u_c^*k/ν の値を求めた。

以上の操作をくりかえし一つの球について約 10 回の測定を行つて限界摩擦速度 u_c^* を求め、それらの平均値をもつて所要の u_c^* の値とした。

(2) 実験結果 図-2.13 は実験方法 (i) による流速分布の測定結果である。ここで問題となるのは座標原点のとり方であるが、前論文において採用した方法と全く同様に、 \bar{u} と $\log_{10} z/k$ とが直線的関係になるように決定し、 u_c^*k/ν の値が大体 100 以上になるときは $A_r=8.5$ となることを考慮して定めた。このようにして定めた座標原点の位置はすべて砂面を構成している砂粒の頂点から下 $k/2$ の間にあつた。

図-2.13 から限界摩擦速度 u_c^* を求め、また実験方法 (ii) の実験結果も一緒に $d, k, n, \sigma/\rho, \tan \varphi, u_c^{*2}, u_c^*k/\nu, u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho)-1\}gd \tan \varphi, u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho)-1\}gk \tan \varphi$ および ϵ との関係を一括表示したものが表-2.1 である。また 1953 年に行われた A. T. Ippen および R. P. Verma による実験結果もこの表に示しておいたが、このうち $\tan \varphi$ の値はその測定が

図-2.13 閉管路における流速分布と砂礫の移動状況
Fig. 2.13 Velocity distributions in the water tunnel and states of sand and gravel movement (1)



彼等によつて行われなかつたので、著者らの実験結果すなわち図-2.3から求めたものである。

(3) 理論結果との比較

(i) $n=1$, すなわち一様粒径の砂粒の場合

図-2.14は前論文の表-1.2に示されている実験結果と考察(2)によつて求められた理論曲線とを比較したものである。この図からわかるように、 $p_s=0.7$ という遮蔽効果を入れて求められた曲線は $u_c^*k/\nu < 6.83$ という領域において実験結果に一致するように定めたにもかかわらず、 $u_c^*k/\nu > 6.83$ の領域においても比較の実験値の中間を通りよく一致しているものと考えられる。また $p_s=0$ という曲線はほぼ実験値の最下端に一致しており、このことは最も動きやすい砂粒に対応していると考えられる。

図-2.15は前論文の図-1.15と同じ図に Ippen および Verma の $n=1.09$ の場合の実験値を加え、さらに理論曲線を入れたものであつて、図中の(1)および(2)はそれぞれ前論文における $\epsilon=0.4$ に対する曲線と図-2.14における $p_s=0.7$ の場合の曲線を示す。理論曲線と実験結果とは、 u_c^*k/ν の全領域にわたつてよく一致しており、また理論曲線(1)と(2)とは u_c^*k/ν の小さいところで若干離れているが、その他の領域ではよく一致している。しかしながら前論文においては、平均流による流体抵抗を求めるとき、変動速度を考慮して $u_1 = \bar{u} + \sqrt{u'^2}$ としたが、考察(2)においてはこの変動速度を考慮しなかつた。この点についてはもう少し詳しく後述するつもりである。

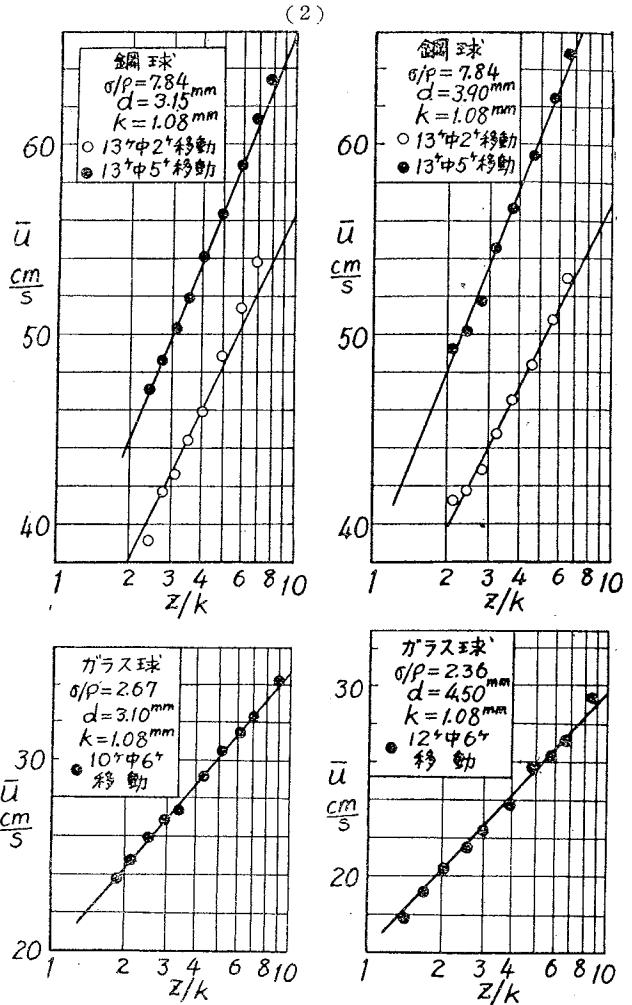


図-2.14 一様粒径の場合の実験結果と $n=1$ に対する理論曲線との比較

Fig.2.14 Comparison of the experimental results for uniform sand grain and the theoretical curves for $n=1$

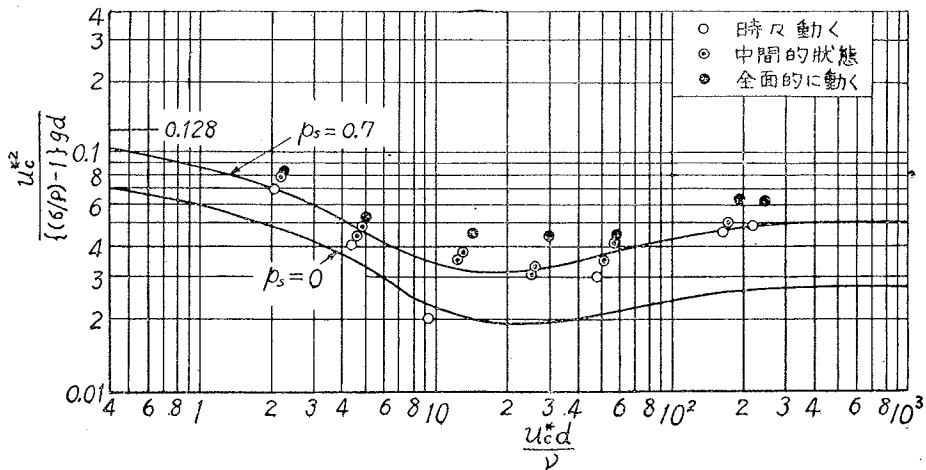


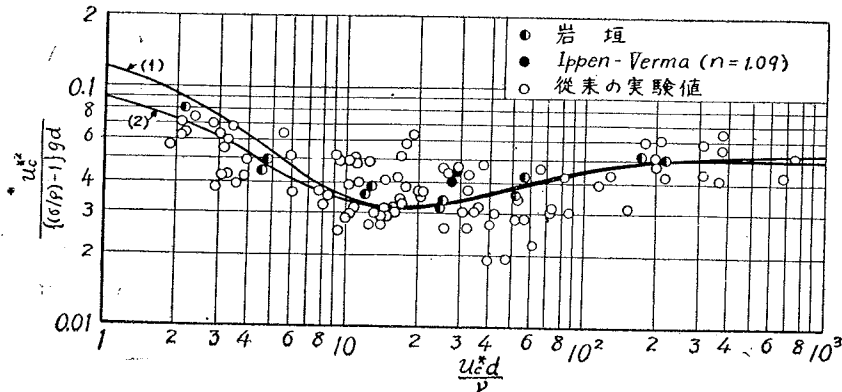
表-2.1 実験資料 Table 2.1 Observed test data

$d(\text{cm})$	$k(\text{cm})$	$n = \frac{d}{k}$	$\frac{\sigma}{\rho}$	$\tan \varphi$	$u_c^{*2} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)^2$	$\frac{u_c^* k}{\nu}$	$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) g d \tan \varphi}$	$\frac{u_c^{*2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) g k \tan \varphi_1}$	ϵ	実験者	備考
0.310	0.108	2.87	2.67	0.70	6.55	20.9	0.0183	0.0339	0.67	岩垣, 土屋	閉管路
0.315	0.108	2.93	7.84	0.70	29.1	42.8	0.0197	0.0371	0.69	"	"
0.390	0.108	3.62	7.84	0.63	31.4	45.3	0.0190	0.0398	0.69	"	"
0.450	0.108	4.17	2.36	0.58	5.45	18.8	0.0156	0.0347	0.76	"	"
0.475	0.108	4.40	7.87	0.57	30.8	45.2	0.0171	0.0391	0.74	"	"
0.635	0.108	5.88	7.87	0.47	34.0	46.3	0.0168	0.0430	0.71	"	"
1.10	0.108	10.2	7.71	0.34	25.4	41.2	0.0104	0.0329	0.99	"	"
0.215	0.108	1.99	9.10	0.84	44.9	60.1	0.0313	0.0480	0.65	"	開水路
0.295	0.108	2.73	9.10	0.74	40.9	58.3	0.0225	0.0417	0.64	"	"
0.380	0.108	3.54	2.67	0.44	4.55	18.0	0.0166	0.0237	0.71	"	"
0.390	0.365	1.07	7.84	1.07	128	316	0.0462	0.0480	0.44	"	"
0.390	0.365	1.07	7.84	1.07	135	319	0.0488	0.0508	0.42	"	"
0.715	0.365	1.96	7.84	0.84	130	318	0.0322	0.0486	0.51	"	"
1.10	0.365	3.01	7.71	0.69	105	255	0.0212	0.0402	0.65	"	"
1.43	0.365	3.92	7.71	0.61	118	305	0.0207	0.0450	0.63	"	"
1.54	0.365	4.22	2.49	0.60	21.5	113	0.0168	0.0390	0.77	"	"
1.59	0.365	4.36	2.49	0.57	28.2	129	0.0220	0.0502	0.59	"	"
0.318	0.183	1.74	1.28	0.89	2.45	28.7	0.0316	0.0399	0.45	Ippen, Verma	開水路
0.318	0.183	1.74	1.28	0.89	2.50	29.0	0.0317	0.0401	0.45	"	"
0.318	0.183	1.74	1.28	0.89	2.52	29.0	0.0325	0.0411	0.44	"	"
0.200	0.183	1.09	1.28	1.07	2.37	28.2	0.0405	0.0462	0.34	"	"
0.200	0.183	1.09	1.28	1.07	2.60	29.5	0.0442	0.0506	0.32	"	"
0.200	0.183	1.09	1.28	1.07	2.64	29.8	0.0451	0.0516	0.31	"	"
0.318	0.183	1.74	2.38	0.89	6.97	48.4	0.0182	0.0230	1.14	"	"
0.318	0.183	1.74	2.38	0.89	6.50	46.7	0.0170	0.0215	1.07	"	"
0.318	0.183	1.74	2.38	0.89	6.25	45.8	0.0163	0.0206	1.04	"	"
0.400	0.183	2.18	2.38	0.81	6.97	48.4	0.0160	0.0208	1.02	"	"
0.400	0.183	2.18	2.38	0.81	6.60	47.0	0.0152	0.0196	0.97	"	"
0.400	0.183	2.18	2.38	0.81	6.47	46.6	0.0149	0.0193	0.96	"	"
0.318	0.076	4.16	1.28	0.58	0.78	6.73	0.0151	0.0336	0.72	"	"
0.318	0.076	4.16	1.28	0.58	0.86	7.06	0.0165	0.0369	0.66	"	"
0.200	0.076	2.62	1.28	0.74	0.81	6.88	0.0196	0.0349	0.61	"	"
0.200	0.076	2.62	1.28	0.74	1.00	7.64	0.0247	0.0440	0.49	"	"
0.318	0.076	4.16	2.38	0.58	2.68	12.5	0.0107	0.0139	1.12	"	"
0.318	0.076	4.16	2.38	0.58	1.97	10.7	0.0078	0.0102	1.40	"	"
0.400	0.076	5.24	2.38	0.51	2.68	12.5	0.0097	0.0122	1.14	"	"
0.400	0.076	5.24	2.38	0.51	1.97	10.7	0.0098	0.0123	1.11	"	"

Ippen および Verma による実験結果のうち $u_c^* k / \nu$ の計算においては, $\nu = 0.01 \text{ cm}^2 / \text{sec}$ とした

図-2.15 $n=1$ に対応する各種の実験結果と理論曲線との比較

Fig. 2.15 Comparison of many experimental results and the theoretical curves for $n=1$

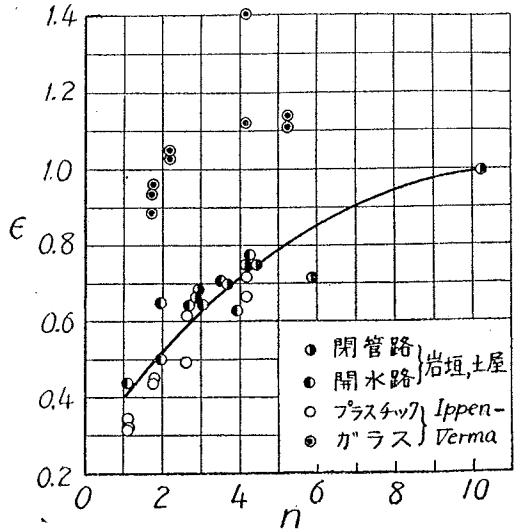


(ii) $n \geq 1$, すなわち砂面上におかれた球の場合 (a) 理論的考察(1)の場合: 図-2.2 に示されている理論曲線と表-2.1 にえられている実験結果とから, おのおのの資料に対応した遮蔽係数 ϵ を求め, n との関係を探

ロットしたのが図-2.16であつて、 ϵ は $n=d/k$ の函数としてあらわされるようである。前述の予想のように n の値が大きくなると ϵ の値が漸次 1 に近づくことが見出される。またこの図において Ippen および Verma の実験結果のうちガラス球を用いたものは、他の実験値より離れてプロットされるが、これは何か系統的な実験誤差が介入されているように考えられる。

図-2.16 遮蔽係数 ϵ と n との関係

Fig.2.16 Relation between sheltering coefficient ϵ and n



(b) 理論的考察(2)の場合 図-2.17は前述した理論的考察(2)によつて得られた結果と表-2.1で示されている実験結果を、無次元表示した限界掃流力 $u_{c*}^{**}/(\sigma/\rho-1)gd \tan \varphi$ と $u_{c*}k/\nu$ との関係によつて比較したものである。この図からは、実験値が少なくして理論曲線全般にわたつてその妥当性を調べることはできないけれども、実験の範囲内では理論曲線は比較的妥当な位置を占めていると考えられる。そして理論的考察(1)で得られた

$$u_{c*}^{**}/\{(\sigma/\rho)-1\}gd \tan \varphi = 1/\{\epsilon \psi(u_{c*}k/\nu, n)\}$$

の関係において、遮蔽係数 ϵ の値として図-2.16の実線で示した値を採用し、前論文と同様に図-2.2において示されている理論曲線を $1/\epsilon$ 倍したものとかなりよく一致する。ここで $d/k=n=1.09$ という Ippen および Verma による実験値が砂粒の代りに球を用いたにもかかわらず、(i)で述べた結果とよく一致していることは、

図-2.17 $n \geq 1$ の場合の理論曲線と実験結果との比較

Fig.2.17 Comparison of theoretical curves and experimental results for $n \geq 1$

図中の数字は n の値を示す。

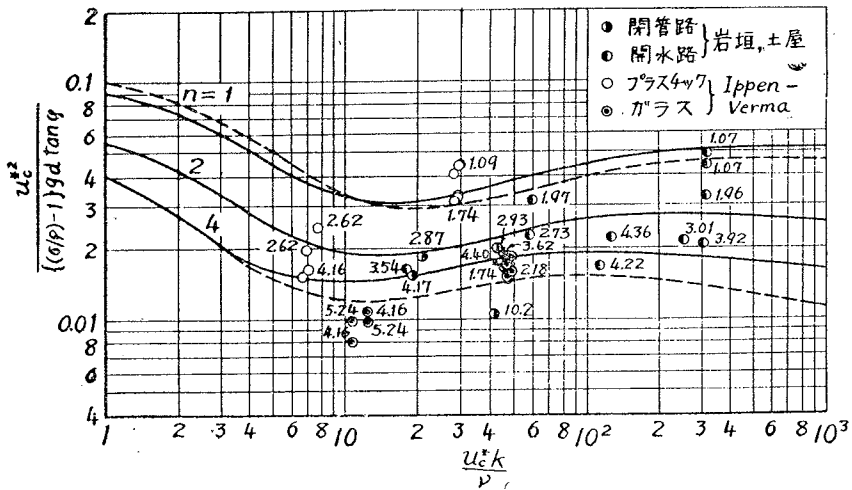


図-2.15, 図-2.16をも参照してとくに注目すべきことである。

図-2.17において点線であらわされている曲線は平均流による流体抵抗を求めるとき、流速として変動速度を考慮し $u = \bar{u} + \sqrt{u'^2}$ とし、さらに $d/k=1$ のときの遮蔽比を $\rho_s=0.73$ としたものである。この図から、 n が大きくなるに従つて実線と点線とであらわされている両者の差異は大きくなるようであり、また以上のような解析によれば変動速度を考えない \bar{u} のみを用いる方が実験結果とよく一致するようである。

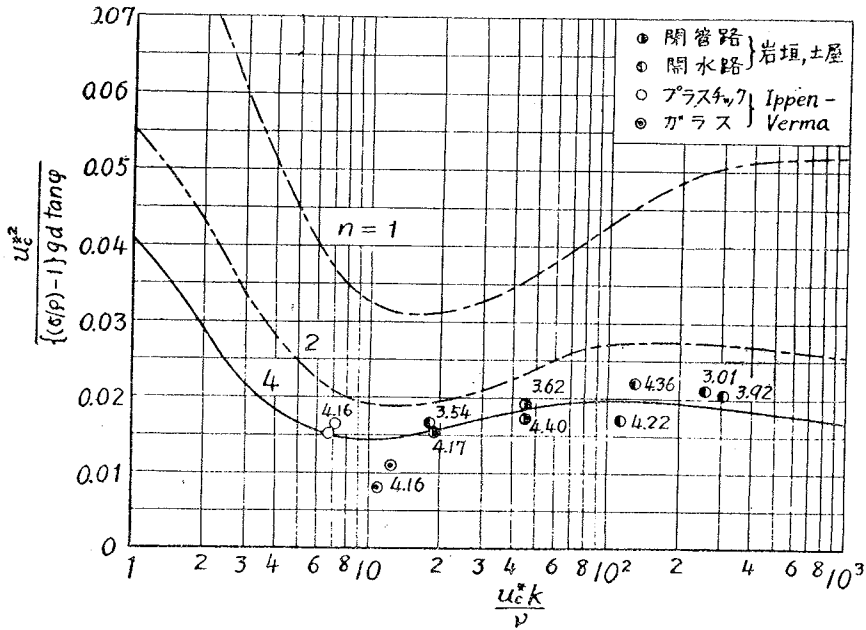
また表-2.1をみると、 $n=4$ 付近の実験値の数が比較的多いので、これらの結果を半対数紙に示したのが図-2.18であるが、著者らの理論曲線と少なくとも実験の範囲内では比較的よく一致している。このことから以上の理論的考察の結果が $n \geq 1$ の場合にもほぼ妥当であるように考えられる。

なお、 $n > 1$ の場合の限界掃流力 ρu_{c*}^{**} と $n=1$ すなわち一様粒径の砂粒の場合のそれと比較するために、(2.26)' および (2.29)' 式の表示に従つて理論曲線をかきかえたのが図-2.19である。この図から砂面上におか

れた球の限界掃流力 ρu_c^{*2} は $d/k=n$ があまり大きくない限り、そう変化しないという興味ある結果が得られる。この事実は次章において議論する混合砂礫の限界掃流力についての考察や水流の篩分作用の問題に対して、重要な資料を提供するもので、とくに注目すべき結論である。

図-2.18 $n=4$ 付近の実験結果と理論曲線との比較

Fig.2.18 Comparison of experimental results for about $n=4$ and theoretical curves



5. 混合砂礫の限界掃流力についての考察

混合砂礫の限界掃流力については、前論文において詳しく論じたが、ここでは砂面上におかれた球の限界掃流力についての理論的考察の結果を基礎として、この問題を考察してみよう。

混合砂礫の限界掃流力で問題となるのは、前論文でも述べたように、

(i) いかなる粒径のものが動き始めたときをもつてその限界とするか、

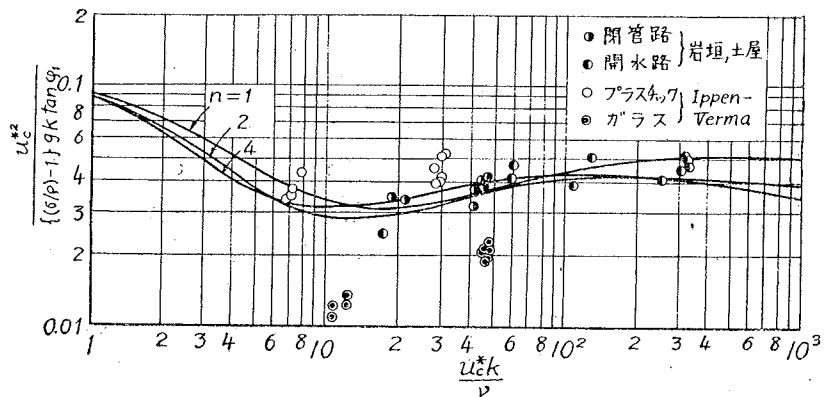
(ii) 実験してえられた限界掃流力は平均粒径に対する一様粒径の場合より大きいか小さいか、であつて、これを解決しなければ限界掃流力に及ぼす砂礫の混合効果を明らかにすることはできない。

(i) の問題はとくに重要であつて、前論文で述べたほぼ一様な砂粒とみなしてよい実験においても、かなりその移動限界の決定に迷つ

たわけである。従つて、混合砂礫の場合にはなおさらその移動限界の決定が困難であろうが、もし混合砂礫の場合、砂面上に現われている砂粒の個々の限界掃流力があまり相違しなければ、その移動限界の決定の難易は一様粒径の場合と同程度であろう。この観点に立つて図-2.19の結果を基として考察してみよう。そのために球の代りに実際の砂礫の場合につき、

図-2.19 $n=1$ の場合を基準にとつた無次元限界掃流力 $u_c^{*2} / \{(\sigma/\rho) - 1\} g k \tan \varphi_1$ と $u_c^* k / \nu$ との関係

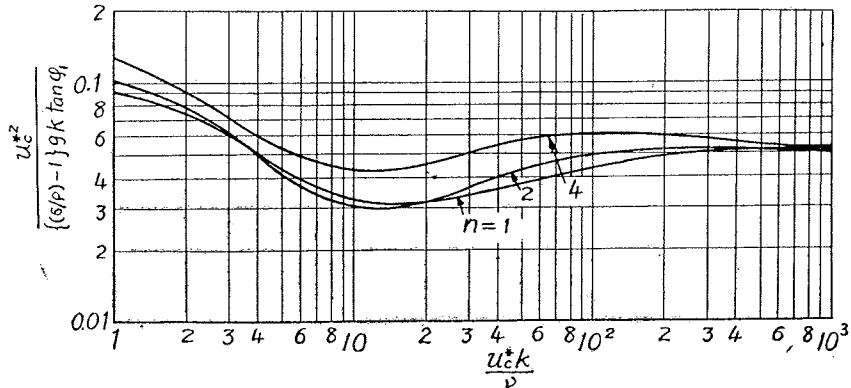
Fig.2.19 Relation between dimensionless critical tractive forces $u_c^{*2} / \{(\sigma/\rho) - 1\} g k \tan \varphi_1$ expressed by the factors for $n=1$ and $u_c^* k / \nu$



$\tan \varphi$ として 図-2.4 を用いて 図-2.19 と同様の計算を行つたのが 図-2.20 である。図-2.19 と同様に $d/k=n$ があまり大きくない限り限界掃流力 ρu_c^{*2} はほとんど変わらないという注目すべき結果がえられる。

図-2.20 実際の砂礫に対する $u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho)-1\}gk \tan \varphi$ と u_c^*k/ν との関係

Fig.2.20 Relation between dimensionless critical tractive forces $u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho)-1\}gk \tan \varphi$ for sand and gravel and u_c^*k/ν



混合砂礫の場合 u_c^*k/ν は混合砂礫によつて構成されている河床の粗度を与えるから、 k は混合砂礫の平均粒径をあらわすものと考えられる。そこでもし砂礫面に突出している平均粒径より大きい砂礫の $\tan \varphi$ が 図-2.4 であらわされるならば、図-2.20 を基として上記の結果からつぎのことが結論される。すなわち、平均粒径より大きい砂礫の粒径を d とすれば、 d/k があまり大きくない限り (図-2.20 によればこの限界は $d/k < 3$ または 4 であろう)、砂礫面に突出している個々の砂粒の限界掃流力はほとんど変わらないと考えられる。しかし平均粒径より小さい砂粒については、ここでは議論の対変としなかつたから言及することはできない。

つぎに (ii) の問題を考えてみよう。表-1.3 に示されている分類からして、この資料全体としては混合砂礫の限界掃流力は一様砂礫より若干大きい値を与える傾向にあるが、 M および β によつて混合砂礫の限界掃流力が特長づけられるとは思われぬ。すなわち、表-1.3 に示されている程度の混合砂礫ではその混合効果は移動限界の判定の相違による誤差範囲内に十分入つてしまうものと考えられ、混合状態をあらわす係数を導入する意義が明らかでないように考えられる。砂礫面に突出している砂粒数の何 % が移動するときをもつて移動限界と定義できるような実験が可能ならば、混合効果をあらわす係数を提案することができるかもしれないが、このような移動限界の定義の妥当性とその実験の可能性とが問題となるであろう。

以上の考察から著者らは混合効果をあらわす係数を提案できない現在では、平均粒径に対応した限界掃流力を採用して差支えないことを再び主張するものである。

6. 結 論

限界掃流力に関する前論文の取扱い方とこれを若干修正した取扱い方法とによつて、砂面上におかれた球または球状の砂礫の限界掃流力の水理学的機構について解析を試み、無次元表示した限界掃流力 $u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho)-1\}gk \tan \varphi$ を u_c^*k/ν と n のみの函数としてあらわすことができた。この関係は実験の結果とよく一致し、水理学的にその現象を充分説明することができたと考えている。とくに興味ある結論は、球または球状の礫の大きさが、砂面を構成している砂粒の直径の 4 倍程度までは、その限界掃流力が砂面の砂粒のそれとほとんど変わらないということであつて、この結果を用いて混合砂礫の限界掃流力について若干の考察を行つたが、さらに水流の篩分作用とか捨石による洗掘防止効果などの問題を解明する上に、重要な基礎的資料とその足がかりを提供するものであると思ふ。

最後にこの研究に対して終始御指導を賜つた石原教授に感謝するとともに、昭和 29 年度文部省科学研究費による研究の一部であることを付記して謝意を表する。

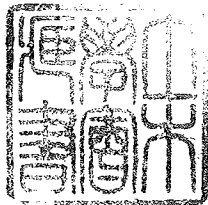
参 考 文 献

- 1) A. Shields: Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung, Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Heft 26, Berlin, 1936.
- 2) C. M. White: The Equilibrium of Grains on the Bed of a Stream, Proc. Roy. Soc. A 174, 1940,

pp.322-338.

- 3) 栗原道徳： 限界掃流力に就いて，九州大学流体工学研究所報告，第4巻，第3号，昭.23.9，pp.1-26.
 4) Arthur T. Ippen and Ramjee P. Verma： The Motion of Discrete Particles along the Bed of a Turbulent Stream, Proc. Minnesota International Hydraulics Convention, Sep. 1953, pp.7-20.
 5) H. Lamb： Hydrodynamics, sixth edition, 1932, p.616.

(昭.31.8.31)



昭和31年12月25日印刷
 昭和31年12月31日発行

限界掃流力に関する基礎的研究
 土木学会論文集第41号

定価 150円 (〒10円)

著者 京都市左京区吉田本町京都大学工学部
 編集兼発行者 東京都千代田区大手町2丁目4番地
 印刷所 東京都港区赤坂溜池5番地

岩垣雄一
 土屋義人
 中川一美
 株式会社 技報堂

発行所 社団法人 土木学会 東京都千代田区大手町2丁目4番地
 電話(20) 3945・4078 振替東京 16828