

# 限界掃流力に関する基礎的研究

## (I) 限界掃流力の流体力学的研究

正員 岩 垣 雄 一\*

### (I) HYDRODYNAMICAL STUDY ON CRITICAL TRACTIVE FORCE

(Trans. of JSCE, No.41, December, 1956)

By Dr. Eng., Yūichi Iwagaki, C.E. Member

**Synopsis** The purpose of studies on the critical tractive force which have been carried out by many researchers since du Boys is mostly to create empirical formula by finding experimentally the relation between the diameter of sand grain and the critical velocity or the critical shearing stress on channel bottom. On the other hand, the theories on the mechanism of initiation of sand movement have been studied by only a few researchers, such as C. M. White (1940) and M. Kurihara (1948), in recent years.

C. M. White expressed the effect of turbulence by a factor named as the turbulence factor, and M. Kurihara explained by a skilful application of turbulence theory that the turbulence factor is a function of Reynolds Number with respect to roughness. Since Kurihara's theory, however, is difficult to understand, another theoretical analysis is attempted by the author in this paper, based on the idea and treatment different from Kurihara's theory.

The basic idea of the author's theory is to construct the equilibrium condition using the forces which are acting on a spherical sand grain, such as the gravity force, the fluid resistance and the resistance resulting from pressure gradient, and to evaluate these resistance considering the velocity fluctuation. In this process, the concepts of the mixing length of turbulence and the minimum scale of eddies in turbulence theory are utilized.

A dimensionless function of critical tractive force like as the function by Shields is derived by the analysis based on the idea described above, and an experimental constant named as the sheltering coefficient is introduced to this function so as to agree with the experimental results obtained with a small tunnel having a uniform and square cross-section.

On the basis of the experimental results and theoretical relationships, a new formula of critical tractive force is created and moreover compared with the empirical formulas proposed by many authorities.

**要 旨** 限界掃流力の研究は du Boys 以来多くの研究者たちによつて行われてきたが、その大部分は実験的に限界流速あるいは限界の掃流力と砂粒の平均径との関係を見出し、実験公式を作ることが目的であつた。これに対し、理論的に砂粒の移動開始の機構を明らかにしようとする研究は非常に少なく、近年では C. M. White (1940) および栗原博士 (1948) のものがあるに過ぎない。White は乱れ係数なる因子によつて乱れの効果を表現し、栗原博士はこの乱れ係数が粗度に関する Reynolds 数の函数となることを乱流理論を巧みに応用して説明された。しかし栗原博士の理論はかなり難解であるので、著者は栗原博士とは異なつた取扱い方によつて、別の限界掃流力に関する理論的解析を試みた。

著者の理論の基礎となつている考え方は、一つの球状の砂粒に作用する流体抵抗と圧力勾配による抵抗および重力とを用いて平衡条件を作り、これらの抵抗を速度変動を考慮して算出するものであつて、その過程において乱れの混合距離および最小渦の直径などの乱流理論における概念が用いられている。

このような考え方および取扱い方によつて解析した結果、Shields が示したと同様な無次元表示した限界掃流力函数が求められ、さらに遮蔽係数となづけられる一定の実験常数を導入することにより、実験結果とよく一致する関係が得られた。

実験は正方形一様断面の閉管路を用いて行なつたが、この実験結果と理論曲線とを基礎にして新しい実験公式

\* 工学博士、京都大学助教授、防災研究所

を作るとともに、従来の多くの実験公式と比較して批判を行なつた。

## 目 次

1. 序 論 2. 砂粒の移動開始 (1) 平衡条件 (2) $u_c^*d/\nu \leq u_c^*\delta_L/\nu$ の場合 (3) $u_c^*d/\nu \geq 51.1$ の場合 (4) $6.83 \leq u_c^*d/\nu \leq 51.1$ の場合 3. 限界掃流力の実験 (1) 実験装置と実験方法	(2) 実験結果 (3) 理論結果との比較 4. 実験公式 (1) 著者の実験公式 (2) 従来の実験公式 (3) 実験公式の比較と批判 (4) 混合砂礫の限界掃流力に関する考察 5. 結 論
---	---

### 1. 序 論

水が斜面上とか水路または河川などを流れると、その底面には流水によるせん断応力  $\tau_0$  が働く。底面が砂や礫などで構成されている場合には、そこに働くせん断応力が一定の限界値  $\tau_c$  以上になると、砂礫が移動を始める。なお底付近の流速は底面に作用するせん断応力と関係があるから、その流速がある限界の流速以上になると移動を始めるという表現の仕方をする場合もある。しかし、この問題を実際の水流に適用する場合、等流では水の密度  $\rho$ 、重力加速度  $g$ 、水深  $h$  および勾配  $J$  によつて底面せん断応力が簡単に  $\rho ghJ$  であらわされ(ただし二次元流)、また一般的には摩擦速度  $u^*$  で示すと  $\rho u^{*2}$  となるから、取扱ひ上、せん断応力で表現する方が流速で表現するよりも都合がよい。こうした意味から、限界せん断応力は限界掃流力とよばれ、もつぱらこの表現法が用いられてきたのである。

洪水時の掃流力が限界掃流力よりもはるかに大きいような河川に対しては、洪水時の流砂量とか河床の安定の問題には、限界掃流力はあまり重要ではない。しかし、平水時にその掃流力が限界に近い場合とか、洪水時でも河床砂礫が大きくて限界掃流力が洪水時の掃流力に近接している部分とか、貯水池の埋没機構の問題とか、あるいは水深の浅い薄層流のような場合などに対しては、この限界掃流力の問題が河床変動ないしは地面浸食において大きい役割を演ずることは明らかである。

限界掃流力の研究は古くから行われ、主として実験的に見出した限界掃流力と砂礫の粒径などとの関係に基づいて実験式を提案する方法がとられてきた。この現象には、砂礫の形、粒度分布、配列状態など力学的に取扱うことの困難な要素が混入し、また限界としてどのような状態を採用するかの問題も含まれて、実験値がかなり散乱し、提案された実験式も種々のものがある。しかし著者が入手できた多くの実験値をプロットしてみると、散乱はしているが明らかにある一定の関係が見出される。従つてこうした関係が力学的に説明され、それに基づいた実験式を作ることができれば、工学的には十分実用性をもつたものとなるであらう。

これまでの多くの研究のうちで、砂礫移動開始の機構を理論的に取り扱つたものは非常に少なく、近年では C. M. White<sup>1)</sup> および栗原博士<sup>2)</sup> のものがあるだけである。それ以前の 1936 年に、A. Shields は砂粒の密度  $\sigma$ 、水の密度  $\rho$ 、重力加速度  $g$  および砂粒の平均粒径  $d$  を用いて無次元表示した限界掃流力  $\tau_c/(\sigma - \rho)gd = u_c^*/\{(\sigma/\rho) - 1\}gd$  が、平均粒径と層流底層の厚さ  $\delta_L$  との比  $d/\delta_L$  またはそれと比例関係にある  $u_c^*d/\nu$  の函数であることを見出し、彼自からも実験を慎重に行つてこの事実を確かめている<sup>3)4)</sup>。この表現法が現在における最良の方法<sup>2)5)</sup>であることを考えると、その業績は最も高く評価すべきであらう。White は表面に突起している砂粒一つ一つが単位面積に働くせん断力(せん断応力)を単位面積当りの突起砂粒数で割つた値をそれぞれうけもつて平衡を保っているという考え方から、

$$u_c^*{}^2 / \left( \frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) gd = a \gamma \frac{\pi}{6} \tan \phi \dots \dots \dots (1.1)$$

の関係を導いた。ここに  $\gamma$  は(単位面積当りの突起砂粒数)  $\times d^2$  であつて、White はこれを Packing 係数と名づけた。そして流速が小さく、砂粒が完全に層流底層内に没している  $u_c^*d/\nu < 3.5$  の場合には、砂粒に働く力は粘性による摩擦抵抗のみで、その作用点は砂粒重心より上方にあるということから、(1.1)式の右辺には係数  $a$  が乗じてある。さらに動粘性係数  $\nu$  が  $1.6 \text{ cm}^2/\text{s}$  の潤滑油を用いて幅  $5.8 \text{ cm}$ 、長さ  $100 \text{ cm}$ 、勾配約  $1/28$  の水路を使用した場合と、水を用いて  $\tau_0$  が一定になるようなノズルを使用した場合の実験を行なつて、

$$u_c^{*2} \{ (\sigma/\rho) - 1 \} g d = 0.18 \tan \varphi \dots\dots\dots (1.2)$$

すなわち  $\alpha\eta=0.34$  なる関係を見出した。また  $u_c^* d/\nu > 3.5$  の場合には圧力差による形状抵抗が、砂粒に働く力として支配的となり、かつ作用点は砂粒重心を通るが、乱れによる変動速度のために  $u_c^* d/\nu < 3.5$  の場合よりはるかに砂粒が移動しやすくなるということから、(1.2) 式に対して

$$u_c^{*2} \left/ \left( \frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) \right. g d = \frac{0.18 \tan \varphi}{T_f} \dots\dots\dots (1.3)$$

の形にあらわし、 $T_f$  を Turbulence factor となすけた。そしてノズルを用いた場合  $T_f=2$ 、水路を用いた場合  $T_f=4$  となることを実験によつて見出した。White がこのような乱れによる効果を  $T_f$  で表現したのは注目すべきことであつて、Shields の表示も  $T_f$  が  $u_c^* d/\nu$  の函数であることを意味し、栗原博士の研究<sup>2)</sup>も  $T_f$  と  $u_c^* d/\nu$  の関係を乱流理論を用いて求めようとしたものに外ならない。

栗原博士は White の考え方と全く同様に、1粒の砂がうけもつせん断力を考え、そのせん断力として主流による時間的平均のせん断力に加えて、さらに乱れによるせん断力の増加を考慮した。この乱れによるせん断力の増大は、主流と直角水平方向の圧力変動と速度変動および主流方向の速度変動によるものを取扱い、それぞれを主流による平均せん断力とともにベクトルの的に合成した。この理論は Turbulence factor  $T_f$  が  $u_c^* d/\nu=25$  の付近で著しい極大を示すことを手掛りとして考察し、乱れの立場からこの現象を説明したもので、圧力変動によつて砂粒の断面の単位面積に働く力の自乗平均値の平方根が  $u_c^* d/\nu=25$  の付近で極大値をとるとする理論的結果がその支配的要因となつている。

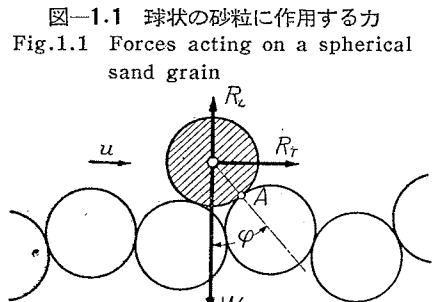
著者は、White や栗原博士が採用したような、粗面を構成している砂の各粒子がせん断力を受けもつていという考え方ではなく、粗面の上に載つている1粒の球状の砂が、それに及ぼす流体抵抗と圧力勾配による抵抗を受けもつて平衡を保つものとした。また流れは二次元的とし、鉛直方向と流れの方向の速度変動のみを取り扱い、流速分布として層流底層を考慮した対数法則式を用いた。その結果、 $u_c^{*2} \{ (\sigma/\rho) - 1 \} g d$  の値に極小値すなわち  $T_f$  に極大値があらわれるのは、乱れの影響を考えない砂粒の流体抵抗の効果が支配的で乱れの影響が少ないからであり、この現象が著者の取り扱つた考え方からも説明しうることを明らかにした。

さらに、これまでの多くの限界掃流力の実験は開水路によるものであるが、著者は閉管路における実験を試み、流速分布を測定して  $u_c^*$  を見出す方法をとつた。この方法はかなり良好な結果を与え、従来の開水路による多くの実験結果とよく似た傾向を示した。

最後に得られた理論と実験の結果を参照して実験公式を作り、これまでに提案された多くの公式と比較し、著者の実験公式が妥当なものであることを確かめ、さらに混合砂礫の場合についても考察を行つて、実験公式がこの場合にも適用されることを示した。

## 2. 砂粒の移動開始

(1) 平衡条件 いま 図—1.1 に示すように、粗面上に乗つている1粒の球状の砂粒(斜線のもの)を考え、その砂粒が動きはじめるための条件を取り扱うものとする。砂粒に作用する力としては、上述のように鉛直方向の圧力勾配による揚力  $R_L$ 、流れの方向の流体抵抗と圧力勾配による抵抗の和  $R_T$ 、および砂粒に働く重力  $W$  のみを考慮し、二次元的な流れを取り扱つた。いま 図—1.1 のように問題としている砂粒の中心とA点を結ぶ線が鉛直線となす角を  $\varphi$  とし、 $R_T$  の作用点はずねに砂粒の中心を通るものとすれば、力のツライイはA点の周りのモーメントを考えればよい。このような力関係を 図—1.2 に示すように、平面上におかれた球状の砂粒に模倣して



図—1.1 球状の砂粒に作用する力  
Fig.1.1 Forces acting on a spherical sand grain

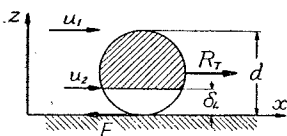
図—1.2 模倣化した力関係図 あらわすと、摩擦力  $F$  と  $R_T$  とのツライイになる。すなわち  
Fig.1.2 Schematic diagram of force relation

$$R_T = F \dots\dots\dots (1.3)$$

が成立する。ただし摩擦力  $F$  は

$$F = \{ (\sigma - \rho) g (\pi/6) d^3 - R_L \} \tan \varphi \dots\dots\dots (1.4)$$

とあらわされる。この場合  $\varphi$  は摩擦角と考えることができる。さてここで問題となるのは  $R_L$  と  $R_T$  である。いま 図—1.2 のように層流底層を考え、その厚さを  $\delta_L$  とし、この層内では速度変動はないものとする。 $R_T$  はさらに乱れた部分に働



く抵抗  $R_{Tt}$  と層流底層の部分に働く抵抗  $R_{Tl}$  とに分けて、

$$R_T = R_{Tt} + R_{Tl} \dots\dots\dots(1.5)$$

とあらわす。図-1.2において、乱れた部分(斜線の部分)の砂粒断面積を  $\beta_s(\pi/4)d^2$ 、層流底層の部分の断面積を  $(1-\beta_s)(\pi/4)d^2$  とし、 $R_{Tt}$  および  $R_{Tl}$  をそれぞれつぎのようにあらわした。

$$R_{Tt} = \frac{\rho}{2} C_{D1} u_1^2 \beta_s \frac{\pi}{4} d^2 - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_d \beta_s \frac{\pi}{4} d^2, \dots\dots\dots(1.6)$$

$$R_{Tl} = \frac{\rho}{2} C_{D2} u_2^2 (1-\beta_s) \frac{\pi}{4} d^2. \dots\dots\dots(1.7)$$

ただし、速度勾配のある場合の流体抵抗の取扱い方が明らかでないから、ここでは一応流速として乱れた部分に対しては  $z=d$  における  $x$  方向の流速  $u_1$  を、層流底層の部分に対しては  $z=\delta_L$  における流速  $u_2$  を採用した。また(1.6)式の右辺第2項は圧力勾配  $\partial p/\partial x$  による抵抗をあらわし<sup>9)</sup>、 $C_{D1}$  および  $C_{D2}$  はそれぞれ  $u_1$  および  $u_2$  に対応した抵抗係数である。なお粘性を省略するときは、

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{Du}{Dt}$$

の関係があるから、(1.6)式は

$$R_{Tt} = \frac{\rho}{2} C_{D1} u_1^2 \beta_s \frac{\pi}{4} d^2 + \rho \beta_s \frac{\pi}{4} d^3 \left( \frac{Du}{Dt} \right)_d \dots\dots\dots(1.6)'$$

とあらわすことができる。 $\beta_s$  および  $(1-\beta_s)$  と  $\delta_L/d$  との関係は図-1.3のとおりである。

また鉛直方向の圧力勾配による揚力  $R_L$  は

$\delta_L < \frac{d}{2}$  のとき、

$$R_L = -\frac{\pi}{4} d^2 (d - \delta_L) \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_d = -\frac{\pi}{4} d^2 (d - \delta_L) \left( \frac{Dw}{Dt} \right)_d, \dots\dots\dots(1.8)$$

$\delta_L > \frac{d}{2}$  のとき、

$$R_L = -S_2 (d - \delta_L) \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_d = \rho S_2 (d - \delta_L) \left( \frac{Dw}{Dt} \right)_d \dots\dots\dots(1.9)$$

とあらわされるものとする。ここに  $S_2$  は  $z=\delta_L$  の面で砂粒をきつたときの砂粒の断面積で、

$$S_2 = \pi \delta_L (d - \delta_L)$$

となる。また  $w$  は  $z$  方向の流速である。

(2)  $u_c^* d/\nu \leq u_c^* \delta_L/\nu$  の場合 砂粒が層流底層内に完全に入ってしまう場合、すなわち  $u_c^* d/\nu \leq u_c^* \delta_L/\nu$  の場合には、 $R_L=0$  および  $R_{Tt}=0$  で  $\beta_s=0$  であるから、流速として砂粒の上端における値  $u_1$  をとれば、

$$R_T = R_{Tl} = (\rho/8) C_{D1} u_1^2 \pi d^2$$

図-1.4 球の抵抗係数  $C_D$  と Reynolds 数  $ud/\nu$  との関係  
Fig.1.4 Relation between drag coefficient  $C_D$  of sphere and Reynolds Number  $u_d/\nu$

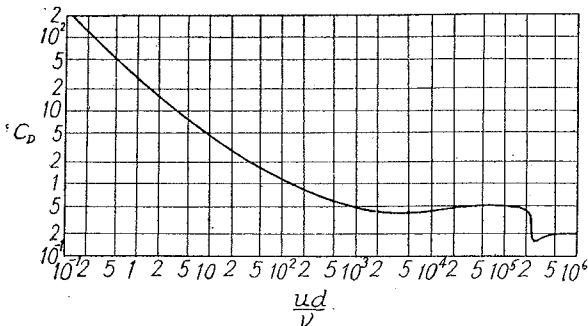
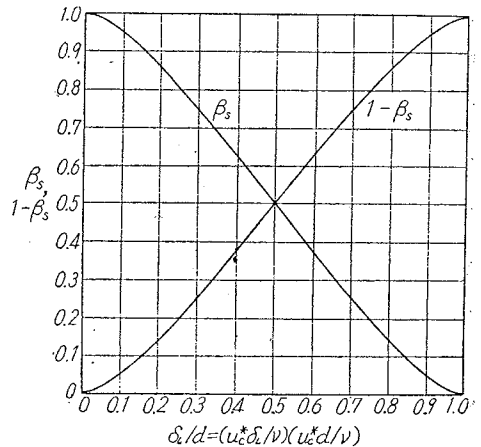


図-1.3  $\beta_s$  および  $(1-\beta_s)$  と  $\delta_L/d$  との関係  
Fig.1.3 Relation between  $\beta_s, (1-\beta_s)$  and  $\delta_L/d$



となる。一方、層流底層における流速分布は、 $u=u^*(u^*z/\nu)$  であるから  $u_1=u_c^*(u_c^*d/\nu)$  となり、従つて(1.3)式の平衡条件式から、

$$\frac{\rho}{8} \pi d^2 C_{D1} \left( \frac{u_c^* d}{\nu} \right)^2 u_c^{*2} = (\sigma - \rho) g \frac{\pi}{6} d^3 \tan \varphi$$

が成立し、これを変形して

$$\frac{u_c^{*2}}{\{(\sigma/\rho) - 1\} g d \tan \varphi} = \frac{1}{(3/4) C_{D1} (u_c^* d/\nu)^2} \dots\dots\dots(1.10)$$

の関係式が得られる。抵抗係数  $C_{D1}$  としては、図-1.4によつて示される球の抵抗係数に関する実験値を用いると、Reynolds 数の函数となる。さらに Reynolds 数  $u_d/\nu$  は

$$\frac{u_1 d}{\nu} = \frac{u_c^* d}{\nu} \cdot \frac{u_1}{u_c^*} = \left( \frac{u_c^* d}{\nu} \right)^2 \dots\dots\dots (1.11)$$

と変形されるから、結局  $C_{D1}$  は  $u_c^* d/\nu$  の函数となり、従つて (1.10) 式の右辺もまた  $u_c^* d/\nu$  の函数によつてあらわされることになる。

層流底層の厚さを無次元表示した  $u^* \delta_L/\nu$  の値は 6.83 であるから<sup>7)</sup>、(1.10) 式の適用範囲は  $u_c^* d/\nu \leq 6.83$  とする。すなわち

$$\frac{u_c^* d}{\nu} \leq 6.83; \frac{u_c^{*2}}{\{(\sigma/\rho) - 1\}gd \tan \varphi} = \frac{1}{\Psi_1(u_c^* d/\nu)} \dots\dots\dots (1.12)$$

ただし

$$\Psi_1(u_c^* d/\nu) = (3/4)C_{D1}(u_c^* d/\nu)^2 \dots\dots\dots (1.13)$$

(3)  $u_c^* d/\nu \geq 5.11$  の場合 この場合には層流底層は完全に消滅し、 $\delta_L = 0$  となる<sup>8)</sup>。従つて  $\beta_s = 1$  となるから、 $R_T$  および  $R_L$  はつぎのようにあらわされる。

$$R_T = R_{Tt} = \frac{\rho}{8} C_{D1} u_1^2 \pi d^2 + \frac{\rho}{4} \pi d^3 \left( \frac{Du}{Dt} \right)_d \dots\dots\dots (1.14)$$

$$R_L = \frac{\rho}{4} \pi d^3 \left( \frac{Dw}{Dt} \right)_d \dots\dots\dots (1.15)$$

(i)  $Du/Dt$  の計算： 加速度は

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

であるから、いま  $u = \bar{u} + u'$ 、 $w = w'$  とおけば、上式は

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \dots\dots\dots (1.16)$$

となる。いま乱れた流れの統計的平均を考えるものとするが、(1.16) 式の各項のうちで  $\partial u'/\partial t$  の項は取扱えないので、それ以外の項のみを考えることにする。このことは、G. I. Taylor<sup>9)</sup> が等方性乱流における圧力勾配の変動の平均値を導いたとき、 $\partial/\partial t$  の項を省略しているのと同じ意味である。そうすれば (1.16) 式はつぎのような統計的平均をとることになる。

$$\frac{Du}{Dt} = \bar{u} \sqrt{\left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + \sqrt{w'^2} \sqrt{\left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + \sqrt{w'^2} \frac{d\bar{u}}{dz} + \sqrt{w'^2} \sqrt{\left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2} \dots\dots\dots (1.17)$$

この場合上式で右辺の第2項および第4項は、実際にはそれぞれ  $u'$  と  $\partial u'/\partial x$  および  $w'$  と  $\partial u'/\partial z$  の相関を考慮しなければならないが、ここではそれらの間の相関を無視して (1.17) 式のようにあらわし、order は (1.17) 式のものと同じ大きさをもつものと仮定する。

いま 図-1.5 に示すように底面に平行な直線上に2点を取り、2点間の距離を  $x$ 、各点の  $x$  方向の変動速度をそれぞれ  $u'$  および  $u'_x$  とする。連続運動を考え、 $u'_x$  を Taylor 級数に展開し、

$$\text{さらに } \overline{u'(\partial u'/\partial x)} = 0, \quad \overline{u'(\partial^2 u'/\partial x^2)} + \overline{(\partial u'/\partial x)^2} = 0, \dots\dots\dots$$

を考慮すれば、 $u'$  と  $u'_x$  との間の相関係数  $R_{xx}$  は

$$R_{xx} = \frac{\overline{u'u'_x}}{u'^2} = 1 - \frac{1}{2!} \frac{x^2}{u'^2} \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + \dots\dots\dots$$

とあらわされ、 $x$  の十分小さいときは、

$$\left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 = 2u'^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - R_{xx}}{x^2} \right) = \frac{2u'^2}{\lambda_{xx}^2} \dots\dots\dots (1.18)$$

とかくことができる。ここに  $\lambda_{xx}$  は乱れの最小渦の直径で

$$\frac{1}{\lambda_{xx}^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - R_{xx}}{x^2} \dots\dots\dots (1.19)$$

と定義される。

また 図-1.6 に示すように底面に垂直な直線上に2点を取り、2点間の距離を  $z$ 、各点の  $x$  方向の変動速度を  $u'$  および  $u'_z$  とし、 $u'_z$  を Taylor 級数に展開することにより、 $\overline{u'u'_z}$  はつぎのようにあらわされる。

図-1.5 変動速度  $u'$  および  $u'_x$  の説明図

Fig.1.5 Definition sketch for fluctuating velocities  $u'$  and  $u'_x$

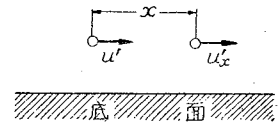
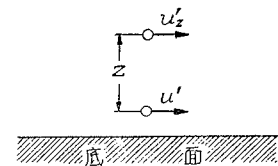


図-1.6 変動速度  $u'$  および  $u'_z$  の説明図

Fig.1.6 Definition sketch for fluctuating velocities  $u'$  and  $u'_z$



$$\overline{u'u_z'} = \overline{u'^2} + z \left( \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial z}} \right) + \frac{z^2}{2!} \left( \overline{u' \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}} \right) + \dots \quad (1.20)$$

さらに、 $\overline{u'(\partial u'/\partial z)} = (1/2) \overline{(\partial u'^2/\partial z)} = (1/2) (\partial \overline{u'^2}/\partial z)$  およびこれを  $z$  について微分した

$$\overline{u'(\partial^2 u'/\partial z^2)} + \overline{(\partial u'/\partial z)^2} = (1/2) (\partial^2 \overline{u'^2}/\partial z^2)$$

の関係をいれれば、(1.20) 式は

$$\overline{u'u_z'} = \overline{u'^2} + \frac{z}{2} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial z} + \frac{z^2}{4} \frac{\partial^2 \overline{u'^2}}{\partial z^2} - \frac{z^2}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 + \dots \quad (1.20')$$

となる。同様に  $\overline{u'^2 u_z'^2}$  を求めると、

$$\overline{u'^2 u_z'^2} = (\overline{u'^2})^2 + \frac{z}{2} \frac{\partial (\overline{u'^2})^2}{\partial z} + \frac{z^2}{4} \frac{\partial^2 (\overline{u'^2})^2}{\partial z^2} - \frac{z^2}{2} \left( \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial z} \right)^2 + \dots \quad (1.21)$$

が得られ、(1.20') 式と (1.21) 式から相関係数  $R_{xz}$  を求めると、

$$R_{xz} = \frac{\overline{u'u_z'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{u_z'^2}}} = 1 - \frac{z^2}{2 \overline{u'^2}} \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 + \frac{z^2}{8 (\overline{u'^2})^2} \left( \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial z} \right)^2 + \dots \quad (1.22)$$

となり、最小渦の直径

$$\frac{1}{\lambda_{xz}^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - R_{xz}}{z^2} \quad (1.23)$$

を用いれば、つぎの関係が得られる。

$$\left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 = \frac{2 \overline{u'^2}}{\lambda_{xz}^2} + \frac{1}{4} \frac{(\partial \overline{u'^2}/\partial z)^2}{\overline{u'^2}} \quad (1.24)$$

従つて (1.17) 式は (1.18) 式および (1.24) 式を用いてつぎのように変形される。

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\sqrt{2} \bar{u} \sqrt{\overline{u'^2}}}{\lambda_{xx}} + \frac{\sqrt{2} u'^2}{\lambda_{xx}} + \sqrt{\overline{w'^2}} \frac{d\bar{u}}{dz} + \sqrt{\frac{\overline{w'^2}}{u'^2}} \sqrt{\frac{2(\overline{u'^2})^2}{\lambda_{xz}^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial z} \right)^2} \quad (1.25)$$

(ii)  $Dw/Dt$  の計算:  $w = w'$  であるから、 $Dw/Dt$  は

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} + u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} \quad (1.26)$$

となり、前と同様に  $\partial w'/\partial t$  項を省略して統計的平均をとると、

$$\frac{Dw}{Dt} = \bar{u} \sqrt{\left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2} + \sqrt{\overline{w'^2}} \sqrt{\left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \quad (1.27)$$

とあらわされる。(1.27) 式の右辺第2項は  $u'$  と  $\partial w'/\partial x$  の相関を考慮する必要があるが、ここでは (1.17) 式の場合と同様に相関はないものと考えて取り扱つてある。いま 図-1.7 に示すように、底面に平行な直線上に2点を取り、2点間の距離を  $x$ 、各点の  $z$  方向の変動速度を  $w'$  および  $w_x'$  とする。 $w_x'$  を Taylor 級数に展開し、かつ  $\overline{w'(\partial w'/\partial x)} = 0$ 、 $\overline{w'(\partial^2 w'/\partial x^2)} + \overline{(\partial w'/\partial x)^2} = 0, \dots$  なることを考慮すれば、相関係数  $R_{zx}$  は

$$R_{zx} = 1 - \frac{x^2}{2!} \frac{1}{\overline{w'^2}} \left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \dots \quad (1.28)$$

となり、最小渦の直径

$$\frac{1}{\lambda_{zx}^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - R_{zx}}{x^2} \quad (1.29)$$

を用いれば、(1.28) 式から

$$\left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 = \frac{2 \overline{w'^2}}{\lambda_{zx}^2} \quad (1.30)$$

が得られる。従つて (1.30) 式を用いて (1.27) 式はつぎのようになる。

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\sqrt{2} \bar{u} \sqrt{\overline{w'^2}}}{\lambda_{zx}} + \frac{\sqrt{2} \sqrt{\overline{w'^2}} \sqrt{\overline{w'^2}}}{\lambda_{zx}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \quad (1.31)$$

(iii)  $(Du/Dt)_d$  および  $(Dw/Dt)_d$  の計算: (1.25) 式および (1.31) 式をさらに計算するには、 $\bar{u}$ 、 $\overline{u'^2}$ 、 $\overline{w'^2}$ 、 $\lambda_{xx}$ 、 $\lambda_{xz}$  および  $\lambda_{zx}$  などが底面付近ではいかなる垂直分布をしているかを知らねばならない。Prandtl の運動量輸送理論より、 $d\bar{u}/dz$  は

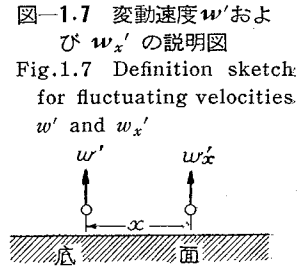


図-1.7 変動速度  $w'$  および  $w_x'$  の説明図  
Fig.1.7 Definition sketch for fluctuating velocities  $w'$  and  $w_x'$

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{\sqrt{4l^2u^{*2} + \nu^2}}{2l^2} - \frac{\nu}{2l^2} \quad (1.32)$$

であらわされ<sup>8)</sup>,  $\delta_L=0$  すなわち  $u_c^*d/\nu \geq 51.1$  の場合には  $z \geq d$  に対して,

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u^*}{l} \quad (1.33)$$

としてよい。従つて (1.33) 式から導かれる  $\bar{u}$  は, 積分常数を実験結果から決めて,

$$\bar{u} = u^* \{8.5 + 5.75 \log_{10}(z/d)\} \quad (1.34)$$

となる。また運動量輸送理論から  $\sqrt{u'^2}$  および  $\sqrt{w'^2}$  は, それぞれ

$$\sqrt{u'^2} = L_1(d\bar{u}/dz), \quad (1.35)$$

$$\sqrt{w'^2} = L_2(d\bar{u}/dz) \quad (1.36)$$

とおくことができ, (1.33) 式から

$$\sqrt{u'^2} = u^*(L_1/l), \quad (1.35)'$$

$$\sqrt{w'^2} = u^*(L_2/l) \quad (1.36)'$$

となる。さらに Reichardt の実験<sup>10)11)</sup>によると, 壁面近くでは  $\sqrt{u'^2} \approx 2\sqrt{w'^2}$ ,  $\sqrt{w'^2} \approx \sqrt{-u'w'}$  の関係が見られるから,  $L_1 \approx 2L_2$ ,  $L_2 \approx l$  としてよいであろう。従つて, (1.35)' 式および (1.36)' 式はそれぞれ

$$\sqrt{u'^2} \approx 2u^*, \quad (1.35)''$$

$$\sqrt{w'^2} \approx u^* \quad (1.36)''$$

となる。

つぎに  $\lambda_{xx}, \lambda_{xz}$  および  $\lambda_{zx}$  の関係であるが, いまこれらの間の関係について等方性乱流の理論が適用されるものとするれば,

$$\lambda_{xx} = \sqrt{2}\lambda_{xz} = \sqrt{2}\lambda_{zx} \quad (1.37)$$

となる<sup>12)</sup>。また Prandtl および Reichardt の実験を Taylor が解析して得た  $\lambda_{xz}$  の分布は 図-1.8 に示すようであるが, とくに壁近くでは直線分布をなすものとみなし, 比例常数を 5.0 としよう。内田博士<sup>6)</sup>はこの値を 1.8 としたが, 壁面近くでは小さすぎるように思われるし, また 5.0 を採用すると後述するように限界掃流力の実験結果とよく一致する。さらに Rotta<sup>7)</sup> が粗面の場合の混合距離  $l$  の分布として用いた関係式

$$l = l_0 + 0.4z \quad (1.38)$$

と同じ形を最小渦の直径にも適用し,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{xx} &= \sqrt{2}(\lambda_0 + 5z), \\ \lambda_{xz} &= \lambda_0 + 5z, \\ \lambda_{zx} &= \lambda_0 + 5z \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

と仮定する。ここに  $l_0$  および  $\lambda_0$  はそれぞれ混合距離および最小渦の直径の底面粗度による増加量である。

以上 (1.33), (1.34), (1.35)'', (1.36)'', (1.38) および (1.39) の諸式を用いると, (1.25) 式および (1.31) 式はつぎのようになる。

$$\frac{Du}{Dt} = u^{*2} \left[ \frac{2(8.5 + 5.75 \log_{10} z/d)}{\lambda_0 + 5z} + \frac{4}{\lambda_0 + 5z} + \frac{1}{l_0 + 0.4z} + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_0 + 5z} \right], \quad (1.40)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = u^{*2} \left[ \frac{\sqrt{2}(8.5 + 5.75 \log_{10} z/d)}{\lambda_0 + 5z} + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_0 + 5z} \right]. \quad (1.41)$$

従つて  $z=d$  における値  $(Du/Dt)_d$  および  $(Dw/Dt)_d$  はそれぞれ

$$\left( \frac{Du}{Dt} \right)_d = u^{*2} \left( \frac{23.8}{\lambda_0 + 5d} + \frac{1}{l_0 + 0.4d} \right), \quad (1.42)$$

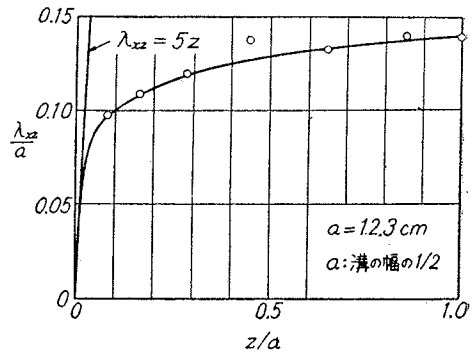
$$\left( \frac{Dw}{Dt} \right)_d = \frac{14.84 u^{*2}}{\lambda_0 + 5d} \quad (1.43)$$

となる。

(iv) 平衡条件の計算:  $(Du/Dt)_d$  および  $(Dw/Dt)_d$  が (1.42), (1.43) の両式で与えられると, (1.3), (1.4), (1.14) および (1.15) の諸式を用いて, 平衡条件を計算することができる。この場合, (1.14) 式の  $u_1$  が

図-1.8 最小渦の直径の分布

Fig.1.8 Distribution of the minimum scale of eddies



$u_1 = (\bar{u} + \sqrt{u'^2})_d$  であらわされるとすれば,  $u_1 = 8.5 u^* + 2 u^* = 10.5 u^*$  となるから,

$$R_T = \frac{10.5^2}{8} \rho C_{D1} \pi d^2 u^{*2} + \frac{\rho}{4} \pi d^3 u^{*2} \left( \frac{23.8}{\lambda_0 + 5d} + \frac{1}{l_0 + 0.4d} \right) \dots\dots\dots(1.44)$$

となり, (1.15) 式から

$$R_L = \frac{\rho}{4} \pi d^3 \frac{14.84 u^{*2}}{\lambda_0 + 5d} \dots\dots\dots(1.45)$$

とあらわされる。従つて (1.4) 式は

$$F = (\sigma - \rho) g - \frac{3}{2} \rho \frac{14.84 u^{*2}}{\lambda_0 + 5d} \left\} \frac{\pi}{6} d^3 \tan \varphi \dots\dots\dots(1.46)$$

となるから, (1.3) 式の  $R_T = F$  という平衡条件式より, つぎの関係が得られる。

$$\frac{u_c^* d}{\nu} \geq 51.1; \quad \frac{u_c^*}{\{(\sigma/\rho) - 1\} g d \tan \varphi} = \frac{1}{\Psi_3} \dots\dots\dots(1.47)$$

ここに,

$$\Psi_3 = \frac{22.26(u_c^* d/\nu)}{(u_c^* \lambda_0/\nu) + 5(u_c^* d/\nu)} \tan \varphi + 82.8 C_{D1} + \frac{35.7(u_c^* d/\nu)}{(u_c^* \lambda_0/\nu) + 5(u_c^* d/\nu)} + \frac{1.5(u_c^* d/\nu)}{(u_c^* l_0/\nu) + 0.4(u_c^* d/\nu)} \dots\dots\dots(1.48)$$

(1.48) 式の右辺第1項は揚力による項, 第2項は流体抵抗による項であり, 第3および第4項は  $x$  方向の圧力勾配による項である。

さてこの式に含まれる  $u_c^* l_0/\nu$  は図-1.9に示すように  $u_c^* d/\nu$  の函数であつて<sup>7)8)</sup>,  $u_c^* d/\nu = 51.1$  のとき  $u_c^* l_0/\nu = 0$  で,  $u_c^* d/\nu$  とともに大体直線的に増大する。一方  $u_c^* \lambda_0/\nu$  と  $u_c^* d/\nu$  との関係は明らかでないが, ここでは  $u_c^* l_0/\nu$  の場合と全く同じ関係が成立すると仮定する。また Reynolds 数  $R_e$  は

$$R_e = (\bar{u} d/\nu)_d = (u_c^* d/\nu) (\bar{u}/u_c^*)_d = 8.5 u_c^* d/\nu$$

と変形されるから,  $u_c^* d/\nu$  の値が与えられると, 図-1.4 から  $C_{D1}$  の値が求められ,  $\tan \varphi$  は実験結果から 1.0 を採用する。

従つて結局  $\Psi_3$ , すなわち (1.47) の右辺は  $u_c^* d/\nu$  のみの函数となるわけである。

(4)  $6.83 \leq u_c^* d/\nu \leq 51.1$  の場合 この場合には砂粒は一部層流底層外へ露出するから,  $R_T$  および  $R_L$  はそれぞれつぎのようになる。

$$R_T = \frac{\rho}{2} C_{D1} u_1^2 \beta_s \frac{\pi}{4} d^2 + \rho \beta_s \frac{\pi}{4} d^3 \left( \frac{Du}{Dt} \right)_d + \frac{\rho}{2} C_{D2} u_2^2 (1 - \beta_s) \frac{\pi}{4} d^2, \dots\dots\dots(1.49)$$

$$R_L = \rho \pi d^3 S \left( \frac{Dw}{Dt} \right)_d \dots\dots\dots(1.50)$$

ただし,  $\left. \begin{aligned} \delta_L \leq d/2; \quad S = (1/4)(1 - \delta_L/d) \\ \delta_L \geq d/2; \quad S = (\delta_L/d)(1 - \delta_L/d)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.51)$

(i)  $(Du/Dt)_d$  および  $(Dw/Dt)_d$  の計算:  $Du/Dt$  および  $Dw/Dt$  は (1.25) 式および (1.31) 式で与えられるから,  $(Du/Dt)_d$  および  $(Dw/Dt)_d$  を計算するには,  $\bar{u}, \bar{u}^2, \bar{w}^2, \lambda_{xx}, \lambda_{zz}$  および  $\lambda_{zx}$  などが層流底層が存在する場合にいかなる垂直分布をしているかを知る必要がある。

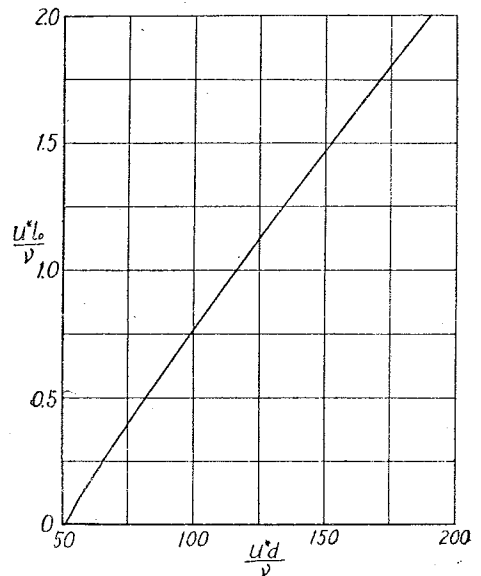
$d\bar{u}/dz$  は (1.32) 式で与えられ, これから流速分布式として次式が得られる。

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{0.4 \xi} \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{4}} \right) + 2.5 \log_e \left( 2 \xi + 2 \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{4}} \right) + \frac{u^* \delta_L}{\nu} \dots\dots\dots(1.52)$$

ただし  $\xi = u^* l/\nu$ .

$\bar{u}^2$  および  $\bar{w}^2$  はやはりこの場合でも (1.35) 式および (1.36) 式が成立するものとすれば,  $L_1 = 2 L_2, L_2 = l$

図-1.9  $u^* l_0/\nu$  と  $u^* d/\nu$  との関係  
Fig.1.9 Relation between  $u^* l_0/\nu$  and  $u^* d/\nu$



限界を取り扱う場合には  $u^*$  を  $u_c^*$  とする



の関係から,

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{u'^2} &= u^*(\sqrt{4\xi^2+1}-1)/\xi, \\ \sqrt{w'^2} &= u^*(\sqrt{4\xi^2+1}-1)/2\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.53)$$

が得られる。混合距離の分布としては

$$l=0.4(z-\delta_L) \dots\dots\dots(1.54)$$

を採用し、また最小渦の直径に対してもつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{xx} &= 5\sqrt{2}(z-\delta_L), \\ \lambda_{xz} &= 5(z-\delta_L), \\ \lambda_{zz} &= 5(z-\delta_L). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.55)$$

以上の関係式から (1.25) 式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{u^{*2}(\sqrt{4\xi^2+1}-1)}{(z-\delta_L)\xi} \left\{ \frac{1}{2} \log_e(2\xi+\sqrt{4\xi^2+1}) - \frac{1}{4\xi}(\sqrt{4\xi^2+1}-1) + 0.2 \frac{u^*\delta_L}{\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\sqrt{4\xi^2+1}-1)}{\xi} \left( 0.825 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{25} + \frac{1}{4\xi^2+1}} \right) \right\} \dots\dots\dots(1.56) \end{aligned}$$

従つて  $(Du/Dt)_d$  の値は

$$\begin{aligned} \left( \frac{Du}{Dt} \right)_d &= \frac{u^{*2}(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1)}{(d-\delta_L)\xi_1} \left\{ \frac{1}{2} \log_e(2\xi_1+\sqrt{4\xi_1^2+1}) - \frac{1}{4\xi_1}(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) \right. \\ &\quad \left. + 0.2 \frac{u^*\delta_L}{\nu} + \frac{(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1)}{\xi_1} \left( 0.825 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{25} + \frac{1}{4\xi_1^2+1}} \right) \right\} \dots\dots\dots(1.57) \end{aligned}$$

ただし  
となる。

$$\xi_1 = (u^*l/\nu)_d = 0.4(u^*d/\nu) - 0.4(u^*\delta_L/\nu) \dots\dots\dots(1.58)$$

同様にして (1.31) 式から (1.51)~(1.55) の諸式を用いて  $(Dw/Dt)_d$  を計算すれば、つぎの式が得られる。

$$\begin{aligned} \left( \frac{Dw}{Dt} \right)_d &= \frac{u^{*2}(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1)}{(d-\delta_L)\xi_1} \left\{ 0.354 \log_e(2\xi_1+\sqrt{4\xi_1^2+1}) - \frac{0.177}{\xi_1}(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) \right. \\ &\quad \left. + 0.1414 \frac{u^*\delta_L}{\nu} + \frac{(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1)}{\xi_1} \left( 0.1414 + \frac{1}{4\sqrt{4\xi_1^2+1}} \right) \right\} \dots\dots\dots(1.59) \end{aligned}$$

(ii) 平衡条件の計算:  $(Du/Dt)_d$  および  $(Dw/Dt)_d$  がそれぞれ (1.57) 式および (1.59) 式で与えられると、(3) の場合と同様に平衡条件を計算することができる。この場合 (1.14) 式の  $u_1$  をやはり  $u_1 = (\bar{u} + \sqrt{u'^2})_d$  とあらわせば、(1.52) 式および (1.53) 式を用いて

$$u_1 = u^* \{ 2.5 \log_e(2\xi_1 + \sqrt{4\xi_1^2+1}) - (0.25/\xi_1)(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) + (u^*\delta_L/\nu) \}$$

となり、また  $u_2$  は

$$u_2 = u^*(u^*\delta_L/\nu)$$

とあらわされる。従つて平衡条件より、つぎの関係式が得られる。

$$6.83 \leq \frac{u_c^*d}{\nu} \leq 51.1; \quad \frac{u_c^{*2}}{\{(\sigma/\rho)-1\}gd \tan \varphi} = \frac{1}{\Psi_2} \dots\dots\dots(1.60)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \left\{ 6S \tan \varphi (\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) \left/ \left( 1 - \frac{u_c^*\delta_L/\nu}{u_c^*d/\nu} \right) \xi_1 \right\} \left\{ 0.354 \log_e(2\xi_1+\sqrt{4\xi_1^2+1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{0.177}{\xi_1}(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) + 0.1414 \frac{u_c^*\delta_L}{\nu} + \frac{(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1)}{\xi_1} \left( 0.1414 + \frac{1}{4\sqrt{4\xi_1^2+1}} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{3}{4} C_{D1} \beta_s \left\{ 2.5 \log_e(2\xi_1+\sqrt{4\xi_1^2+1}) - \frac{0.25}{\xi_1}(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) + \frac{u_c^*\delta_L}{\nu} \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ 3\beta_s (\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) \left/ 2 \left( 1 - \frac{u_c^*d/\nu}{u_c^*d/\nu} \right) \xi_1 \right\} \left\{ \frac{1}{2} \log_e(2\xi_1+\sqrt{4\xi_1^2+1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\xi_1}(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1) + 0.2 \frac{u_c^*\delta_L}{\nu} + \frac{(\sqrt{4\xi_1^2+1}-1)}{\xi_1} \left( 0.825 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{25} + \frac{1}{4\xi_1^2+1}} \right) \right\} \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} C_{D2} (1-\beta_s) \left( \frac{u_c^*\delta_L}{\nu} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots(1.61) \end{aligned}$$

この (1.61) 式に含まれるものは、 $u_c^*d/\nu$  を除くと、 $S$ ,  $\tan \varphi$ ,  $u_c^*\delta_L/\nu$ ,  $\xi_1$ ,  $C_{D1}$ ,  $\beta_s$  および  $C_{D2}$  であるが、 $\tan \varphi$  以外はいずれもつぎに述べるようにすべて  $u_c^*d/\nu$  の関数である。すなわち、

1.  $u_c^* \delta_L / \nu$  は図-1.10で示されるように  $u_c^* d / \nu$  の函数である。この図は幅40cm, 深さ19cm, 長さ18m (直線区間10m)の矩形断面木製水樋によつて得られた, 自由表面の影響の小さい Froude 数が1~2の範囲の粗面(粒径  $d$  の一様な砂粒を底面にニス付けしたもの)に対する実験の結果から, Rotta<sup>7)</sup> の理論にもとづいて求められた関係である。実験結果は Nikuradse 型でなく,  $A_r = (\bar{u} / u_c^*) - 5.75 \log_{10}(z/d) = 8.5 = \text{const.}$  から求められた曲線の方に一致するので, この曲線を用いることにする。

2.  $S$  は (1.51) 式で示されるもので,  $\delta_L / d$  が  $(u_c^* \delta_L / \nu) / (u_c^* d / \nu)$  と変形されるから, 結局  $S$  は  $u_c^* d / \nu$  のみの函数となる。

3.  $\tan \varphi$  は (3) の場合と同様に 1.0 を用いる。

4.  $\beta_s$  は 図-1.3 で与えられ,  $\delta_L / d$  の函数であるから,  $u_c^* d / \nu$  のみの函数となる。

5.  $\xi_1$  は (1.58) 式で与えられるもので, これも結局  $u_c^* d / \nu$  の函数となる。

6.  $C_{D1}$  は 図-1.4 に示されるように Reynolds 数の函数であるが,

$$\frac{\bar{u}_1 d}{\nu} = \frac{u_c^* d}{\nu} \frac{\bar{u}_1}{u_c^*} = \frac{u_c^* d}{\nu} \left\{ 2.5 \log_e (2 \xi_1 + \sqrt{4 \xi_1^2 + 1}) - \frac{1}{0.8 \xi_1} (\sqrt{4 \xi_1^2 + 1} - 1) + \frac{u_c^* \delta_L}{\nu} \right\}$$

と変形されるから,  $C_{D1}$  は  $u_c^* d / \nu$  の函数となる。

7.  $C_{D2}$  は  $C_{D1}$  と同様に Reynolds 数の函数であつて, 図-1.4 によつて与えられるが,

$$\frac{\bar{u}_2 d}{\nu} = \frac{u_c^* d}{\nu} \frac{\bar{u}_2}{u_c^*} = \frac{u_c^* d}{\nu} \frac{u_c^* \delta_L}{\nu}$$

と変形され,  $u_c^* d / \nu$  の函数となる。

要するに  $\Psi_2$  は  $u_c^* d / \nu$  のみの函数となり, (1.60) 式の右辺は  $u_c^* d / \nu$  の函数として示すことができるわけである。

以上の理論式を総合すると, 限界掃流力は無次元表示されて,

$$\frac{u_c^{*2}}{\{(\sigma/\rho) - 1\} g d \tan \varphi} = \frac{1}{\Psi(u_c^* d / \nu)} \dots \dots \dots (1.62)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} u_c^* d / \nu \leq 6.83; & \Psi(u_c^* d / \nu) = \Psi_1, \\ 6.83 \leq u_c^* d / \nu \leq 51.1; & \Psi(u_c^* d / \nu) = \Psi_2, \\ u_c^* d / \nu \geq 51.1; & \Psi(u_c^* d / \nu) = \Psi_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.63)$$

となり,  $\Psi_1, \Psi_2$  および  $\Psi_3$  はそれぞれ (1.13) 式, (1.61) 式および (1.48) 式で与えられる。これらの諸式を計算して  $u_c^{*2} \{(\sigma/\rho) - 1\} g d \tan \varphi$  と  $u_c^* d / \nu$  との関係を示したのが 図-1.11 である。図において, 1の曲線

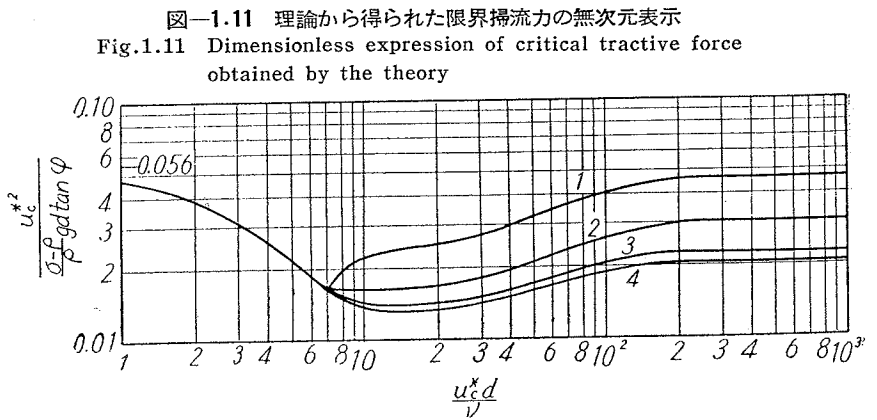
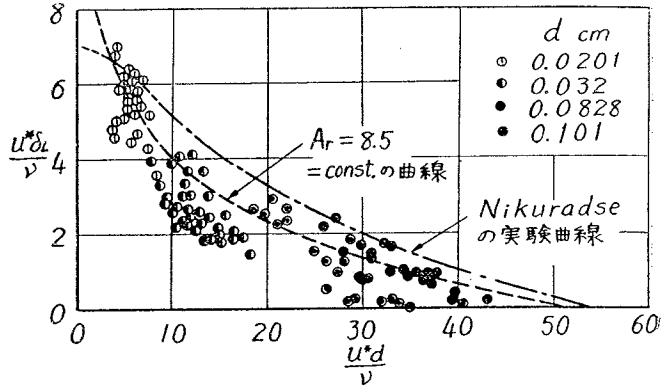


図-1.10  $u_c^* \delta_L / \nu$  と  $u_c^* d / \nu$  との関係  
Fig.1.10 Relation between  $u_c^* \delta_L / \nu$  and  $u_c^* d / \nu$



限界を取り扱う場合には  $u_c^*$  を  $u_c$  とする

によつてのみ砂が動くとした場合、2の曲線は $\bar{u}$ にさらに $\sqrt{u'^2}$ を加えた流速による流体抵抗を考えた場合、3の曲線は2にさらに $x$ 方向の圧力勾配による抵抗を加えた場合、4の曲線はさらに $z$ 方向の圧力勾配すなわち揚力の効果をも考えすべての影響を加算した場合であつて、この図から乱れによる揚力の効果が他に較べて小さいことがわかるはずである。

なお  $u_c^*d/\nu$  の値が1よりさらに小さくなると、 $u_c^*/[\{(\sigma/\rho)-1\}gd \tan \varphi]$  の値は0.056に近ずき、 $C_{D1}$  の値が  $24/(u_c^*d/\nu)$  に等しいという Stokes の法則が適用されるようになると一定値 0.056 となる。

### 3. 限界掃流力の実験

限界掃流力の実験はこれまで多くの人人によつて行われ、小は 0.015 cm から大は 45 mm に至る平均粒径の砂礫に対する数多くの資料が得られている。しかし実験は White<sup>1)</sup> がノズルを用いた場合を除けば、すべて開水路を用いて行なつたもので、水深  $h$  と勾配  $J$  を測定して  $\tau = \rho gh J$  の関係から  $\tau_c$  を求めるか、平均流速  $u_m$  を測定して、

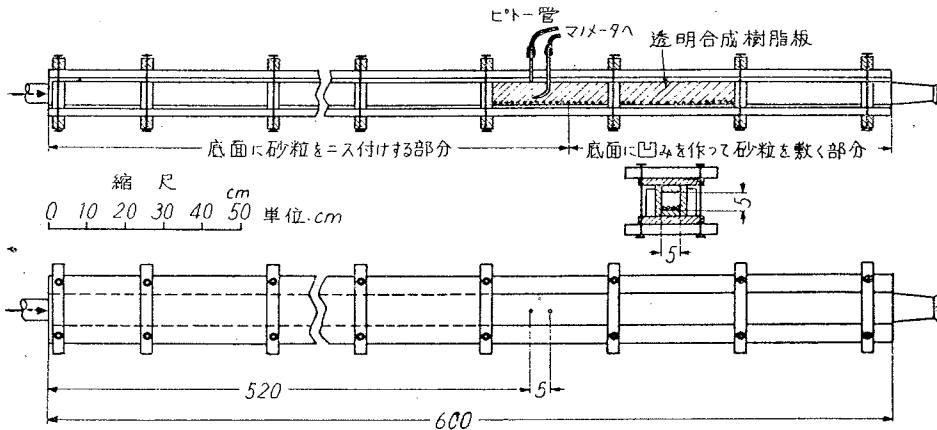
$$\left. \begin{aligned} u_c^*d/\nu < 3.5; u_m = u_c^* \{ 5.5 + 2.5(\log_e u_c^*h/\nu - 1) \} \\ u_c^*d/\nu > 3.5; u_m = u_c^* \{ 8.45 + 2.5(\log_e h/d - 1) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.64)$$

の関係から  $u_c^*$  を計算して  $\tau_c$  を求める方法がとられている<sup>14)</sup>。これらの方法では、前者の場合水深および勾配の測定誤差がかなり入ること、水深が大きい場合は側壁の影響を受けて  $\tau = \rho gh J$  の関係が適用できなくなることなどが考えられ、また後者の (1.64) 式を用いる場合は、水深の誤差がやはり影響すること、前者の場合と同様に水深が大きくなると (1.64) 式がそのまま適用され得なくなること、(1.64) 式がつねに成立するかどうか疑問であることなどの欠点が考えられる。これらの点を除くために White はノズルを用いたが、ノズルは一様流れの場合に比べて乱れの強さが小さくなり、乱れの効果を解析する場合に取扱いがかなり面倒になることが予測される。このような理由から著者はつぎに述べるような正方形一様断面の閉管路を用い、流速分布を測定して  $u^*$  を見出す方法で限界掃流力の実験を行うことにした。

#### (1) 実験装置と実験方法

(i) 実験用閉管路：これは図-1.12 に示すように、5 cm × 5 cm の正方形断面をもつ長さ 6 m の水路であ

図-1.12 実験用閉管路  
Fig.1.12 Experimental water tunnel



つて、上流端から約 5.3 m までの部分の底面を対象とする砂粒を一樣にニス付けして粗度を与え、さらにその点から下流の底面には凹みを作つて、そこに砂を敷きならべた。従つて限界掃流力以上になると凹みの部分に敷きならべられた砂が移動を始めることになる。下流端は断面をしぼつて、水路内に自由水面があらわれないようにし、流量は上流端に連結した円管に取り付けられたバルブで大まかな調節を行い、こまかい調節は余水路用分岐管に取り付けられたバルブで行なつた。また水路側壁の一部は透明な合成樹脂板で作られ、内部の砂の移動状況やピト管の位置などの模様が見られるようになってい

(ii) 砂の粒径、比重および摩擦角：図-1.11 の関係をプロットするには、 $u_c^*$ 、 $\sigma/\rho$ 、 $d$ 、 $\varphi$  および  $\nu$  の値が必要となる。このうち  $\nu$  は水温を測定すれば知ることができるし、 $u_c^*$  の測定法は (iii) において説明するから、ここで問題となるのは比重  $\sigma/\rho$ 、粒径  $d$  および摩擦角  $\varphi$  である。実験に用いた砂は 100-80 mesh, 48-42 mesh, 24-20

mesh, 16-14 mesh, 10-9 mesh, 6-5 mesh, 5-4 mesh のフルイによつてなるべく粒径が一樣になるようにしたが、それぞれの粒径  $d$  はフルイの目の大きさの平均値を採用して、0.161, 0.323, 0.767, 1.08, 1.82, 3.65 および 4.33 mm の 7 種類とした。そしてそれぞれの粒径の砂について比重と水中における摩擦角を測定した。この場合、摩擦角は静止している砂が動き始めるという意味から、砂を板にニス付けし、その上に一樣に砂を敷いてから、この板を水中に入れて徐々に傾斜させ、砂が動き始めるときの砂面の傾斜角を測定して摩擦角  $\phi$  とした。そのときの砂の動き始めるの限界としては、摩擦角の砂粒全体の平均的な値を知ることから、表面にあらわれている砂粒のほとんどが動き始めるという状態を採用し、5 回測定して平均をとつた。以上の結果をまとめたのが表-1.1 である。

表-1.1 使用した砂礫の粒径, 比重 および摩擦角

Table 1.1 Grain diameters, specific gravities and frictional angles of used sand and gravel

粒 径 $d$ mm	比 重 $\sigma/\rho$	$\tan \phi$
0.161	2.70	0.933
0.323	2.59	0.907
0.767	2.52	1.065
1.08	2.56	1.118
1.82	2.43	1.050
3.65	2.65	0.997
4.33	2.61	0.962

(iii) 限界摩擦速度  $u_c^*$  の測定: 粗面上の流速分布は  $z$  が大きい部分に対して、

$$\bar{u} = A_r u^* + 5.75 u^* \log_{10} z/d$$

とあらわされるから、流速分布を測定し、 $\bar{u}$  と  $\log_{10} z/d$  との関係をプロットすれば直線となる。従つてその直線の勾配を 5.75 で割れば  $u^*$  が求められる。

流速分布の測定は外径 2 mm のピトー管を用い、図-1.12 に示すように管路の流入口より 5.2 m の位置で、断面の中央において行なつた。砂粒の動きはじめの限界としては、(1) 時々動く、(2) 管路幅全体にわたつて一樣に連続的に移動する、(3) 前記両者の中間的な状態 (何秒間にある断面を何個通過するかを数えられる程度の動き方) の三つの状態にわけた。そしてそれぞれの状態における流速分布を測定し  $u_c^*$  を求めた。

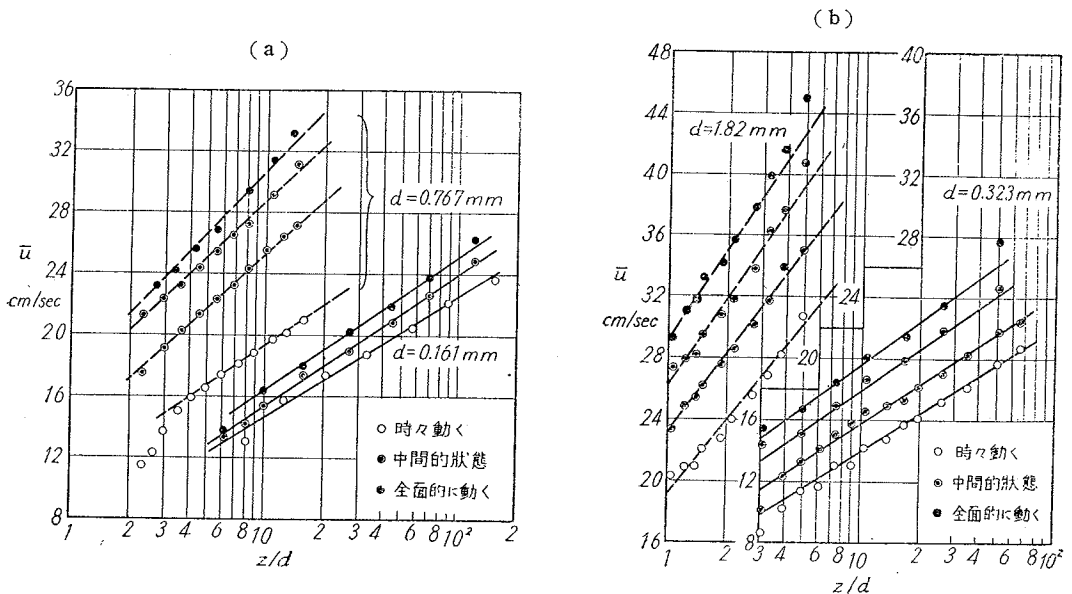
(2) 実験結果 それぞれの粒径に対する流速分布の測定結果は図-1.13 に示される。ここで問題となるのは  $z$  の値の原点であるが、これは  $\bar{u}$  と  $\log_{10} z/d$  とが直線関係となるように決定し、また  $u_c^* d/\nu$  の値が 100 以上となる場合には  $A_r = 8.5$  となることを考慮して定めた。このようにして定めた原点の位置はほとんどの場合、砂粒の頂上から下  $d/2$  の間にあつた。

図-1.13 から  $u_c^*$  を求め、 $d$  と  $u_c^* d/\nu$ ,  $u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho) - 1\}gd$ ,  $u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho) - 1\}gd \tan \phi$ ,  $u_c^{*2} = \tau_c/\rho$  との関係を表にしたのが表-1.2 である。

(3) 理論結果との比較 図-1.14 は表-1.2 に示した無次元表示の限界掃流力  $u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho) - 1\}gd \tan \phi$  と  $u_c^* d/\nu$  との関係をプロットし、(1.62) 式および (1.63) 式で求められる理論曲線(破線)と比較したものである。この図からわかるように実験結果と理論曲線とは傾向は非常によく一致しているが、量的には非常に違つている。

図-1.13 砂粒の移動状態と流速分布

Fig. 1.13 States of movement of sand grains and velocity distributions



このことは理論が、粗面上に1粒の砂がおかれた場合を考えているのに対し、実際には数多くの砂粒が表面に露出していることによるのであつて、このことを考慮に入れて理論曲線を修正する必要がある。

いま表面に露出している1粒の砂を考えると、その砂は同じく表面に露出している他の砂粒によつてある程度遮蔽され、従つてそれだけ流れからうける抵抗が、1粒の砂のみが存在すると考えた場合より減少していることが推察される。その効果として係数  $\epsilon$  を (1.62) 式の函数  $\Psi$  に掛けて

$$\frac{u_c^{*2}}{\{(\sigma/\rho)-1\}gd \tan \varphi} = \frac{1}{\epsilon \Psi} \dots\dots\dots (1.65)$$

とあらわし、 $\epsilon$  を遮蔽係数となすことにする。この  $\epsilon$  の値は力学的な遮蔽効果としてあらわされるべきであるから、当然一定値とすることは無理であらう。しかしいまこの値を一定とし、 $\epsilon=0.35$  および  $\epsilon=0.4$  とした場合を示すと、図1.14の鎖線および実線のようになる。なお  $u_c^* d/\nu$  の値が1より小さくなると、 $u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho)-1\}gd \tan \varphi$  の値が  $\epsilon=0.35$  の場合には 0.160、 $\epsilon=0.4$  の場合には 0.139 の値に漸近し、Stokes の抵抗法則が適用される範囲ではそれぞれ 0.160 および 0.139 の一定値となる。図からわか

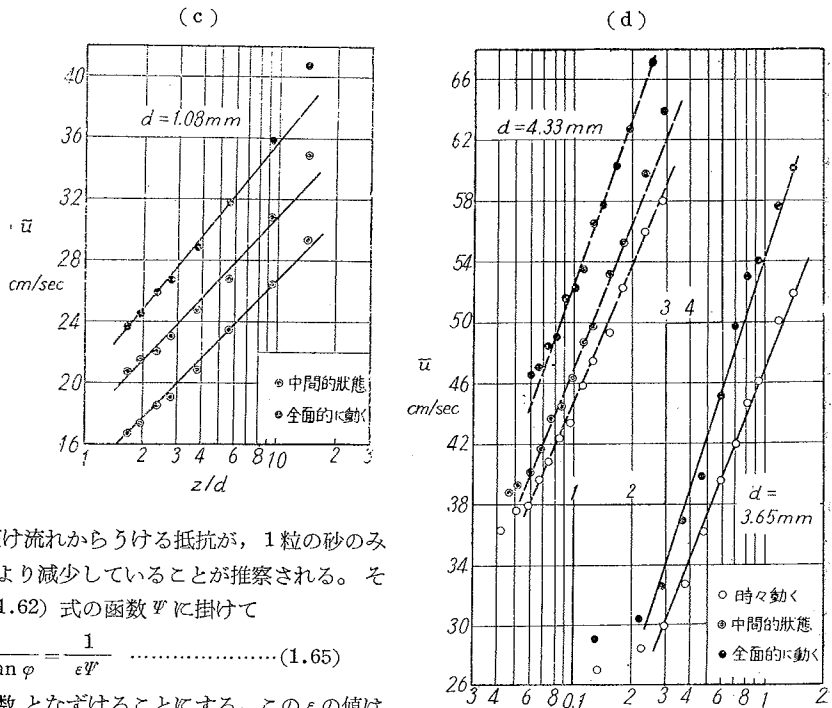


図-1.14 限界掃流力の実験結果と理論曲線との比較  
Fig.1.14 Comparison of experimental results and theoretical curves for critical tractive force

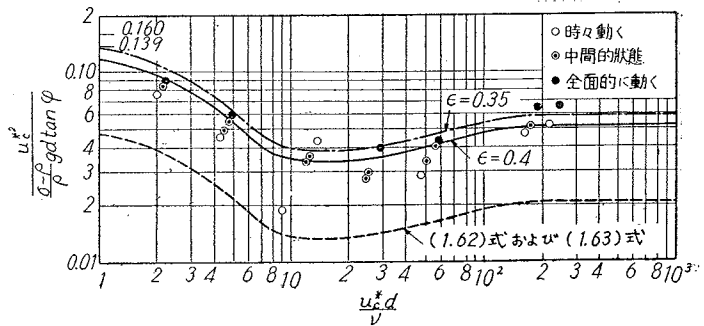


表-1.2 限界掃流力に関する実験資料

Table 1.2 Experimental data for critical tractive force

d(mm)	$u_c^* d/\nu$	$u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho)-1\}gd$	$u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho)-1\}gd \tan \varphi$	$u_c^{*2}(\text{cm/sec})^2$	移動状態
0.161	2.00	0.0704	0.0755	1.89	時々動く
	2.16	0.0796	0.0842	2.13	20ヶ/30 sec
	2.21	0.0853	0.0894	2.24	全面的に動く
0.323	4.31	0.0411	0.0453	2.07	時々動く
	4.49	0.0443	0.0488	2.25	5ヶ/30 sec
	4.74	0.0494	0.0544	2.50	12ヶ/30 sec
	4.95	0.0541	0.0596	2.72	全面的に動く
0.767	9.05	0.0200	0.0188	2.29	時々動く
	12.09	0.0357	0.0336	4.08	5ヶ/25 sec
	12.68	0.0383	0.0360	4.37	25ヶ/25 sec
	13.92	0.0463	0.0436	5.29	全面的に動く
1.08	24.9	0.0309	0.0277	5.11	5ヶ/30 sec
	25.6	0.0332	0.0297	5.48	19ヶ/30 sec
	29.6	0.0446	0.0400	7.35	全面的に動く
1.82	47.4	0.0300	0.0286	7.62	時々動く
	50.5	0.0345	0.0328	8.76	6ヶ/30 sec
	56.1	0.0421	0.0401	10.7	16ヶ/30 sec
	58.2	0.0452	0.0430	11.5	全面的に動く
3.65	162.8	0.0462	0.0463	27.3	時々動く
	172.4	0.0511	0.0512	30.1	6ヶ/60 sec
	189.2	0.0642	0.0642	37.7	全面的に動く
4.33	219	0.0499	0.0519	34.0	時々動く
	247	0.0627	0.0652	42.9	全面的に動く

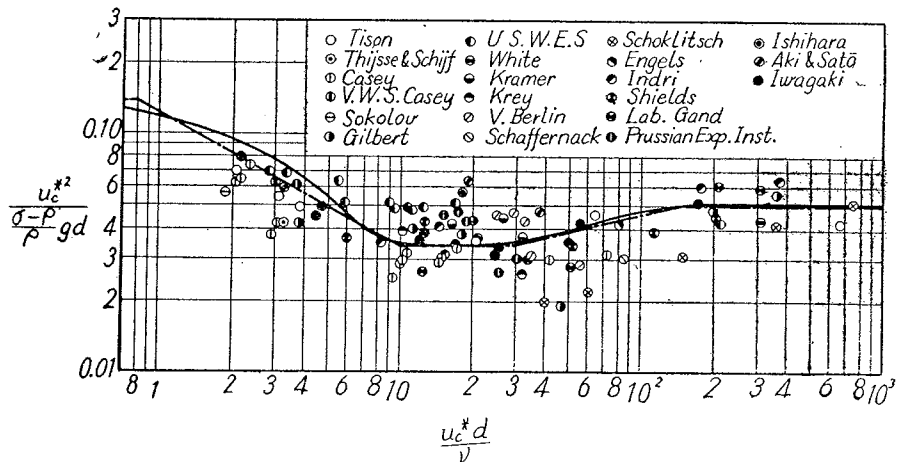
るように、 $\epsilon=0.4$  とすれば砂粒の移動が中間の状態の実験値とよく一致し、 $\epsilon=0.35$  とすれば全面的に動く場合の実験値と一致するようである。ただし  $u_c^*d/\nu$  の値が小さい場合は実験値の方が小さ過ぎる傾向をもっているが、これは  $\epsilon$  を一定とすることに無理があるわけで、砂粒が全面的に移動している場合と、あまり移動が激しくない場合とは、 $\epsilon$  の  $u_c^*d/\nu$  に対する変化の様相も異なることが推察される。

さて問題はいかなる状態を限界として採用するかである。概念的に限界として採用しうる状態としては、実験値を区別して示したように、(1) 砂粒が時々動く状態、(2) 全面的に移動する状態、(3) 何秒間に何粒動くを観測できる(1)と(2)の中間の状態が考えられ、さらに(4)として流砂量を測定し  $u^*$  を減少させていつて流砂量が0となる極限をとる場合も考えられる。工学的な意義から言えば、流砂量が0となる極限を採用することが最もよいように思われるが、流砂量の測定は測定精度がわるく、さらに砂漣の発生などの影響によつて、正確な値を測定することが困難であるし、また流砂量が0の極限を見出すためには極限付近の流砂量に関する法則性が明らかであることが必要であつて、概念的にはこの方法が限界掃流力の定義として一応考えられるとしても、実際にはその極限をとらえることは困難であろう。つぎに(1)の状態であるが、これは砂面上の不安定な砂粒が動く状態と考えられるから、この状態をもつて砂粒全体の平均的な限界を与えているものとは言い難い。図-1.14においてもわかるように、時々動く場合の実験値は理論曲線と比べてかなり離れているものもあつて、この状態を採用することが不適当であることを示している。(2)および(3)の状態は両者の区別が水路の幅の相違によつて違つてくるけれども、限界として採用するのに最も適当であろう。中間の状態としてプロットされた実験値は5cm幅当り最小6個/60sec、最大25個/25secであるが、このあたりの移動状態の変化はかなり厳しく、著者はこの程度の移動状態をもつて限界とし採用することにした。(2)の全面的に動く状態も限界の基準として採用しうるが、かなりの量の砂が移動しているの、砂面上の砂粒の平均的な動き始めの限界という意味から、この状態を採用しないで(3)の場合を採用することにしたわけである。すなわち、理論曲線としては  $\epsilon=0.4$  の場合を用いることにする。

つぎにこれまで多くのひとびとによつて実験された開水路における限界掃流力の測定値との比較を行う必要がある。従来の実験資料では摩擦係数  $\tan \phi$  の値が明らかでないので、 $u_c^*/[(\sigma/\rho)-1]gd \tan \phi$  の値をそのまま比較することができない。そこで Shields の表示のように  $\tan \phi$  の入らない  $u_c^*/[(\sigma/\rho)-1]gd$  の値で比較してみよう。図-1.15はこの関係を示したもので、これまでに行われた多くの実験値がプロットしてある。ただし同一

図-1.15 従来の多くの実験結果と理論曲線との比較

Fig.1.15 Comparison of theoretical curve and experimental data obtained by many authorities



の実験者の同一の粒径に対する測定値については、できるだけ水路側壁の影響を除くために、3cm以下の水深のものを用い、また3cm以下の水深のものがないときは最小の水深の測定値のみを採用してプロットした。なお著者の測定値は中間の状態の場合のみをプロットした。この図からわかるように、多くの実験値はかなり散乱しているが、著者の実験結果は他のものと比較してほぼ適当な値を示しているように思われる。なお同図における実線は、 $\tan \phi=1$  とおいた場合の  $\epsilon=0.4$  に対する理論曲線である。

#### 4. 実験公式

(1) 著者の実験公式 著者の実験は閉管路で行なつたから、開水路による実験のように水深および勾配の測定

誤差が入らず、また流速分布によつて  $u_c^*$  を求める方法をとつたため側壁の影響も入らないことから、他の実験結果と比較してかなり精度がよいように考えられる。前述のように  $\epsilon=0.4$  とした理論曲線を限界として採用するとすれば、移動の中間状態の実験結果とよく一致することを考慮して実験公式を作ることは、実用上大いに意義のあることである。

そこでいま図-1.15における鎖線のように、折線で  $u_c^{*2}/\{(\sigma/\rho)-1\}gd$  と  $u_c^*d/\nu$  との関係をあらわすことにすると、これらの折線の鎖線はつぎのような実験公式であらわされる。

$$\begin{aligned}
 R^* &\geq 671; u_c^{*2} = \tau_c/\rho = 0.05\{(\sigma/\rho)-1\}gd, \\
 162.7 \leq R^* \leq 671; &= [0.01505 g\{(\sigma/\rho)-1\}]^{25} \nu^{-\frac{3}{11}} d^{\frac{31}{22}}, \\
 54.2 \leq R^* \leq 162.7; &= 0.034\{(\sigma/\rho)-1\}gd, \\
 2.14 \leq R^* \leq 54.2; &= [0.1235 g\{(\sigma/\rho)-1\}]^{25} \nu^{\frac{7}{32}} d^{\frac{11}{32}}, \\
 R^* \leq 2.14; &= 0.14\{(\sigma/\rho)-1\}gd,
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

ここに、 $R^* = \{(\sigma/\rho)-1\}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}}/\nu$ 。

$R^*$  は無次元量であり、式の両辺のディメンションは一致している。なお  $R^* \leq 2.14$  の場合は、実験値がないので適合性を確かめることができない。たとえ実験を行つてもつぎに示すように粒径が 0.066 mm 程度以下であるから、測定結果に信頼性がおけなくなるし、またこの範囲は実用上あまり重要性がない。

いま砂粒の比重  $\sigma/\rho$  を 2.65 とし、 $\nu=0.01 \text{ cm}^2/\text{sec}$  (20.3°C)、 $g=980 \text{ cm}/\text{sec}^2$  を用いて (1.66) 式を簡易化すると、 $u_c^{*2} = \tau_c/\rho$  を  $\text{cm}^2/\text{sec}^2$ 、 $d$  を  $\text{cm}$  であらわして、

$$\begin{aligned}
 d &\geq 0.303 \text{ cm}; u_c^{*2} = \tau_c/\rho = 80.9 d, \\
 0.118 \leq d \leq 0.303 \text{ cm}; &= 134.6 d^{\frac{31}{22}}, \\
 0.0565 \leq d \leq 0.118 \text{ cm}; &= 55.0 d, \\
 0.0065 \leq d \leq 0.0565 \text{ cm}; &= 8.41 d^{\frac{11}{32}}, \\
 d &\leq 0.0065 \text{ cm}; = 226 d.
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

となる。

(2) 従来の実験公式 限界掃流力に関する実験公式は古くから数多くのものが提案されている。そして著名な公式についての解説は石原博士<sup>15)</sup>や安芸博士<sup>16)</sup>などの論文に述べられてそれぞれ批判されている。ここでは著者の提案する (1.66) 式および (1.67) 式と比較する必要上、一応従来の公式について述べてみたい。

(i) Schoklitsch の公式：彼は 1914 年、幅 9.7 cm の水路を用い、水深が 3 cm から 8 cm の範囲で実験を行つて、つぎの公式を提案した<sup>17)</sup>。

$$\tau_c = \sqrt{0.385 w_s(w_s - w_0)\eta V} \tag{1.68}$$

ここに  $\tau_c$  :  $\text{kg}/\text{cm}^2$ 、 $w_s$  および  $w_0$  はそれぞれ砂礫および水の単位体積当りの重さで  $\text{kg}/\text{m}^3$ 、 $\eta$  は砂礫の形による係数で、球のとき 1、普通の砂礫で 1.15~1.35、岩滓で 3.1、岩片の薄片で 4.4、 $V$  は砂礫の体積で  $\text{m}^3$  である。

いま砂礫の比重  $w_s/w_0$  を 2.65、 $\eta$  を 1.3、 $V = \pi d^3/6$  とおけば、(1.68) 式は

$$u_c^{*2} = \tau_c/\rho = 104.9 d^{\frac{3}{2}} \quad (\text{cm-sec 単位}) \tag{1.68}'$$

となる。その後 Schoklitsch<sup>18)</sup> はこれまでになされた多くの実験結果を、縦軸に  $\tau_c/d(w_s - w_0)$  を、横軸に  $d$  をとつて両対数紙にプロットし、 $d > 0.006 \text{ m}$  では後に述べる Krey の式がよく一致し、 $0.001 \text{ m} < d < 0.003 \text{ m}$  では

$$\tau_c = 0.000285(w_s - w_0)d^{\frac{1}{3}} \tag{1.69}$$

の式がよく適合することを見出した。ただし単位は (1.68) 式と同じである。(1.69) 式は砂礫の比重を  $w_s/w_0 = 2.65$  とおけば、

$$u_c^{*2} = \tau_c/\rho = 9.95 d^{\frac{1}{3}} \quad (\text{cm-sec 単位}) \tag{1.69}'$$

となる。

(ii) Krey の公式：彼は  $\tau_c = d/8$  の関係を見出し、砂礫の比重  $\sigma/\rho$  は 2.6 と 2.7 の間にあるとして、

$$\tau_c = (1/13)\{(\sigma/\rho)-1\}d \tag{1.70}$$

の関係式を提案し、 $d$  として  $d_p=50$  あるいは  $d_m = \sum_0^{100} d d p / \sum_0^{100} d p$  を採用することを提案した<sup>19)</sup>。ここに  $\tau_c$  :  $\text{kg}/\text{m}^2$ 、 $d$  :  $\text{mm}$  であつて、 $p$  は砂礫の累加重量百分率である。いま  $\sigma/\rho = 2.65$  をとれば、(1.70) 式はつぎのようになる。

$$u_c^{*2} = \tau_c / \rho = 124.4 d. \quad (\text{cm-sec 単位}) \dots\dots\dots (1.70)'$$

(iii) Kramer の公式 : これまでは公式中に砂礫の混合状態をあらわす要素を入れたものはなかつたが、彼ははじめて均等係数  $M = \sum_{p=0}^{p=50} d \Delta p / \sum_{p=50}^{p=100} d \Delta p$  を限界掃流力に關係する要素の一つとして取入れ、Schafernak, Schoklitsch, Krey, P.E.I., Eengels, Gilbert および彼自身の実験値からつぎの公式を提案した<sup>20)</sup>。

$$\tau_c = (100/6) d (w_s - w_0) / M. \dots\dots\dots (1.71)$$

ここに  $\tau_c$  : gr/m<sup>2</sup>,  $d$  : mm,  $w_s, w_0$  : gr/cm<sup>3</sup> で、 $d$  として平均粒径  $d_m$  を採用する。

(1.71) 式で砂礫の比重として 2.65 を、また均一な砂礫の場合として  $M=1$  をとれば、

$$u_c^{*2} = \tau_c / \rho = 26.95 d \quad (\text{cm-sec 単位}) \dots\dots\dots (1.71)'$$

となる。

(iv) U.S. Waterways Exp. Station の公式 : これはやはり Kramer と同様に均等係数  $M$  を取入れ、Kramer の用いた実験値にさらに U.S.W.E.S. の実験値を加え、(1.71) 式を修正して作られたものである<sup>21)22)</sup>。

$$\tau_c = 0.00595 [ \{ (\sigma/\rho) - 1 \} d / M ]^{0.5} \dots\dots\dots (1.72)$$

ここに  $\tau_c$  : lbs/ft<sup>2</sup>,  $d$  : mm である。 $\sigma/\rho = 2.65$ ,  $M=1$  とおけば

$$u_c^{*2} = \tau_c / \rho = 11.57 d^{1/2} \quad (\text{cm-sec 単位}) \dots\dots\dots (1.72)'$$

とあらわされる。

(v) Indri の公式 :

$$\left. \begin{aligned} \tau_c &= 13.3 d \{ (\sigma/\rho) - 1/M \} + 12.16, & d < 1 \text{ mm} \\ \tau_c &= 54.85 d \{ (\sigma/\rho) - 1/M \} - 78.48, & d > 1 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.73)$$

ここに  $\tau_c$  : gr/m<sup>2</sup>,  $d$  : mm である<sup>23)</sup>。この公式の特徴は平均粒径 1 mm を境として式を分けたことと、やはり Kramer と同じ均等係数  $M$  を入れたことである。(1.73) 式で  $\sigma/\rho = 2.65$ ,  $M=1$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} u_c^{*2} &= \tau_c / \rho = 21.5 d + 1.19, & d < 0.1 \text{ cm} \\ u_c^{*2} &= \tau_c / \rho = 88.7 d - 7.70, & d > 0.1 \text{ cm} \end{aligned} \right\} (\text{cm-sec 単位}) \dots\dots\dots (1.73)'$$

とあらわされる。

(vi) Chang の公式 :

$$\left. \begin{aligned} \tau_c &= 0.00450 \{ (\sigma/\rho) - 1 \} d / M, & \{ (\sigma/\rho) - 1 \} d / M > 2.0 \\ \tau_c &= 0.00635 [ \{ (\sigma/\rho) - 1 \} d / M ]^{1/2}, & \{ (\sigma/\rho) - 1 \} d / M < 2.0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.74)$$

ここに  $\tau_c$  : lbs/ft<sup>2</sup>,  $d$  : mm である。

この公式も Indri と同様に公式を二つに分け、さらに均等係数  $M$  を入れたものであるが<sup>24)</sup>、Indri が限界として  $d$  の値をそのまま採用したのに対し、Chang は平均粒径の外に比重と均等係数  $M$  を含めた  $\{ (\sigma/\rho) - 1 \} d / M$  の値を限界として用いたことと、式の形を U.S.W.E.S. のように指数型にしたことが特徴である。

(1.74) 式に  $\sigma/\rho = 2.65$ ,  $M=1$  を代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} u_c^{*2} &= \tau_c / \rho = 35.4 d, & d > 0.121 \text{ cm} \\ u_c^{*2} &= \tau_c / \rho = 12.3 d^{1/2}, & d < 0.121 \text{ cm} \end{aligned} \right\} (\text{cm-sec 単位}) \dots\dots\dots (1.74)'$$

となる。

(vii) 安芸・佐藤公式 : 安芸および佐藤の両博士は du Boys<sup>25)</sup> の限界掃流力の考え方から、河床面積 1 m<sup>2</sup>、層の厚さ  $\delta$  m の掃流力に対する抵抗力  $R$  は、 $\alpha$  を砂礫の空隙率、 $f$  を摩擦係数とすれば、

$$R = f \{ (\sigma/\rho) - 1 \} (1 - \alpha) \delta \cdot 1 \cdot 1, \quad (\text{kg/m}^2) \dots\dots\dots (1.75)$$

にてあらわされるものとし、これが掃流限界においては限界掃流力  $\tau_c$  に等しいと考えた。ついで  $\delta$  の代りに平均粒径  $d_m$  を用い、 $\alpha$  はディメンジョンがないから、これに関連して空隙の状態をあらわすディメンジョンのない指数として、

$$\lambda = \sum_{p=0}^{p=p_m} d d \Delta p / \sum_{p=p_m}^{p=100} d \Delta p$$

を用いることとして、

$$\tau_c = R = K \{ (\sigma/\rho) - 1 \} \lambda d_m$$

とした<sup>26)</sup>。ここに  $p_m$  は  $d = d_m$  に対応する重量百分率で、 $\lambda$  は平均粒径以下の重量百分率とそれ以上の重量百分率の比を示し、 $K$  は実験常数である。後に安芸博士は  $K$  の値を 55.7 ときめ、

$$\tau_c = 55.7 \{ (\sigma/\rho) - 1 \} \lambda d \dots\dots\dots (1.76)$$

とした<sup>16)</sup>。ここに  $\tau_c$  : gr/m<sup>2</sup>,  $d$  : mm であつて、 $d$  としては平均粒径  $d_m$  を用いる。(1.76) 式において  $\sigma/\rho = 2.65$



とし、また均一の粒径の砂の場合に  $\lambda$  が 1 となるものとして  $\lambda=1$  とおけば、(1.76) 式はつぎのようになる。

$$u_c^{*2} = \tau_c / \rho = 90.1 d, \quad (\text{cm-sec 単位}) \dots\dots\dots (1.76)'$$

(viii) 境公式： 境氏は Kramer の  $M$  および安芸博士の  $\lambda$  が砂礫のフルイ分け曲線の形によつて、あまりにも大きく変化することから、 $\tau_c$  に過大の影響を与えると考え、これにかわるものとして、

$$\beta = \frac{\sum_{p=0}^{p=100} d \, dp + \sum_{p=50}^{p=100} d \, dp}{\sum_{p=0}^{p=100} d \, dp + \sum_{p=0}^{p=50} d \, dp} = \frac{2+M}{1+2M}$$

なる係数を用いることを提唱した。そして (1.75) 式における  $f$  を摩擦係数  $f_0 = \tan \theta$  に比例するものとして、

$$f = \mu f_0 = \mu \tan \theta,$$

ただし  $\mu$  : 比例常数,  $\theta$  : 息角, とおき, さらに  $\tan \theta$  と平均粒径  $d_m$  との関係として、

$$f_0 = \tan \theta = 0.364 d_m^{1/5}$$

を用い、結局つぎの実験式を提案した<sup>27)</sup>。

$$\tau_c = (100/3) \{(\sigma/\rho) - 1\} \beta d^{9/5}. \dots\dots\dots (1.77)$$

ここに  $\tau_c$  :  $\text{gr/m}^2$ ,  $d$  :  $\text{mm}$  で、 $d$  として平均粒径  $d_m$  を用いる。  $\sigma/\rho = 2.65$  とし、均一粒径の砂礫のとき  $\beta = 1$  となるものとすれば、(1.77) 式はつぎのようになる。

$$u_c^{*2} = \tau_c / \rho = 85.6 d^{9/5}. \quad (\text{cm-sec 単位}) \dots\dots\dots (1.77)'$$

(ix) 栗原公式： 栗原博士は限界掃流力の無次元表示  $\tau_c / (\sigma - \rho)gd$  および  $u_c^* d / \nu$  に、それぞれ境氏の提唱した  $\beta$  を付加して、

$$\tau_c / \beta (\sigma - \rho)gd = f(u_c^* d / \nu) \dots\dots\dots (1.78)$$

とし、さらにこの関係が実用上不便であるとの見地から

$$\tau_c / \beta (\sigma - \rho)gd = \Phi(\sqrt[3]{(g/\beta\nu^2)\{(\sigma/\rho) - 1\}}d)$$

とかきかえられるとして、つぎの実験式を提案した<sup>2)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \tau_c / \beta (\sigma - \rho)gd &= -0.047 \log_{10} X - 0.023, & \log_{10} X < -1.0 \\ \tau_c / \beta (\sigma - \rho)gd &= 0.01 \log_{10} X + 0.034, & -1.0 < \log_{10} X < -0.6 \\ \tau_c / \beta (\sigma - \rho)gd &= 0.0517 \log_{10} X + 0.057, & -0.6 < \log_{10} X \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.79)$$

$$X = [1.02 \times 10^{-7} (g/\beta\nu^2)\{(\sigma/\rho) - 1\}]^{1/3} d = \{(\sigma/\rho) - 1\}^{1/3} d.$$

ここに、 $X$  の近似値を用いるときは無次元量でなくなるので、 $d$  の単位として  $\text{cm}$  を使用することとする。また  $\sigma/\rho = 2.65$ ,  $\beta = 1$  とすれば、(1.79) 式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_c^{*2} = \tau_c / \rho &= (-76.0 \log_{10} 1.18 d - 37.2) d, & d < 0.085 \text{ cm} \\ &= (16.2 \log_{10} 1.18 d + 55.0) d, & 0.085 < d < 0.213 \text{ cm} \\ &= (83.7 \log_{10} 1.18 d + 92.3) d, & 0.213 \text{ cm} < d \end{aligned} \right\} (\text{cm-sec 単位}) \dots (1.79)'$$

以上列挙した公式の外にも、諸外国で多くの公式が提案されているようであるが<sup>28)</sup>、詳細はよくわからない。また限界を掃流力でなく平均流速あるいは流量であらわしたものが<sup>29)30)31)18)</sup>、それは等流の場合しか適用されないで、一般性がなくなる欠点がある。

(3) 実験公式の比較と批判 まず (2) において述べた従来の実験公式と、(1) において提案した著者の実験公式とを比較してみよう。図-1.16 は  $\sigma/\rho = 2.65$  でかつ均一な粒径の砂礫とした場合の  $u_c^{*2} = \tau_c / \rho$  と  $d$  の関係を比較したもので、図-1.15 に用いた実験値もそのままプロットしてある。この図-1.16 を見てわかるのは、粒径の全範囲にわたつて限界掃流力と粒径との関係を 1 本の直線で表わし得ないことであつて、こうした点を中心として上記の各公式を批判すればつぎのようである。

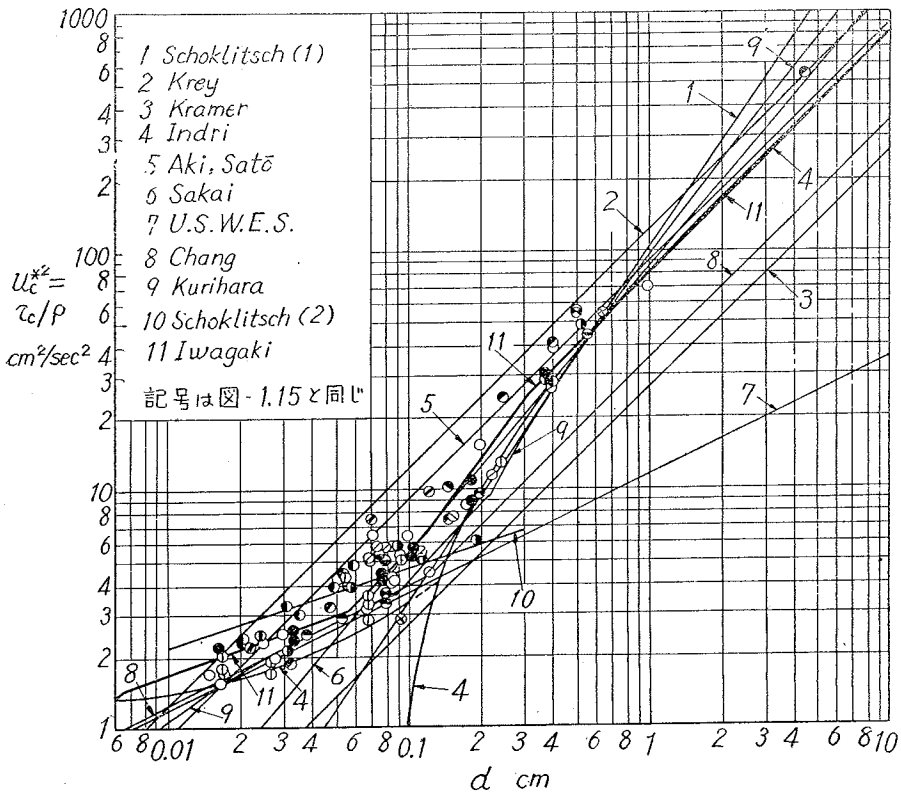
(i) (1.68)' 式であらわされる Schoklitsch 公式は、図-1.16 において直線 1 で示され、(1.69)' 式は直線 10 で示される。図からわかるように、前者は  $d > 1 \text{ cm}$  のとき大にすぎ、 $d < 0.1 \text{ cm}$  のときはあまり小さすぎて全く適用できない。後者は  $0.01 < d < 0.3 \text{ cm}$  の範囲で用いられることになつてはいるが、 $d$  が  $0.1 \text{ cm}$  を越えると小さ過ぎ、また  $d$  が小さいときは若干大きい値を与えることがわかる。したがつて Schoklitsch 公式はいずれも適当でないと言つてよい。

(ii) (1.70)' 式の Krey 公式は図において直線 2 で示されるが、全体として大きい値を与えるようである。とくに  $0.1 \text{ cm}$  前後の粒径に対しては、著者の実験値に較べて 2 倍以上の  $\tau_c$  を与えている。

(iii) Kramer の公式は図において直線 3 で示されるが、これは Krey 公式とは反対に、全体としてかなり小

図-1.16 限界掃流力の実験公式の図示

Fig.1.16 Graphical representation of empirical formulas of critical tractive force by many authorities and the author



さい $\tau_c$ を与える。この原因は均等係数 $M$ を導入して実験式を作ったことにあり、 $M$ が $\tau_c$ にあまりにも大きく影響を与えすぎているためである。従つて混合砂礫の実験結果を用い、 $M$ を導入して実験式に一般性をもたせようとした試みが、失敗していることを示しているとするべきである。

(iv) U.S.W.E.S.の公式は図の直線7であらわされるが、この公式は粒径の小さい場合の実験結果を対象として作られたものであるから、 $d > 0.1$  cmでは $d$ が大きくなるにつれて極端に小さい $\tau_c$ を与える。 $d < 0.1$  cmの場合でも小さ過ぎるようであるが、Kramer公式と同様に $M$ を含んでいるにかかわらずこの程度であるのは、 $M$ の平方根という形のためにKramer公式ほど $\tau_c$ に影響しないためであろう。

(v) Indriの公式は図の曲線4で示されるが、 $d = 0.1$  cmを境界として二つの部分からなっている。このように0.1 cmの粒径を境として異なつた式で $\tau_c$ をあらわしたことは、つぎのChangの公式とともに一つの進歩と考へてよいであろう。ただこれも $M$ の影響がきき過ぎるためと思われるが、 $d$ が0.01~1 cmの間では小さ過ぎる値を与え、また $d$ が0に近づくとき一定値に近づくという疑問の点がある。

(vi) Changの公式は図で8という二つの直線で示されるが、 $d > 0.125$  cmの範囲に対する公式はかなり小さ過ぎる値を与え、適当といえない。ただ限界の粒径がIndriと大体同じ値であるのは、興味深いことである。

(vii) 安芸・佐藤の公式は直線5であらわされるが、 $0.03 < d < 0.3$  cmの範囲では若干大きい $\tau_c$ を与え、また0.01 cm付近では逆に小さ過ぎる $\tau_c$ を与える。しかし全体を1本の直線であらわそうとするものとしては、ほぼ妥当なものといえよう。なお、公式に $\lambda$ を導入したことの効果は明らかでないように思われる。

(viii) 境公式は図において直線6であらわされる。この公式は混合効果として通常1~2の値をとる係数 $\beta$ を採用したこと、摩擦係数として息角によるものを用い、それが $d^{1/5}$ に比例するとしたことが特徴であるが、 $\beta$ の議論は別として、息角を用いた摩擦係数を採用したことが疑問と思われる。息角は移動している砂が止まるいわゆる動摩擦係数に対応し、限界掃流力に用いるものとしては動摩擦係数ではなく、止まっているものが移動をはじめる静摩擦係数でなくてはならない。この意味から著者は前述の測定法によつて摩擦係数 $\tan \phi$ を求めたが、表-1.1に示されるように粒径によつて系統的に異なつた値を示さず、測定範囲内では $\tan \phi$ が1前後の値をとる。

従つて境公式のように摩擦係数が  $d^{1/3}$  に比例するから、 $\tau_c$  が  $d^{2/3}$  に比例するという理論的根拠は成立しないように思われる。結果的にはこの公式は  $d < 0.06$  cm の範囲では実験値よりはなずれて小さい値を与えるが、 $d > 0.06$  cm ではかなりよく適合している。

(ix) 栗原公式は折線 9 で示されるが、 $d$  による  $\tau_c$  の変化の様子は  $d$  が 1 cm より大きい部分を除いて、著者の公式とよく似ている。ただこれも  $\beta$  のためと思われるが、 $d < 1$  cm では全体的に著者の実験値より若干小さい  $\tau_c$  を与えている。

(4) 混合砂礫の限界掃流力に関する考察 砂礫の粒径が一樣でなく、粒径の異なつたものが混合しているときの限界掃流力に及ぼす効果として、Kramer, U.S.W.E.S., Indri および Chang らは均等係数  $M$  を採用し、平均粒径を  $1/M$  倍する  $d/M$  の形で公式に  $M$  を導入した。これに対し安芸・佐藤両博士は空隙状態をあらわすものとして  $\lambda$  を用い、平均粒径を  $\lambda$  倍する  $\lambda d$  の形で公式に入れ、さらに境氏は  $M$  および  $\lambda$  がともに  $\tau_c$  に過大の影響を与えるものとして、 $\beta = (2+M)/(1+2M)$  なる係数を考え、これを空隙状態をあらわすものとして用いることを提唱した。栗原博士は  $\beta > 1$  のときには粗度が有効的に平均直径より減少するという見地から、(1.78) 式の形で  $\beta$  を導入したわけである。

すでに (3) で述べたように、 $M$  を用いた公式はすべて大体一樣粒径と考えよい砂を用いた著者の実験値あるいは実験公式より小さい  $\tau_c$  を与えることから、境氏の主張のように、 $M$  を用いることは不適当と思われる。また安芸博士の論文<sup>19)</sup>に載せられている実河川の河床砂礫では、 $\lambda$  の値は富士川で 0.401~0.747、釜無川で 0.567~0.642、笛吹川で 0.136~0.992、鬼怒川で 0.250~1.105 の値をとり、 $\lambda d$  の形をとり入れると、鬼怒川の  $\lambda = 1.105$  の値を除いてすべて平均粒径より小さい粒径に対応する  $\tau_c$  を求めていることになる。これは Kramer らの  $d/M$  の表示が、 $M < 1$  であることから、平均粒径より大きい粒径に対応する  $\tau_c$  を求めることになるというのと逆である。

境氏の  $\beta$  は通常 1~2 の値をとるから、(1.77) 式の表示法では、ほぼ平均粒径の 1~2 倍の粒径に対応する  $\tau_c$  を求めることになる。従つて  $M$  が 0 に近い値をもつような混合状態の砂礫が考えられ、また  $\lambda$  も上述のようにかなり小さい値をとり得る場合があることから見ると、境氏が  $\tau_c$  にあまり大きい影響を与えない混合効果をあらわす係数  $\beta$  を考案したことは、混合効果があるかどうかの論議は別として、一つの進歩といつてよいであろう。

混合砂礫の限界掃流力で問題になるのは、

- (i) いかなる粒径のものが動き始めるときをもつて限界とするか、
  - (ii) 実験して得られた限界掃流力は平均粒径に対応する一樣粒径の場合の  $\tau_c$  より大きいか小さいか、
- であつて、これを解決しなければ混合効果のあらわし方を決めることができない。

(i) の問題はきわめて重要であつて、ほぼ一樣な粒径と見なしてよい著者の実験においても、表-1.2 に示すように砂の移動状態に各段階があり、著者は何秒間に何個動くか数えられうる程度をもつて限界と定めた。著者の実験では一樣粒径のものを用いたためか、図-1.14 に示すように 1 例を除いて、時時動くという状態から全面的に移動する状態までの範囲はかなり狭いが、それでも限界点としてどこをとるべきか一応迷わざるを得ない。一樣粒径においてもこんな状態であるから、混合砂礫の場合にはなおさら限界の決定が困難であろう。もちろん小さい粒径のものは大きい粒径の砂礫に遮蔽されて動き難いであろうと考えられるが、それでも時時動く状態から全面的に移動する状態までの範囲はかなり広がるものと思われる。この問題はさておいて、図-1.15 から (ii) の問題を考察してみよう。この図にプロットされている実験資料には、一樣粒径か混合砂かはつきりしないものが多いが、これらのうちではほぼ一樣粒径の砂礫と考えられるのは、著者のものの外に、Schoklitsch ( $M=1$ ) 5 点、Krey ( $M=0.778 \sim 0.869$ ) 3 点、Gilbert ( $M=0.714 \sim 0.896$ ) 6 点のうち 4 点の資料であつて、他のものに比べて極端に小さい Schoklitsch の 3 点と Gilbert の 1 点を除けば、これらの資料と著者の実験公式とは大体一致している。従つて著者の実験公式を一樣粒径のときの限界掃流力を与える基準として (ii) の問題を調べてみる。

表-1.3 は大まかに著者の公式による値より小さい、一致する、大きい 3 区分に分けて、 $\beta$ ,  $M$  および実験者を表示したものである。この表から見ると、 $M$  の値が小さく  $\beta$  の大きい、粒径の不揃いの砂礫のときは、全体として著者の公式による値より若干大きい  $\tau_c$  を与える傾向があることがわかる。しかし、これはあくまでも表-1.3 に基づいた全体としての傾向であつて、細かく見るとかなり不揃いの砂 ( $M=0.265$ ,  $\beta=1.48$ ) を用いた P.E.I. の実験値はかえつて小さい値をとつており、また著者の公式による値と一致するものも少なくない。さらに図-1.15 には表-1.3 に示す資料以外の多くの実験値がプロットされていて、これらがどんな  $M$ ,  $\beta$  をとるかかわからないが、著者の公式より小さい値を示すものが相当あり、この図からは混合効果を見出すことができない。このことは、混合効果が限界の判定の仕方に支配され、従つて逆にいえば、限界の判定の仕方によつて混合効果が大きいに変化することを示すものであつて、このような理由から、現在では混合状態をあらわす係数を公式に導入する

意義が明らかでないように思われるが、このことは将来に残された重要な問題といえることができる。

以上の考察から、著者は例えば  $M$ ,  $\lambda$  あるいは  $\beta$  のような混合状態を表わす係数を公式中に入れる意義が明らかでない現在では、混合砂礫の場合でも著者の実験公式 (1.66) 式あるいは (1.67) 式を適用してさしつかえないことを主張したい。この場合  $d$  としては、従来通り平均粒径をとる。

## 5. 結 論

限界掃流力の問題は古くから論議され、水理学者から現場で実際問題にたずさわる人にいたるまで、多くのひとびとにとつて興味深い問題である。その理論的取扱いは最初 1879 年 du Boys に始まり、長くその考え方にもとづいて実験式が作られてきたが、1936 年頃から Shields とか Chang によつて次元解析の方法がとられはじめ、とくに Shields の無次元表示は現在における最良のものとして取り扱われ、この表示法は限界掃流力の力学的機構を明らかにしようとした 1948 年の栗原博士の研究および以上述べてきた著者の究研の基礎となつている。このような発展をたどつて限界掃流力の問題は、流体力学の新しい分野として発達してきた乱流理論によつて、ようやくその力学的機構が解明されるようになってきた。著者の究研はこの一つの試みであつて、若干の仮定が用いられたのにもかかわらず、よく実験結果を説明

することができたし、力学的機構の考え方もかなり模型的ではあるが、すつきりしているように思われる。また著者の行なつた閉管路による実験は、開水路によるものに比べて水深とか勾配の誤差が入らないので、かなり精度はよいと考えられ、この実験結果と理論結果とから導かれた実験公式 (1.66) 式および (1.67) 式は十分信頼するに足るものであると信じている。

最後にこの究研を行うに当つて終始御懇篤な御指導を賜つた石原教授をはじめ、実験に熱心な助力をいただいた土屋義人君に深く感謝するとともに、この究研が昭和 29 年度文部省科学研究費による究研の一部であることを付記して感謝の意を表したい。

## 参 考 文 献

- 1) C. M. White: The Equilibrium of Grains on the Bed of a Stream, Proc. Roy. Soc. A 174, 1940, pp.322-338.
- 2) 栗原道徳: 限界掃流力に就いて, 九州大学流体工学研究所報告, 第4巻, 第3号, 昭.23.9, pp.1-26.
- 3) A. Shields: Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung, Mitteilung der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Heft 26, Berlin, 1936.
- 4) H. Rouse: Discussion of "Laboratory Investigation of Flume Traction and Transportation, by Y.L.Chang", Trans. A.S.C.E., Vol.104, 1939, p.1304.
- 5) H. Rouse: Engineering Hydraulics, 1949, p.795.
- 6) 内田茂男: 砂粒の飛出し風速に関する一つの解析, 海岸砂地造林に関する調査報告, 治山事業参考資料第1輯, 林野局, 昭.24.2, pp.45-56.
- 7) J. Rotta: Das in Wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Strömungen, Ingenieur-Archiv, 18 Band, 1950, S.277-280.
- 8) Y. Iwagaki: On the Laws of Resistance to Turbulent Flow in Open Rough Channels, Proc. of the 4th Japan National Congress for App. Mech. 1954, March 1955, pp.229-233.
- 9) G. I. Taylor: Statistical Theory of Turbulence, Part IV: Diffusion in a Turbulent Air Stream, Proc. Roy. Soc. A 151, 1935, pp.465-478; 粘性流体 I, pp.333-346.
- 10) H. Reichardt: Messungen turbulenter Schwankungen, Naturwissenschaften, 26, 1938, S.404-408.
- 11) 谷 一郎: 乱流理論, p.34.

表-1.3 著者の実験公式にもとづく  
実験資料の分類

Table 1.3 Classification of experimental data based upon the author's formula

区分	実 験 者	$M$	$\beta$
小さい	Schaffernak	0.564	1.20
	P.E.I.	0.265	1.48
	U.S.W.E.S.	0.566	1.20
一致する	P.E.I.	0.278	1.78
	"	0.435	1.30
	Engels	0.229	1.53
	Kramer	0.414	1.32
	U.S.W.E.S.	0.643	1.15
	"	0.560	1.21
大きい	安芸・佐藤博士	0.680	1.14
	石原博士	0.385	1.35
	P.E.I.	0.366	1.40
	"	0.399	1.33
	"	0.357	1.37
	"	0.424	1.31
	Kramer	0.358	1.38
	"	0.461	1.28
	U.S.W.E.S.	0.280	1.46
	"	0.439	1.30
き	"	0.539	1.22
	"	0.406	1.33
	"	0.438	1.30
	"	0.525	1.23
	安芸・佐藤博士	0.182	1.60
	"	0.356	1.38
い	石原博士	0.292	1.45

- 12) 谷 一郎： 乱流理論, p.116.
  - 13) G. I. Taylor : Statistical Theory of Turbulence, Part III : Distribution of Dissipation of Energy in a Pipe over its Cross-Section, Proc. Roy. Soc. A 151, 1935, pp.455-464; 粘性流体 I, pp.323-332.
  - 14) L. J. Tison : Recherches sur la tension limite déentraînement des matériaux constitutifs du lit, Proc. Minnesota International Hydraulics Convention, Sep. 1953, pp.21-35.
  - 15) 石原藤次郎： 橋脚による河床洗掘に関する実験的研究, 第1編, 土木学会誌, 第24巻, 第1号, 昭.13.1, pp.23-55.
  - 16) 安芸皎一： 河相論, 主として河相と河川工法との關聯性に就いての研究(其の二), 土木学会誌, 第27巻, 第11号, 昭.16.11, pp.1029-1064.
  - 17) A. Schoklitsch : Über Schleppkraft und Geschiebepbewegung, Leipzig, 1914.
  - 18) A. Schoklitsch : Handbuch des Wasserbaues, zweite Auflage, 1 Bd., Wien, 1950, S.173.
  - 19) H. D. Krey : Modellversuche für einen Geschiebeführenden Fluss, Berlin, 1935, S.17.
  - 20) H. Kramer : Sand Mixtures and Sand Movement in Fluvial Models, Trans. A. S. C. E., Vol.61, 1935, pp.798-878.
  - 21) J. B. Tiffany, Jr. and C. E. Bentzel : 20) の discussion.
  - 22) Studies of River Bed Materials and Their Movement, with Special Reference to the Lower Mississippi River, U. S. Waterways Experiment Station, Paper 17, 1935.
  - 23) E. Indri : Nuove ricerche sulla forza di trascianamento nelle correnti liquide, Energia elettrica, H.4, 1936.
  - 24) Y. L. Change : Laboratory Investigation of Flume Traction and Transportation, Trans. A.S.C.E., Vol.104, 1939, pp.1246-1313.
  - 25) P. du Boys : Le Rhone et les Rivières à Lit Affouillable, Annales des Ponts et Chaussées, 1879.
  - 26) 安芸皎一, 佐藤清一： 砂粒河床模型実験の基本に関する実験 並に限界掃流力に関する研究, 土木試験所報告, 第48号, 昭.14.12, pp.23-64.
  - 27) 境 隆雄： 河床砂礫に対する限界掃流力に就いて, 土木学会誌, 第31巻, 第2号, 昭.21.12, pp.1-8.
  - 28) Ning Chien : The Present Status of Research of Sediment Transport, Proc. A.S.C.E., Vol.80, Separate No.565, 1954, pp.1-33.
  - 29) 久宝 保 : On the Critical Tractive Velocity of a River-Flow, 土木学会論文集, 第14号, 昭.27.9, pp.1-5.
  - 30) 木村春彦, 大内正夫 : 堆積粒子の転動に関する一考察, 土木学会誌, 第39巻, 第8号, 昭.29.8, pp.411-414.
  - 31) M. Fabre : Les études débits solides des cours déau, Annales des Ponts et Chaussées, 106 Année, 1936.
-