

# 数値シミュレーションによるひびわれ界面における 非線形挙動の考察

NUMERICAL INVESTIGATION ON THE NONLINEAR BEHAVIOR  
OF CRACK SURFACE IN CONCRETE

吉川弘道\*・吳智深\*\*・田辺忠顕\*\*\*

By Hiromichi YOSHIKAWA, Zhishen WU and Tada-aki TANABE

The authors have been developing the constitutive model for a single crack in concrete and making experimental identification of the four basic coefficients<sup>5)~7), 15)</sup>.

In the present paper, the nonlinear behavior characterizing the crack surface is discussed on the basis of numerical results calculated from the authors' proposed constitutive model. Moreover, comparison to Bazant-Gambarova's model is made, and path-dependency and Coulomb's friction law being compared with rock joints are examined. It is found that numerical simulation may be a useful tool to quantitatively analyze the characteristics of cracked concrete, being comparable to experimental studies.

*Keywords:* crack surface, constitutive model, numerical simulation, shear transfer mechanism, crack dilatancy, Coulomb's friction law, path-dependence

## 1. まえがき

コンクリートのひびわれ挙動は、せん断伝達、クラック・ダイレイタンシー、直交する補強鋼材の拘束効果など、従来の連続体力学(continuum mechanics)の延長線では取り扱えない特異な非線形挙動が存在する。このため、多くの精力的な実験やこれに基づくモデル化の提案がなされてきた(これらについては、文献12)の5章, 13), 14)に詳しいが、一方、岩盤節理についても同様な研究活動があり、たとえば2)~4), 9), 10), 16), 17)などがある)。

そこで、著者らは、これまでの一連の論文<sup>5)~7), 15)</sup>において、二次元場におけるひびわれ界面を対象として、増分形による構成方程式を解析的に定式化するとともに、関連する基本4係数を実験的に同定した。加えて、国内外の主要実験と比較・照合し、良好な結果を確認することができた。

本文は、このような構成方程式を用いて数多くの数値

シミュレーションを実施し、その計算結果をもとに、①せん断伝達や拘束条件の影響などのひびわれ界面特有の非線形挙動の再現性、②Bazant-Gambarovaによるrough crack モデルとの比較、③経路依存性に関する検討、④クーロン摩擦則の成立についての検討および岩盤節理を含む既往実験結果との比較、についての考察を行い、一連の既往研究の統論とするものである。

これによって、数値計算結果をあたかも実験結果のように認識し、これを整理・分析することによって、これまでの実験手法では比較的困難な諸条件を安価でかつ短時間に再現することができると考えられる。trial and error を何回も試行することが可能で、数値シミュレーションは実験研究とならぶ有力な手法となることが期待される。

## 2. ひびわれ界面の構成方程式と基本4係数

二次元問題でのひびわれ挙動を取り扱う場合、その主要な力学的状態量は、不連続変位  $\delta_n$ ,  $\delta_t$  とコンクリートの界面応力  $\sigma_n^c$ ,  $\tau_{nt}^c$  となるが(図-1参照)、そのモデル化に際しては、一般に次式のような増分型構成方程式が用いられる<sup>1)~4), 11)</sup>。

\* 正会員 工博 武藏工業大学講師 工学部土木工学科  
(〒158 世田谷区玉堤1-28-1)

\*\* 学生会員 工修 名古屋大学大学院 工学部土木工学科  
(〒464 名古屋市千種区不老町)

\*\*\* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科(同上)

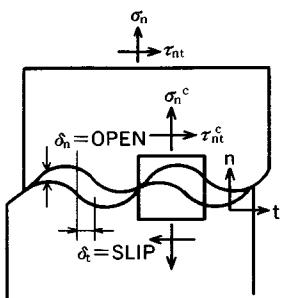


図-1 ひびわれ界面における作用応力  $\tau_{nt}^c$ ,  $\sigma_n^c$  と不連続変位  $\delta_t$ ,  $\delta_n$  (界面の力学4量)

$$\begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{tt} & B_{tn} \\ B_{nt} & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\delta_n \end{Bmatrix} \quad (1-a)$$

または、

$$\{d\sigma_c\} = [B] \{d\delta\} \quad (1-b)$$

ここで、 $B_{tt}$  はせん断剛性、 $B_{nn}$  は垂直剛性を表わし、また非対角項の  $B_{nt}$ ,  $B_{tn}$  は交差項として機能する。これらは、主として界面の力学4量 ( $\tau_{nt}^c$ ,  $\sigma_n^c$ ,  $\delta_t$ ,  $\delta_n$ ) やおよびコンクリート母材の特性値や界面の粗度によって変化するものであり、複雑な非線形構成則を形成する。

界面の力学4量を式(1)のような形で表現することは、すでに岩盤力学やコンクリート工学の両分野で試みられているが、いずれも十分に完成されたものとはいがたく、特に非対角項を0と簡略化する場合が多い<sup>2)</sup>。

そこで、著者らは、次のような構成方程式を導出し、既報<sup>5)</sup>にて詳細に論じた。

$$\begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} = k_t \begin{bmatrix} 1 & -(1-\xi) \frac{1}{\beta_a} \\ -\frac{1}{\mu_s} & \frac{1}{\mu_s \beta_a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\delta_n \end{Bmatrix} \quad (2)$$

または、その逆関係式として次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\delta_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{\xi k_t} \begin{bmatrix} 1 & (1-\xi) \mu_s \\ \beta_a & \mu_s \beta_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ただし、

$$\xi = \mu_s \beta_a \frac{k_n}{k_t} \quad (4)$$

ここで、 $k_t$  はひびわれ界面でのせん断剛性、 $k_n$  は垂直剛性を表わし、MPa/mm の次元をもつ。また、 $\beta_a$  はダイレイタンシー比、 $\mu_s$  は摩擦係数とよび、いずれも無次元量である ( $\xi$  はこれら4個の係数で決定される無次元パラメーターである)。これら4係数は、力学的状態量  $\tau_{nt}^c$ ,  $\sigma_n^c$ ,  $\delta_t$ ,  $\delta_n$  と表-1のような相関関係をもつ係数として定義されたものである。 $k_n$ ,  $k_t$ ,  $\beta_a$ ,  $\mu_s$  は、不連続界面の力学特性を記述する際の最も基本的なものであり、構成則の“基本4係数”と総称する。

基本4係数は、たとえば、コンクリートの縦弾性係数、せん断弾性係数、ポアソン比に相当するもので、実験的

表-1 界面の力学4量と基本4係数との相関関係

界面4量	せん断応力 $\tau_{nt}^c$	垂直変位 $\delta_n > 0$ (ひびわれ幅)
せん断変位 $\delta_t$ (すべり量)	せん断剛性 $k_t$	ダイレイタンシー比 $\beta_a$
垂直応力 $\sigma_n^c < 0$	摩擦係数 $\mu_s$	垂直剛性 $k_n$

に決定されるのが通例である。そこで、著者らの実験も含めた国内外の7研究グループ114供試体におよぶ国内外的主要実験結果を分析することによって、基本4係数の非線形モデルを同定し、表-2に示すような結果を得た<sup>6),7)</sup>。これらの諸実験は、主としてコンクリートの圧縮強度が  $f_c = 20 \sim 56$  MPa、骨材の最大寸法が  $D_a = 5 \sim 19$  mm の範囲のものである<sup>21)</sup>。

すなわち、せん断剛性  $k_t$  は基本的にせん断変位 (すべり)  $\delta_t$  の関数で表わされるが、最大せん断剛性  $K_{IST}$ 、そのときのせん断変位  $\delta_{t1}$  およびせん断強度  $\tau_u$  の3パラメーターを有し、これらは  $a_1 \sim a_{12}$  の定数で決定される。 $f_c$  はコンクリート母材の圧縮強度、 $\tau_0$  はひびわれのないときのせん断強度、 $D_a$  は骨材の最大寸法を示す。 $K_0$ ,  $q$  は諸係数から定まるパラメーターである。垂直剛性  $k_n$  は、ひびわれ直交方向の変位 (ひびわれ開口)  $\delta_n$  とせん断変位  $\delta_t$  両者の関数で表わされ、定数  $b_1$ ,  $b_2$  をもつ。

一方、交差係数については、摩擦係数  $\mu_s$  は  $\delta_n$  に、ダイレイタンシー比  $\beta_a$  は  $\sigma_n^c$  に依存し、おのおのが定数  $c_1$ ,  $c_2$  および  $c_3$ ,  $c_4$  で求められる (本研究は、ひびわれ界面の力学挙動のうち、せん断伝達を主に考えており、これがひびわれ幅、骨材寸法、コンクリート強度の影響を受け、きわめて複雑な非線形挙動を呈する。そのため、せん断剛性  $k_t$  は基本4係数のうちで最も多くのパラメーターを必要とする複雑な非線形モデルとなることを余儀なくされる)。

このような構成方程式の構築とその基本4係数のモデル化により、任意の変位経路 (ただし単調増加に限る) における界面応力を算出することができ、これを図-2に模式的に示した。

図-2(a) は  $\tau_{nt}^c = \tau_{nt}^c(\delta_t, \delta_n)$  とみることができ、 $\tau_{nt}^c$  は  $\delta_t$  についての単調増加関数、 $\delta_n$  についての単調減少関数となっていることがわかる。これは、せん断変形  $\delta_t$  の増加とともに、せん断応力  $\tau_{nt}^c$  が増加し (増分量は減少するが)、これがひびわれ直交方向の変位 (ひびわれ幅)  $\delta_n$  が大きいほど  $\tau_{nt}^c$  が小さいということを示すもので、通常の実験的事実に符合する。

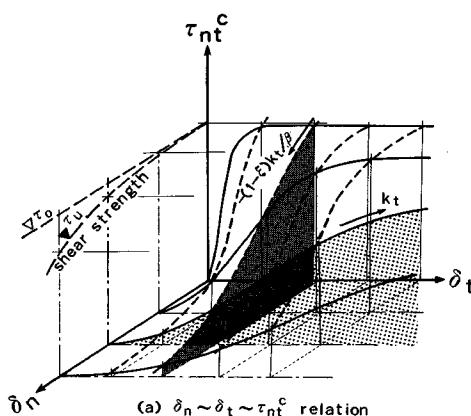
この相関曲面は、 $\tau_{nt}^c = \tau_u(\delta_n)$  なる漸近曲面を有し、 $\delta_n \rightarrow 0$  または  $\delta_t \rightarrow \infty$  のとき  $\tau_{nt}^c$  はこの漸近面に収束す

る。すなわち、 $\tau_u$ は、 $\delta_n=$ 一定 ( $>0$ ) のとき、そのひびわれ幅に対するせん断強度 (図中の▼) を表わし、 $\delta_n \rightarrow 0$  の収束値はひびわれのないときのせん断強度  $\tau_0$  (図中の▽) を意味する。この漸近面と  $\tau_{nt}^c - \delta_n$  面との交線は、せん断強度とひびわれ幅の関係を表わし、 $\tau_u$  が  $\tau_0$  ( $\delta_n=0$ ) から出発し、 $\delta_n$  の増加とともに徐々に減少することがわかる。

一方、図-2(b) は、 $-\sigma_n^c = -\sigma_n^c(\delta_n, \delta_t)$  とみることができ、 $-\sigma_n^c$  は  $\delta_n$  についての単調減少関数、 $\delta_t$  についての単調増加関数となっていることがわかる。本論では、

表-2 ひびわれ界面における基本 4 係数 ( $k_t, k_n, \beta_d, \mu_f$ ) の提案モデルと諸係数の同定値<sup>6)</sup>

SHEAR STIFFNESS : $k_t$ [MPa/mm]	CONSTANTS
$k_t = K_{IST} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{K_0}{\tau_u} (\delta_t - \delta_{t1}) \right]$	
$K_{IST} = a_1 \left( \frac{f_c}{25} \right)^{a_2} \left( \frac{D_a}{16} \right)^{a_3} \delta_n^{a_4}$	$a_1 = 3.74, a_2 = 0.60$ $a_3 = 0, a_4 = 0.96$
$\delta_{t1} = a_5 \left( \frac{f_c}{25} \right)^{a_6} \left( \frac{D_a}{16} \right)^{a_7} \delta_n^{a_8}$	$a_5 = 1.42, a_6 = 0$ $a_7 = 1.20, a_8 = 1.31$
$\tau_u = \tau_0 a_{10} + (\delta_n/D_a)^{a_{11}}$	$a_9 = a_{10} = 0.01$ $a_{11} = 2$
$\tau_0 = a_{12} f_c$	$a_{12} = 0.2 \sim 0.3$ (0.245)
$K_0 = K_{IST} (1+q)$	
$q = \tan h \left( \frac{K_0 \delta_u}{\tau_u} \right)$	
NORMAL STIFFNESS : $k_n$ [MPa/mm]	CONSTANTS
$k_n/f_c = b_1 b_2 (\delta_n - \beta_d \delta_t)^{-(b_2+1)}$	$b_1 = 0.0082$ $b_2 = 0.878$
FRICTIONAL RATIO : $\mu_f$	CONSTANTS
$\mu_f = c_1 \mu_0 \exp(c_2 \delta_n)$	$\mu_0 = 1.16$ $c_1 = 0.5 \sim 1.5$ $c_2 = 0.61$
DILATANCY RATIO : $\beta_d$	CONSTANTS
$\beta_d = c_3 \beta_0 \exp(-c_4 \left  \frac{\sigma_n^c}{f_c} \right )$	$\beta_0 = 1.64$ $c_3 = 0.5 \sim 1.5$ $c_4 = 0.42$



(a)  $\delta_n \sim \delta_t \sim \tau_{nt}^c$  relation

ひびわれ界面の垂直応力  $\sigma_n^c$  が圧縮 ( $\sigma_n^c < 0$ ) の場合 (F モードひびわれ) のみを取り扱い、これが引張 ( $\sigma_n^c > 0$ ) のときは、引張剛性としてのモデル化となり、いわゆる S モードひびわれの範疇となる (ひびわれモードの定義については、たとえば文献 20) に記した)。

また、 $\delta_t > 0$  の状態で  $\delta_n = 0$  を定義することができない。これは、ひびわれ幅を閉合 ( $\delta_n \rightarrow 0$ ) しようとするとき、あるすべりを生じた状態 ( $\delta_t \neq 0$ ) では界面の凹凸により完全に閉合できないことを意味する。このことは、( $\delta_n, \delta_t$ ) 平面上で非定義領域が存在することを意味し、

$$\delta_n < \beta_d \delta_t \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

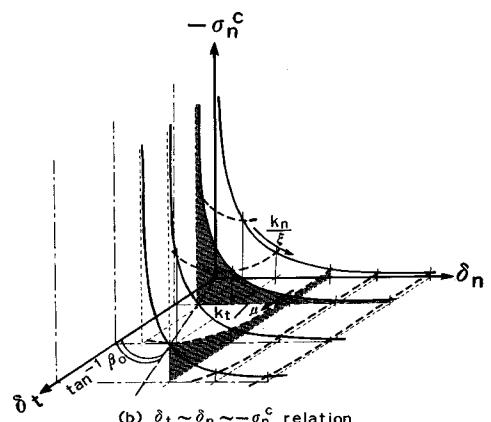
のように表わされる。

以上までの定性的考察は、経験的に得られた既往の実験結果とおおむね合致するものであり、ひびわれ界面での複雑な非線形性に、合理的・系統的な力学的解釈を付与するものであると考えられる<sup>5)</sup>。さらに既報<sup>6)</sup>ではこれを広範囲な実験結果と比較し、工学上ほぼ十分な予測精度を有することが確認された。

### 3. パラメトリック・シミュレーションによる考察

まず、ひびわれ界面のせん断応力  $\tau_{nt}^c$  に着目し、骨材の最大寸法  $D_a$  (mm) と圧縮強度  $f_c$  (MPa) をパラメーターとする数値シミュレーションを実施し、これを図-3 に示した。同図には 6 例を示しているが、いずれの場合も、ひびわれ開口量一定のもとでせん断変位を与えたときの計算結果 12 ケース ( $\delta_n = 0.01 \sim 1.2$  mm) を応答曲面として図示したものである。

図-3(a) は、コンクリートの圧縮強度  $f_c$  をパラメーター ( $f_c = 20, 30, 40$  MPa) として、 $\delta_n$  と  $\delta_t$  の関数としてせん断応力  $\tau_{nt}^c$  を示したものである。圧縮強度の増



(b)  $\delta_t \sim \delta_n \sim -\sigma_n^c$  relation

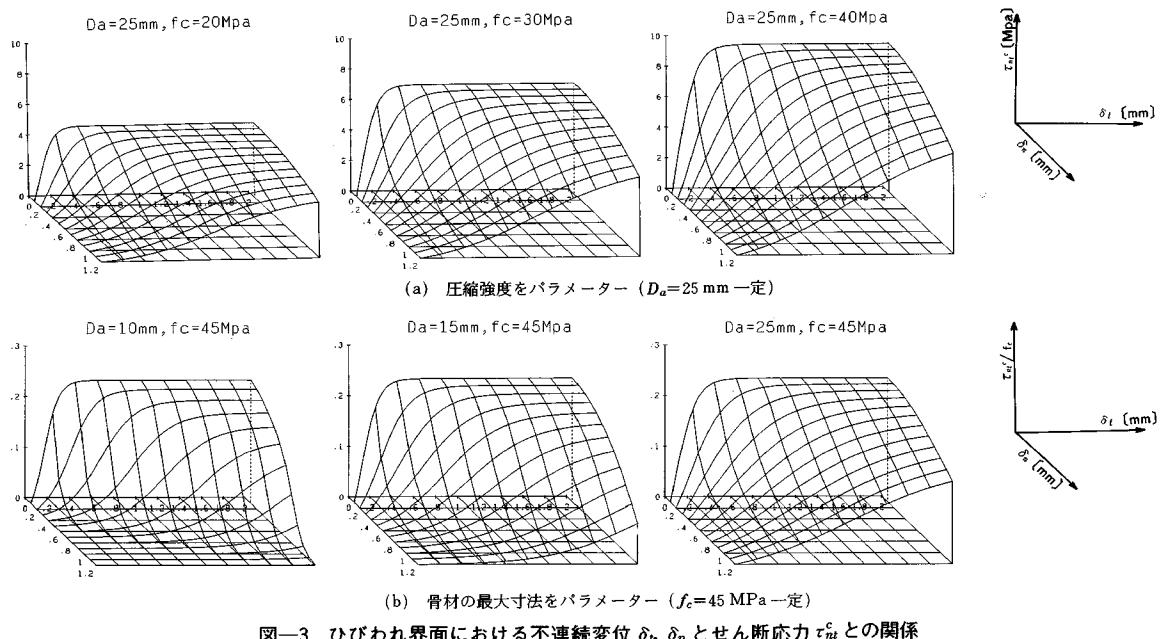


図-3 ひびわれ界面における不連続変位  $\delta_t$ ,  $\delta_n$  とせん断応力  $\tau_n^c$  との関係

加によってせん断応力は増加するが、その応答曲面はいずれもほぼ相似となっていることがわかる。図-3(b)は、 $f_c$ を一定として、骨材の最大寸法  $D_a$ をパラメーター( $D_a=10, 15, 25 \text{ mm}$ )として数値シミュレーションを行い、縦軸は  $f_c$ によって正規化し、 $\tau_n^c/f_c$ によって示した。この場合、ひびわれ幅  $\delta_n$ の小さい範囲ではこれら3者に大きな差はないが、 $\delta_n$ が大きくなるに従つて3者の違いが明瞭となり、骨材最大寸法の影響を知ることができる。

次に種々の異なったひびわれ直交方向の拘束条件を設定し、せん断すべり  $\delta_t$ を与えたときの界面力学4量の応答関係を数値シミュレーションによって考察した。拘束条件は、(a) 垂直変位制御( $\delta_n=\text{一定}$ )、(b) 弹性拘束( $r_n=50 \text{ MPa/mm}$ )、(c) 弹性拘束( $r_n=10 \text{ MPa/mm}$ )、(d) 垂直応力制御( $\sigma_n^c=\text{一定}$ )の4種類を設定し、おのおのの数値解析結果を図-4に一覧化した。

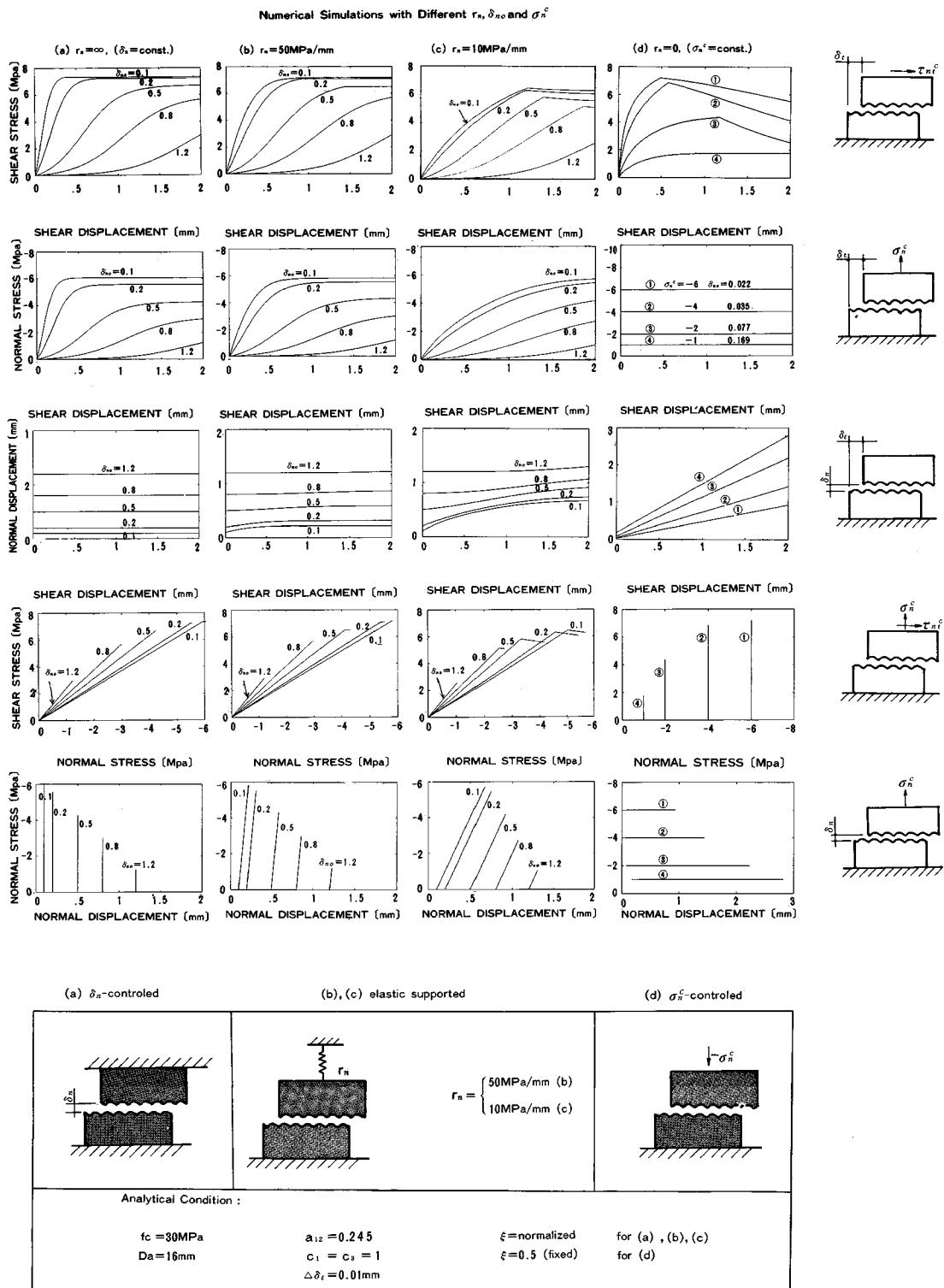
ここで、 $r_n$ はひびわれ面直交方向の変位を拘束する弾性ばねの定数を表わし、埋設鉄筋などの拘束体を模擬したものである。また、 $r_n=\infty$ とすることにより(a)のような変位制御となり、 $r_n=0$ の場合は(d)のように応力制御となり、拘束条件の両極端を表わす。

数値計算は、せん断変位  $\delta_t$ をきざみ幅  $\Delta\delta_t=0.01 \text{ mm}$ で増加させ、このときの残り3量の応答値を増分重ね合わせ法により算出したものである。また、材料については  $f_c=30 \text{ MPa}$ ,  $D_a=16 \text{ mm}$  の場合を設定している。また、図-4(a), (b), (c) では初期ひびわれ幅  $\delta_{no}$ をパラメーター( $\delta_{no}^c=0.1 \sim 1.2 \text{ mm}$ )とし、図-4(d) では一

定垂直応力  $\sigma_{no}$ をパラメーター( $\sigma_{no}^c=-1 \sim -6 \text{ MPa}$ )としている。

せん断伝達機構( $\tau_n^c \sim \delta_t$ 関係、図-4の最上段)に着目すると、せん断剛性が拘束条件の影響を受け、(a), (b), (c), (d)の順で剛性が低下し、かつしだいに軟化曲線(負勾配)を呈することがわかる。また、ダイレイタンシー効果(せん断すべりの増加によるひびわれ幅の開口)は、図-4の3段目の $\delta_t \sim \delta_n$ 関係から確認することができ、拘束条件の緩い(d), (c), (b), (a)の順で大きくなっている。さらに、ダイレイタンシー効果を拘束したときの圧縮垂直応力の増加( $\delta_t \sim -\sigma_{no}^c$ 関係、図-4の2段目)は当然ながらこの逆の順序となっている。また、いずれも初期ひびわれ幅  $\delta_{no}$ や一定垂直応力  $\sigma_{no}^c$ の諸条件の影響を受け、通例の直接せん断実験で観察される非線形特性をよく再現していると判断される。たとえば、ひびわれ幅の増加によってせん断剛性が低下すること(最上段)、垂直圧縮応力の増加によってひびわれ開口が抑制されせん断伝達が効果的となる(最右列1, 3段目)ことなどは、これまで認知されている実験的事実を満足している。

以上のこととは、ひびわれ界面直交方向の成分がせん断方向(またはその逆)の力学挙動に影響を与える、いわゆる交差効果(cross effect)をおのずから反映するものであり、著者らの指摘する重要な特徴である。これに対して、従来のせん断伝達モデルでは、ひびわれ幅や埋設鉄筋の量を直接因子として取り込む実験式が主であった。このような手法はその対象とする力学状

図-4 種々の拘束条件下における界面応力  $\tau_{nt}^c$  と不連続変位  $\delta_n$ ,  $\delta_{n0}$  との関係

- (a) ひびわれ幅  $\delta_n = \text{一定}$ , (b) 弹性拘束 ( $r_n = 50 \text{ MPa/mm}$ ),  
(c) 弹性拘束 ( $r_n = 10 \text{ MPa/mm}$ ), (d) 垂直応力  $\sigma_n^c (<0)$  一定

態や実験条件では有効であるが、界面の力学4量すべてを網羅し、これらを合理的に取り扱う解析モデルとしては不十分であるといわざるを得ない。

#### 4. Bazant-Gambarova モデルとの比較

Bazant-Gambarova による rough cracks モデル<sup>1)</sup>は、ひびわれ界面の非線形挙動に関する力学モデルの構築を試みたもので、出発点と最終目的は本論文の趣旨と同じくする。しかし、その解析モデルの定式化において、式(1)のような形式の構成則は用いず、巧妙な代数方程式の組立によりせん断伝達をはじめとして、せん断変形  $\delta_t$  による垂直圧縮応力  $-\sigma_n^c$  の励起、摩擦すべり (frictional slip) など種々の非線形性状、交差効果を表現している。

図-5は、Bazant-Gambarova モデルによる数値計算結果（文献1）のFig.4）に著者らによる提案モデルを加え両者を対応させたものである。同図は、ひびわれ界面の一定垂直変位  $\delta_{n0}$ （ひびわれ幅）をパラメーターとする変位制御による数値シミュレーションで、図-4(a)の場合に相当する。

著者らのモデルでは、最大せん断応力  $\tau_u$  の算定式として Bazant-Gambarova の実験式をそのまま採用し、共通しているが、その他の点については、手法・実験式とも全く異なるものである。同図の比較により、両モデルの良否や推定精度を直接論ずるものではないが、傾向的にはほぼ同様な数値計算結果を与え、かつ、両モデルとも実在の非線形力学挙動を矛盾なく表現しているといえる。

しかし、Bazant-Gambarova モデルは、ひびわれの開口量  $\delta_n$  が一定の場合を前提とするものであり、これが変化するようなより一般的な場合における適用性について

てはさらに検証が必要と思われ、著者らのモデルとは異なる。

#### 5. 経路依存性

次に、異なる変位経路を与えたときの応答応力を比較し、ひびわれ界面の力学挙動における経路依存性（path dependence）について考察する。図-6は、4つの異なる変位経路（path A～D）を設定し、このときの応答する界面応力  $\tau_n^c$ 、 $\sigma_n^c$  との関係を示したものである。さらに、表-3は最終変位における応答応力をまとめたものである。これら4経路は、初期値 ( $\delta_t=0 \text{ mm}$ ,  $\delta_n=0.5 \text{ mm}$ ) と最終変位 ( $\delta_t=\delta_n=2 \text{ mm}$ ) は同一で、その間の経路が異なり、図-6の最上段に示すとおりである。また、材料の特性として、骨材最大寸法  $D_a=16 \text{ mm}$ 、圧縮強度  $f_c=30 \text{ MPa}$  を想定している。

同図が示すように、せん断すべり  $\delta_t$  を増加させると、せん断応力  $\tau_n^c$  と圧縮垂直応力  $-\sigma_n^c$  は増加するが(2, 3段目)、垂直変位  $\delta_n$ （ひびわれ幅）を増加させると、 $\tau_n^c$  と  $-\sigma_n^c$  は減少する(5, 6段目)。しかも、計算された  $\tau_n^c$  と  $-\sigma_n^c$  の累積量は、 $\delta_t$  と  $\delta_n$  がどのような経路をたどってきたかによって異なっている。すなわち、本提案モデルは明瞭な経路依存性を呈するものであるといえる。

また、表-3から、初期値 S から最終点 G に至る経路が、右下に凸であるほど、すなわち  $\delta_t > \delta_n$  の領域をより多くたどるほど、その応答応力は大きくなることがわかる。

経路依存性は、連続体力学・不連続体力学を問わず最も特異な非線形現象の1つであり、その物理的な解釈は困難をきわめ、たとえば、直交流れ則（normality flow rule）に基づく塑性理論で説明することは到底不可能で

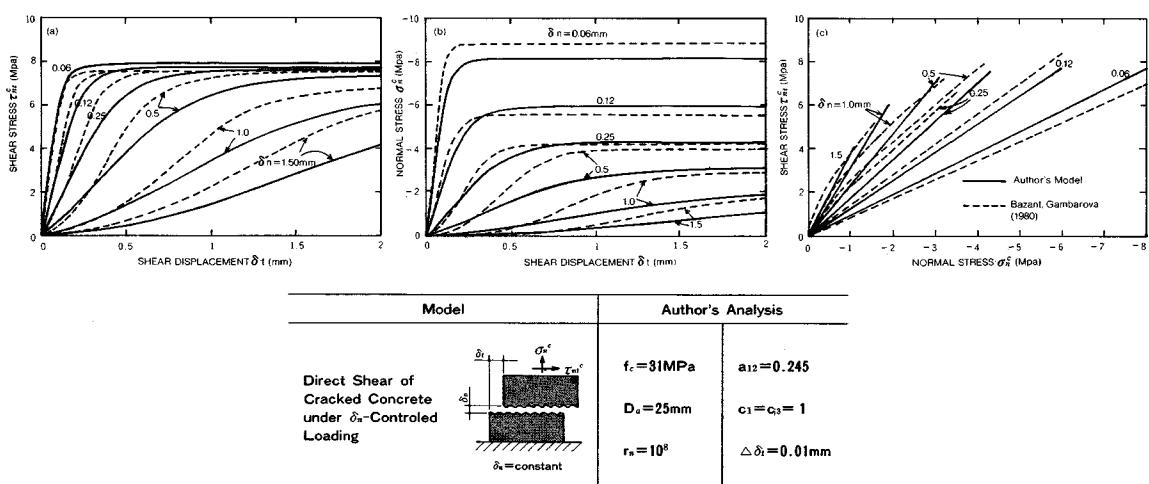
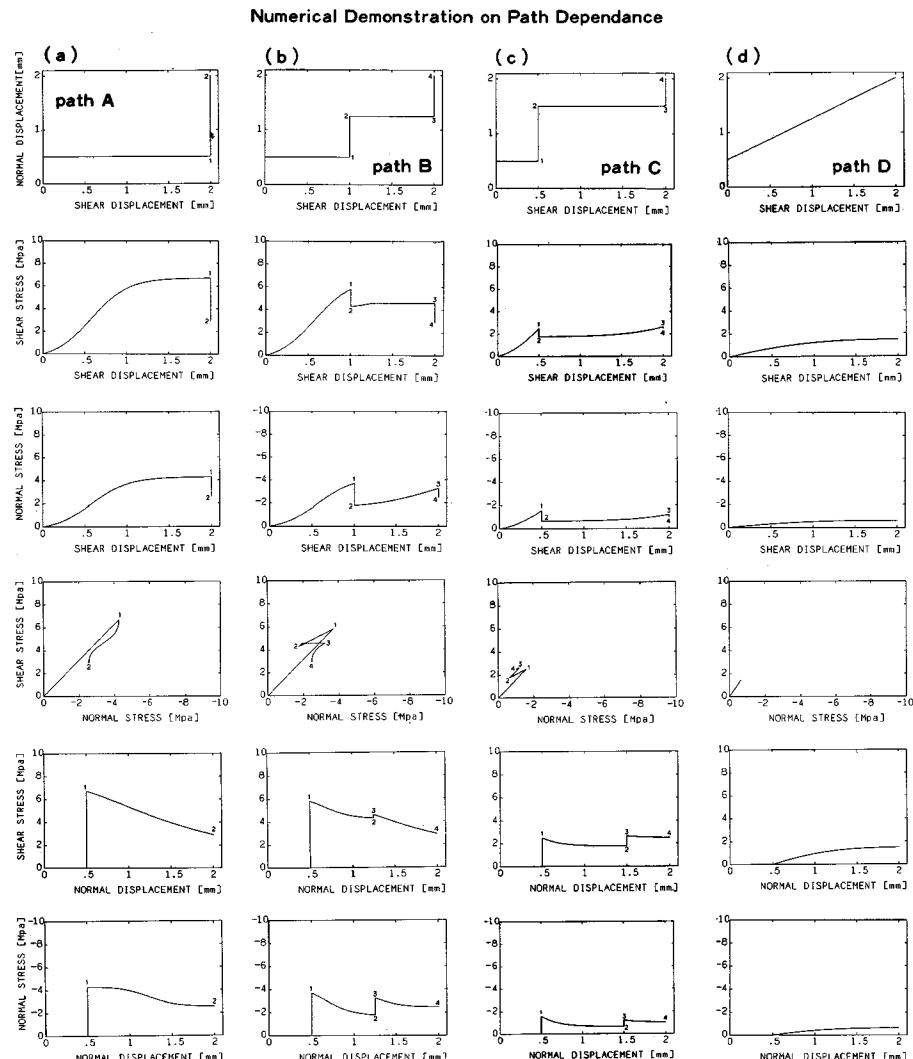


図-5 著者らの提案モデルと Bazant-Gambarova モデル<sup>1)</sup>との比較



Analytical Condition :  $D_a=16 \text{ mm}$ ,  $f_c=30 \text{ MPa}$

$$\xi=0.5, C_1=C_3=1$$

図-6 異なる変位経路に対するひびわれ界面の力学挙動

表-3 最終変位における応答応力の値

path	$\delta_n$	$\delta_t$	shear stress $\tau_{nt}^c$	normal stress $\sigma_n^c$ [MPa]
path A			2.89	-2.55
path B			2.89	-2.46
path C			2.49	-1.02
path D			1.47	-0.63

```

start S : ( $\delta_n, \delta_t$ )T=( 0 0.5 )
goal G : ( $\delta_n, \delta_t$ )T=( 2 2 ) (in mm)
concrete :  $D_a=16 \text{ mm}$ ,  $f_c=30 \text{ MPa}$ 

```

ある<sup>17)</sup>。本提案モデルは経路依存性を有することが数値シミュレーションから判明したが、これは、数学的には表-2に提示した基本4係数が式(2), (3)に対して不完全微分である<sup>6)</sup>ことに関係している。最終的には、実験による追認が不可欠であるが、経路依存性の存在を数値シミュレーションによって予測したことは重要な知見といえる。

## 6. クーロン摩擦則の成否

不連続な摩擦面がすべり出すときの最大せん断力  $\tau_u$  (これを静摩擦力と考える) は、その直交方向の圧縮応力  $\sigma_n^c (< 0)$  の関数として、通例次式で表現される。

$$\tau_u = -\mu_0 \sigma_n^c \quad (6)$$

上式はクーロン摩擦則 (Coulomb's friction law) とよばれ、 $\mu_0$  は静摩擦係数である。これは、Amontons (1699 年), Coulomb (1781 年) による金属摩擦の研究成果によるものであり<sup>8)</sup>、現在では接触面に関する古典理論ともいるべきもので、土質材料<sup>[18]</sup>、岩盤の節理<sup>[9], [16]</sup>やコンクリートの接合面<sup>[11]</sup>にも準用されている。

この静摩擦係数  $\mu_0$  は本研究で定義した摩擦係数<sup>5)</sup>  $\mu_s = (-\partial \sigma_n^c / \partial \tau_{nt}^c)^{-1}$  とは異なり、かつ文献 6) に記したように最大せん断強度  $\tau_u$  はひびわれ幅  $\delta_n$  で表現した。すなわち、本研究におけるモデル化の過程ではクーロン摩擦則を直接には採用していない。そこで、著者らによる構成モデルを用いた、数値計算結果を実験結果とみなし、これがクーロン摩擦則を満足するかどうか（すなわち、境界条件や応力履歴によらず、式 (6) がユニークに成立するかどうか）の検討を試みる。加えて、得られた静摩擦係数  $\mu_0$  の非線形性について考察し、岩盤節理を含めた既往実験結果と比較する。

そこで、ひびわれ直交方向の拘束係数や初期ひびわれ幅・定垂直応力をパラメーターとした 4 シリーズ 19 ケースの数値計算結果（図-4）を再度用いる。図-7 は、図-4(a)～(d) に示した、垂直応力  $-\sigma_n^c$ ～せん断応力  $\tau_{nt}^c$  曲線のうち、そのピーク値を連ね、破壊包絡線として示したものである（点線はそこに至るまでの応力経路を示す）。さらにすべてのピーク値を 1 つの図に収め、これを図-8 に示した。

図-7 からわかるように、得られた包絡線はいずれも非線形性を呈し、その割線勾配は圧縮垂直応力の増加とともに小さくなっている。しかも、図-8 ではこれらのピーク値がほぼ 1 本の破壊包絡線を形成していることがわかる（図-8 の実線は、これらを代表する 1 本の曲線として描いたものである）。すなわち、図-8 に示した曲線の勾配が代表する静摩擦係数  $\mu_0$  に相当し、これが垂直圧縮応力の関数として変化するものの、拘束条件、初期条件、応力履歴によらず、式 (6) がユニークに存在することを意味する。言い換えれば、特定された材料のひびわれ（ここでは  $f_c=30$  MPa,  $D_a=16$  mm の場合）に関して、外的な要因とは独立して、唯一のクーロン摩擦則に支配されることを数値計算上で明らかにしたものである。

著者らによる構成モデルは、式 (6) を直接陽な表現によって提供することはできないものの、摩擦現象についての古典理論を内包していることがわかった。また、ある材料に関して、その静摩擦係数を求めたいときは、その特定したケースについての数値計算を実行し、これを実測結果のごとくプロットし、せん断応力～垂直応力図の最大せん断応力を読み取ればよい。

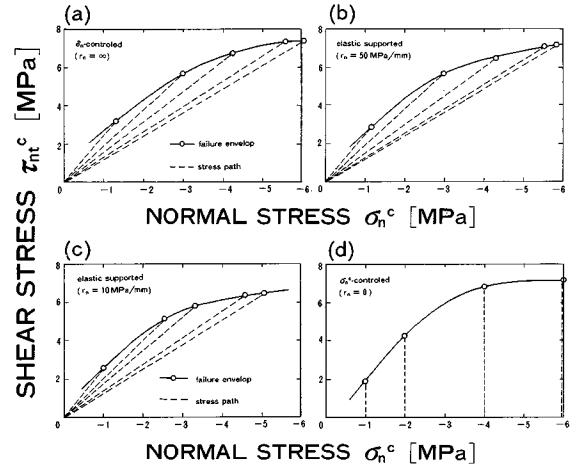


図-7 最大せん断応力の包絡線とそこまでの応答経路  
(図-4 における計算結果のまとめ)

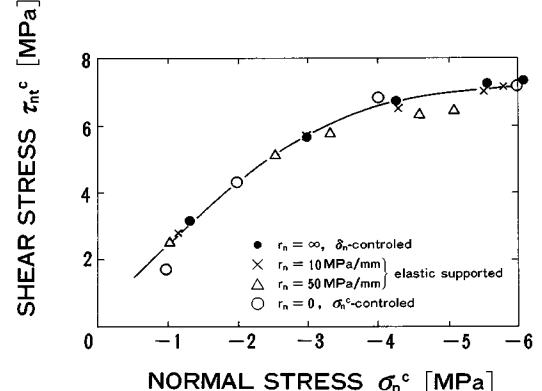


図-8 最大せん断応力と垂直圧縮応力との関係  
(4 シリーズ 19 ケースのまとめ)

図-9 は、図-8 で得られたマスター曲線の割線勾配を静摩擦係数  $\mu_0$  とし、これを垂直圧縮応力  $\sigma_n^c (< 0)$  についての関数として描くとともに、(a) Mattock-Hawkins による pull-off tests (8 シリーズの 6 体) の実験結果<sup>[19]</sup>、および (b) 岩盤の節理 (rock joint) に関する既往の実験結果<sup>[9], [16]</sup>を併記・比較したものである。同図の計算値・実験値は、ひびわれ面に作用する垂直圧縮応力の増加に従って、静摩擦係数  $\mu_0$  が減少しており、いずれも定性的にはよく合致していることがわかる。

特に、図-9(a) では、Mattock らによる初期ひびわれをもつコンクリートのせん断実験と比較したものであるが、定量的にも著者らの数値計算結果と酷似している（本実験ではひびわれ界面直交方向に鉄筋を有し、この最大応力度（＝鉄筋の降伏強度 × 鉄筋比）を垂直圧縮応力度とした）。

さらに、図-9(b) で引用した岩盤種別は砂岩、大理石、trachyte に限定されるが、その節理面における摩擦

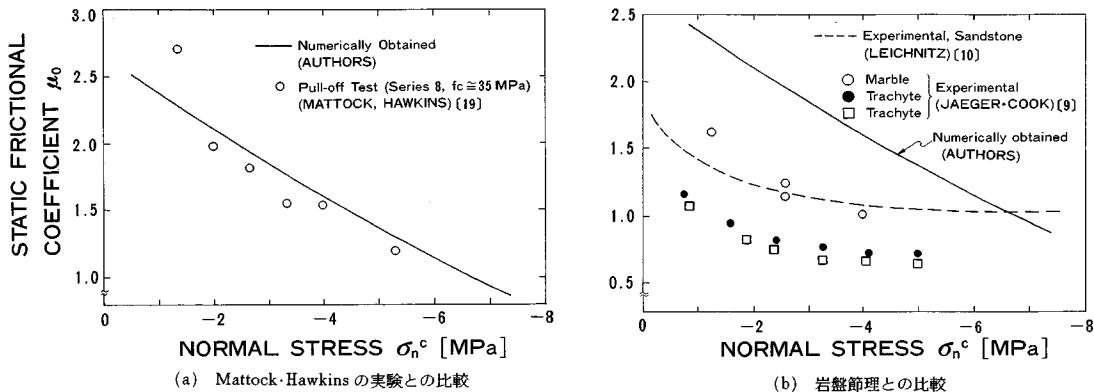


図-9 静摩擦係数と垂直圧縮応力との関係

係数はコンクリートのひびわれ面のそれに比べて小さい値となっており、垂直圧縮応力の増大とともに両者が近づいていくことがわかる。これは、コンクリートのひびわれ界面では大小骨材が露出していることにより、岩盤節理面に比べてより大きな凹凸となっているためであると考えられる。そのような骨材の凹凸も、ひびわれ面に作用するせん断応力や圧縮応力の増大によって破壊され、粗度が低下することによって、岩盤節理面に近くなるものと推察される。

## 7. 結 論

以上の考察に基づき、本論文の結論を次のように要約する。

(1) 著者らの提案した構成モデルを用いて、さまざまな材料特性、拘束条件、変位経路をパラメーターとする、ひびわれ界面における非線形挙動の数値シミュレーションを実施した。その結果、骨材寸法、母材コンクリートの強度、初期ひびわれ幅の影響を定量的に知ることができた。特に、せん断伝達機構に着目すると、これがひびわれ面を横切る鋼材の剛性または垂直応力にも影響を受けることがわかった。このようなことは、これまでの実験的事実を追認するものであり、ひびわれ界面の非線形性をよく再現しているといえる。

(2) Bazant-Gambarovaによるrough crack モデルは、構成マトリックスの形式をとらないが、本論文の目的と同じくする。これを著者らの構成モデルによる数値計算結果と比較した結果、両モデルは定量的にはほぼ同様な傾向を与えることがわかった。

(3) 4つの異なる変位経路を与えたときの応答するせん断応力と垂直応力を算出し、経路依存性について検討した。その結果、最終変位は同一であるにもかかわらず、その応答応力値はすべて異なり、最終点に達するまでの変位経路に依存することがわかった。本提案モデル

は、ひびわれ界面の挙動において経路依存性が存在することを明瞭に予測するものであるが、これが実在するか否かについては実験的検証による追認が必要である。

(4) 摩擦すべりに対する古典理論としてクーロン摩擦則があるが、本提案モデルがこれに従うかどうか数値計算による検証を試みた。そこで、コンクリートの性質を一定とし、拘束条件、初期ひびわれ幅、垂直応力をパラメーターとする19ケースの数値計算結果を整理した。その結果、算出された静摩擦係数は外的な力学条件や初期条件に影響を受けることなくほぼ1つの曲線を形成し、非線形ながらクーロン摩擦則を満足することがわかった。

また、この数値計算を既往のコンクリートや岩盤節理の実験結果と比較すると、両者とも静摩擦係数が垂直圧縮応力の単調減少関数となり、定性的に合致することがわかった。定量的には、コンクリートひびわれ面の方が粗度が大きいため、岩盤節理と比べて、同等か2~3倍程度大きい値となっている。

本文は、数値シミュレーションによる計算結果を分析・考査したもので、ひびわれ界面の特有な非線形挙動についての有用な知見を得ることができたといえる。このような手法により、これまでの実験研究を直ちに数値実験に置き換えるとは考えないが、両者を適当に組み合わせることにより、これまでになく効率的かつ広範囲な研究が可能となり、今後の有力な一研究手法と期待される。

## 参 考 文 献

- 1) Bazant, Z.P. and Gambarova, P.: Rough Cracks in Reinforced Concrete, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, No. ST 4, pp. 819~842, April, 1980.
- 2) Heuze, F.E. and Barbour, T.G.: New Models for Rock Joints and Interfaces, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 108, No. GT 5,

- pp. 757~776, May, 1982.
- 3) Xiurun, G. : Non-Linear Analysis of a Joint Element and Its Application in Rock Engineering, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 5, No. 3, pp. 229~245, Sep., 1981.
  - 4) Goodman, R. E. and Dubois, J. : Duplication of Dilatancy in Analysis of Jointed Rocks, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 98, No. SM 4, pp. 399~422, Apr., 1972.
  - 5) 吉川弘道・田辺忠顕：コンクリート部材のひびわれ界面における力学的挙動に関する解析的研究, 土木学会論文集, No. 372/V-5, pp. 101~110, 1986. 8.
  - 6) 吉川弘道・呉 智深・田辺忠顕：コンクリートのひびわれ界面に関する構成方程式と基本4係数の同定, 土木学会論文集, No. 408/V-11, pp. 61~70, 1989. 8.
  - 7) 吉川弘道・田辺忠顕：不連続面の力学挙動に関する構成モデル, 第19回岩盤力学に関するシンポジウム, 土木学会, pp. 381~385, 1987. 2.
  - 8) Bowden, F. P. and Tabor, D. (曾田範宗訳)：固体の摩擦と潤滑, 丸善, 1982. 1.
  - 9) Jaeger, J.C. and Cook, N.G.W. : Fundamentals of Rock Mechanics (third edition), London, Chapman and Hall, 1979.
  - 10) Leichnitz, W. : Mechanical Properties of Rock Joints, Int. J. Rock Mech. Min. & Geomech. Abstr., Vol. 22, No. 5, pp. 313~321, 1985.
  - 11) Birkeland, P. W. and Birkeland, H. W. : Connections in Precast Concrete Construction, ACI Journal, Proceedings V. 63, No. 3, pp. 345~367, March 1966.
  - 12) The Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures of the Structural Division Committee on Concrete and Masonry Structures : State-of-the-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete, ASCE, New York, 1982.
  - 13) RC構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコロキウム論文集, 第1回, 1982. 6, 第2回, 1983. 10, 日本コンクリート工学協会.
  - 14) 岡村 甫・前川宏一：研究展望—鉄筋コンクリートにおける非線形有限要素解析, 土木学会論文集, No. 360/V-3, pp. 1~10, 1985. 8.
  - 15) Yoshikawa, H. and Tanabe, T. : An Analytical Model for Frictional Shear Slip of Cracked Concrete, Proceedings of IABSE Colloquium on Computational Mechanics of Concrete Structures-Advances and Applications-, Delft, pp. 75~86, Sep. 1987.
  - 16) Ruina, A. L. : Constitutive Relations for Frictional Slip, Mechanics of Geomaterials-Rocks, Concrete, Soils-(Chapter 6), Edited by Z. P. Bazant, John Wiley & Sons, pp. 169~188, 1985.
  - 17) Desai, C. S. and Siriwardane, H. J. : Constitutive Laws For Engineering Materials with Emphasis on Geologic Materials, Prentice-Hall, Inc., 1984.
  - 18) 足立紀尚・龍岡文夫：土質力学(Ⅲ)—圧密・せん断・動的解析—, 土木学会編新体系土木工学18, 技報堂出版, 1981. 8.
  - 19) Mattock, A. H. and Hawkins, N. M. : Shear Transfer in Reinforced Concrete-Recent Research-, PCI Journal, pp. 55~75, March-April, 1972.
  - 20) 田辺忠顕・吉川弘道：クラックひずみを導入したコンクリート構造物の有限要素モデル, RC構造の有限要素解析に関するコロキウム, 日本コンクリート工学協会, pp. 65~72, 1984. 12.
  - 21) 吉川弘道：面内力を受ける鉄筋コンクリート部材の力学的挙動に関する解析モデル, 東京大学学位論文, 1986. 6.

(1988.9.27・受付)