【土木学会論文集　第408号／V-11　1989年8月】

コンクリートのひびわれ界面に関する構成方程式と基本4係数の同定

A CONSTITUTIVE EQUATION OF A SINGLE CRACK IN CONCRETE AND IDENTIFICATION OF FOUR BASIC COEFFICIENTS

吉川弘道*・呉　智深**・田辺忠顕***
By Hiromichi YOSHIKAWA, Zhishen WU and Tada-aki TANABE

The authors proposed a constitutive equation that relates relative displacements and applied stresses on cracked surfaces of concrete in the plane stress state[6].

In the paper, the four basic coefficients, such as the shear stiffness, the normal stiffness, the dilatancy ratio and the frictional coefficient, are identified making use of experimental results from the presently available literature.

The proposed model is then compared with the mechanical response of direct shear tests and reasonably good agreement is obtained.

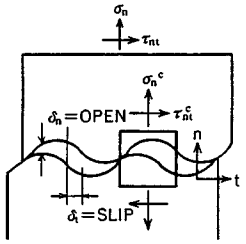
Keywords: *crack surface, constitutive equation, shear stiffness, normal stiffness, dilatancy ratio, frictional coefficient, identification, coupling effect*

1. はじめに

ひびわれ界面に沿って，せん断力が伝達される場合，これによりせん断すべりが生じる一方で，ひびわれ幅の開口やひびわれ直交方向の軸圧縮の増大が励起され，界面の力学量すべてが影響し合う複雑な力学挙動を呈する．ここで，σ_n^c, τ_{nt}^c をコンクリートのひびわれ界面に生じる，ひびわれ垂直方向と接線方向の応力，また，δ_n（ひびわれ幅）と δ_t（すべり）をひびわれ界面での相対的不連続変位量とすると（図—1），二次元問題（平面応力）の場合，これら4量はひびわれに伴う非線形挙動を記述する際の重要な力学的状態量となる（下添字 n, t は，ひびわれ界面の法線方向（normal）と接線方向（tangential）を示し，これら4量を n-t 座標で定義する．また，上添字 c はコンクリートを意味する）．

そして，ひびわれ解析においては，これらの界面応力 σ_n^c, τ_{nt}^c と不連続変位量 δ_n, δ_t（これらを“界面の力学4量”と総称する）との構成関係を構築することが最も重要な要件である．

ひびわれ界面における特有の非線形現象については，古くから個々に認知され，コンクリート構造・岩盤力学の両分野で多くの議論が展開されてきた（1）の5章，2), 3)）．たとえば，ひびわれ面の凹凸によるせん断伝達（shear transfer）や骨材のかみ合い効果（aggregate interlock），または摩擦接触におけるクーロン則（Coulomb criterion）の適用などがある．さらに，ひびわれ面でのすべりに伴うひびわれ幅の開口（crack dilatancy）なども含め，その実験的[4]・解析的[5]な研究は数多くにのぼる．しかし，これらは別々に議論され，そのモデル化や実験式は個々に提示されるのみで，統括的に取り扱ったものは限られたものとなっている．



図—1　ひびわれ界面における応力 τ_{nt}^c, σ_n^c と不連続変位 δ_t, δ_n の定義

* 正会員　工博　武蔵工業大学講師　工学部土木工学科
（〒158　世田谷区玉堤1-28-1）
** 学生会員　工修　名古屋大学大学院　工学部土木工学科
（〒464　名古屋市千種区不老町）
*** 正会員　工博　名古屋大学教授　工学部土木工学科(同上)

そこで，著者らは，ひびわれ界面の非線形性を記述する構成関係式を解析的に導出する[6]とともに，実験結果の取扱いおよび実験定数の同定に関する考察を行った．本文では，導出した構成マトリックスに含まれる4個の諸係数（せん断剛性，垂直剛性，ダイレイタンシー比，摩擦係数）を実験的に定め，具体的な数式として提示し，既報[6]の続報とするものである．加えて，実験結果との比較を行い，せん断伝達のメカニズムについて考察するとともに，提案モデルの予測精度を証査するものである．

2. 構成方程式の導出

著者らが既報[6]にて提案した，ひびわれ界面の力学的挙動に関する構成関係式の導出過程を以下のように要約・再記する．まず，既往の実験結果を概観し，次のような関係式を出発点とする．

$$\left.\begin{aligned}\delta_t&=\delta_t(\tau^c_{nt},\ \delta_n)\\ \sigma^c_n&=\sigma^c_n(\delta_n,\ \tau^c_{nt})\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

すなわち，上式の第1式は，1つの変位成分（t 方向）を，同方向の応力成分と他方向の変位成分の関数として，第2式は，1つの応力成分（n 方向）を同方向の変位成分ともう一方の応力成分で表わしていることが特徴である．これらを，増分形式にするために，全微分をとると下式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}d\delta_t&=\frac{\partial\delta_t}{\partial\tau^c_{nt}}d\tau^c_{nt}+\frac{\partial\delta_t}{\partial\delta_n}d\delta_n\\ d\sigma^c_n&=\frac{\partial\sigma^c_n}{\partial\delta_n}d\delta_n+\frac{\partial\sigma^c_n}{\partial\tau^c_{nt}}d\tau^c_{nt}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

ここで，上式に含まれる偏導関数に対して，次式のような4つの諸係数を定義・導入する．

$$k_t\equiv\left(\frac{\partial\delta_t}{\partial\tau^c_{nt}}\right)^{-1},\quad k_n\equiv\frac{\partial\sigma^c_n}{\partial\delta_n}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$\mu_f\equiv\left(\frac{-\partial\sigma^c_n}{\partial\tau^c_{nt}}\right)^{-1},\quad \beta_d\equiv\frac{\partial\delta_n}{\partial\delta_t}\quad\cdots\cdots(4)$$

k_t はひびわれ界面でのせん断剛性，k_n は垂直剛性，また，β_d はダイレイタンシー比（dilatancy ratio），μ_f は摩擦係数（frictional coefficient）を表わす．これらを基本4係数と称し，力学4量との関係を表—1に要約する．基本4係数を式（2）に代入するとともに，マトリックス表示すると最終的に次式を得る．

$$\begin{Bmatrix}d\tau^c_{nt}\\ d\sigma^c_n\end{Bmatrix}=k_t\begin{bmatrix}1 & -(1-\xi)\dfrac{1}{\beta_d}\\ -\dfrac{1}{\mu_f} & \dfrac{1}{\mu_f\beta_d}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d\delta_t\\ d\delta_n\end{Bmatrix}\quad\cdots(5)$$

ただし，

$$\xi=\mu_f\beta_d\frac{k_n}{k_t}\quad\cdots\cdots(6)$$

上式が，著者らの提案する二次元場におけるひびわれ界面の構成方程式である．これによって，従来から議論されてきたせん断伝達に加えて，クラック・ダイレイタンシーやCoulomb摩擦などの交差効果（coupling effect），ひびわれの開口・閉合などを1つの方程式で一括して表現することが可能である．また，正定値（positive definite）に関する数学的要件も満足する．

表—1 界面の力学4量と基本4係数との相関関係

界面4量	せん断応力 τ^c_{nt}	垂直変位 $\delta_n>0$（ひびわれ幅）
せん断変位 δ_t（すべり量）	せん断剛性 k_t	ダイラタンシー比 β_d
垂直応力 $\sigma^c_n<0$	摩擦係数 μ_f	垂直剛性 k_n

そして，式（5）に含まれる基本4係数 k_t, k_n, β_d, μ_f のモデル化・数式化を具体的に提示することにより，本モデルは完遂するもので，これが本論文の目的である．

3. 基本4係数のモデル化と同定

基本4係数 k_t, k_n, β_d, μ_f は，そのときの状態量（界面の力学4量）の関数であることはもちろん，母材コンクリートの力学的特性（圧縮強度，弾性係数など）に依存し，ひびわれ面の粗度，骨材の最大寸法にも影響することが認められ，さまざまな実験活動が行われている（文献1）の5章）．

これまでの国内外の主要実験[4),9)~12),15),16)]は，せん断剛性のみに着目したものが多いが，一般的なモデル化に至っているとはいいがたく，さらに，垂直剛性 k_n，交差係数 μ_f, β_d に言及したものはほとんどないのが現状である．したがって，上記の要件すべてを満たす材料モデルを構築するには，さらに広範囲で系統的な実験研究が必要となる．

そこで，3. では，著者らによる実験結果も含めて，現在，入手し得る実験データのうちから，境界条件の明瞭なものを抽出し，基本4係数を実験的に同定するものである．これらを以下①~③に順次詳述するが，基本4係数の仮定した曲線と得られた係数をあらかじめ表—2に一括掲載する（本研究は，せん断伝達を主に考えており，これがまたきわめて複雑な非線形挙動を示すため，k_t は基本4係数のうち最も多くのパラメーターを必要とする複雑な実験式となっている）．

① せん断剛性 k_t のモデル化

ひびわれ界面のせん断剛性を与える接線係数 k_t は，式（3）より，

$$k_t\equiv\left(\frac{\partial\delta_t}{\partial\tau^c_{nt}}\right)^{-1}=\left.\frac{d\tau^c_{nt}}{d\delta_t}\right|_{\sigma_n=\text{const.}}\quad\cdots\cdots(7)$$

で表わすことができることから，初期ひびわれ幅が一定に保たれたときのせん断挙動について考える．この場合，

いくつかのせん断実験結果によれば，初期にやや急激なすべり（free slip）があり，その後骨材のかみ合いにより剛性が回復，摩擦すべり（frictional slip）を生じ，やがて最大耐力に達するのが一般的である．

そこで，これらのモデル化として，$0 \leqq \delta_t \leqq \delta_{t1}$ 間で接線剛性が徐々に増大（interlocking）し，$\delta_t = \delta_{t1}$ で最大剛性 K_{IST} となり，その後剛性が低下し，やがて最大せん断力 τ_u に漸近する，次式のような双曲線関数を仮定した（図—2参照）．

$$\tau_{nt}^{c} = \tau_u \cdot \frac{\tanh\left\{\frac{K_0}{\tau_u}(\delta_t - \delta_{t1})\right\} + q}{1+q} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$k_t = K_{IST} \cdot \mathrm{sech}^2\left\{\frac{K_0}{\tau_u}(\delta_t - \delta_{t1})\right\} \quad \cdots\cdots(9)$$

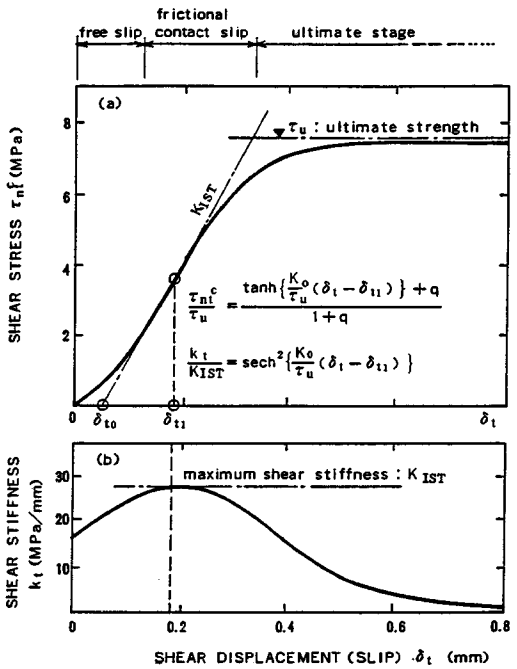
ここで，

$$K_0 = K_{IST}(1+q),\quad q = \tanh\left(\frac{K_0}{\tau_u}\delta_{t1}\right) \quad \cdots\cdots(10)$$

K_{IST} は最大せん断剛性，δ_{t1} はそのときのせん断変位，τ_u は最大せん断強度を表わす．K_0, q は，これら3係数から，式（10）により一義的に求まる（ただし，収束繰返し計算を必要とする）．すなわち，式（9）は，3パラメーター（K_{IST}, δ_{t1}, τ_u）によって特徴づけられる双曲線型のせん断変形モデルであるといえる．

この3パラメーターは，そのときのひびわれ幅 δ_n に大きく依存することは多くの実験で明らかにされているが，これはまた材料特性値としての圧縮強度 f_c と骨材の最大寸法 D_a にも影響を受けると考えられる．そこで，このような定性的特性を満足するように δ_n, f_c, D_a を影響因子とする実験式を仮定する（表—2参照，圧縮強度については，$f_c = 25$ MPa，骨材の最大寸法については，$D_a = 16$ mm を基準値としていることが同表から読み取れよう）．表中に示したように，最大剛性 K_{IST} には $a_1 \sim a_4$，そのときのすべり量 δ_{t1} には $a_5 \sim a_8$，最大せん断力 τ_u に対しては $a_9 \sim a_{12}$ の合計12個の実験定数を必要とする．これらを決定するため，既往の入手し得る実測データのうち，特に式（7）を満足するもの（すなわち，ひびわれ幅一定）を選び出し，同一図中にプロットすることにより，実験定数の同定を行った．

まず，最大せん断剛性 K_{IST} は，著者らによる実験も含めた既往の実験結果[4),9)~12)]より得られた75個のデータを用い，これらより回帰曲線を最小二乗法により算出した（図—3）．図—3(a) は $a_2 = 0$ としコンクリート強度の影響を無視した場合，(b) は $a_2 = 0.6$ としてこれを考慮した場合である．同図より明らかに，(b) の方がばらつきが少なく，不偏分散は，(a) で 0.121，(b) で 0.094 であり，コンクリート強度の影響を示すもので



図—2　ひびわれ界面におけるせん断挙動のモデル化

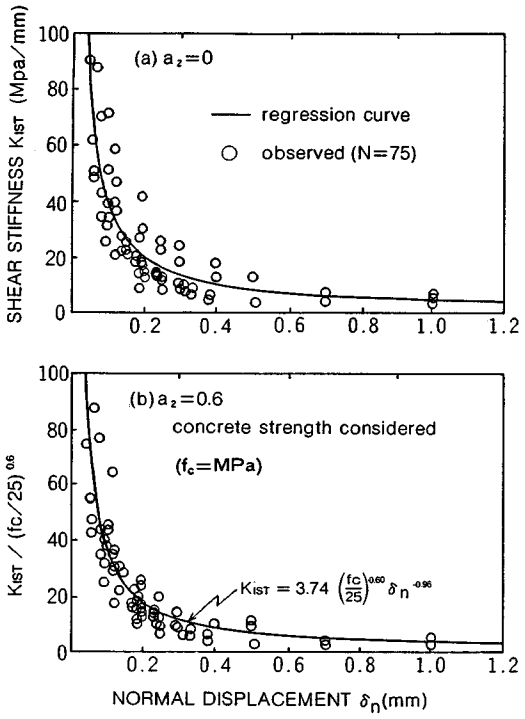
(a)　せん断応力～せん断変形の関係，

(b)　せん断剛性のモデル化（$\delta_{t1} = 0.18$ mm, $K_{IST} = 27$ MPa/mm, $\tau_u = 7.5$ MPa の場合）

表—2　界面の基本4係数（k_t, k_n, μ_f, β_d）に関する提案曲線と各定数の同定値

SHEAR STIFFNESS : k_t [MPa/mm]	CONSTANTS
$k_t = K_{IST}\,\mathrm{sech}^2\left\{\frac{K_0}{\tau_u}(\delta_t - \delta_{t1})\right\}$	
$K_{IST} = a_1\left(\frac{f_c}{25}\right)^{a_2}\left(\frac{D_a}{16}\right)^{a_3}\delta_n^{-a_4}$	$a_1 = 3.74$, $a_2 = 0.60$ $a_3 = 0$, $a_4 = 0.96$
$\delta_{t1} = a_5\left(\frac{f_c}{25}\right)^{a_6}\left(\frac{D_a}{16}\right)^{-a_7}\delta_n^{a_8}$	$a_5 = 1.42$, $a_6 = 0$ $a_7 = 1.20$, $a_8 = 1.31$
$\tau_u = \tau_0\frac{a_9}{a_{10} + (\delta_n/D_a)^{a_{11}}}$, $\tau_0 = a_{12}f_c$	$a_9 = a_{10} = 0.01$ $a_{11} = 2$
$K_0 = K_{IST}(1+q)$, $q = \tanh\left(\frac{K_0\delta_{t1}}{\tau_u}\right)$	$a_{12} = 0.2 \sim 0.3$ (0.245)

NORMAL STIFFNESS : k_n [MPa/mm]	CONSTANTS
$k_n/f_c = b_1 b_2(\delta_n - \beta_d\delta_t)^{-(b_2+1)}$	$b_1 = 0.0082$ $b_2 = 0.878$
FRICTIONAL RATIO : μ_f	CONSTANTS
$\mu_f = c_1\mu_0\exp(c_2\delta_n)$	$\mu_0 = 1.16$ $c_1 = 0.5 \sim 1.5$ $c_2 = 0.61$
DILATANCY RATIO : β_d	CONSTANTS
$\beta_d = c_3\beta_0\exp\left(-c_4\left\|\frac{\sigma_n^c}{f_c}\right\|\right)$	$\beta_0 = 1.64$ $c_3 = 0.5 \sim 1.5$ $c_4 = 6.42$



図—3 最大せん断剛性 K_{IST} に関する実験結果のまとめと最小二乗近似による各係数の決定

ある．そして，回帰計算の結果 K_{IST} の実験式として下式を得た．

$$K_{IST}=3.74\left(\frac{f_c}{25}\right)^{0.60}\delta_n^{-0.96} \quad \cdots\cdots(11)$$

（ただし，f_c：MPa，δ_n：mm）

なお，今回の分析では，骨材最大寸法の影響については，特に有意な差が認められず，$a_3=0$ とした．

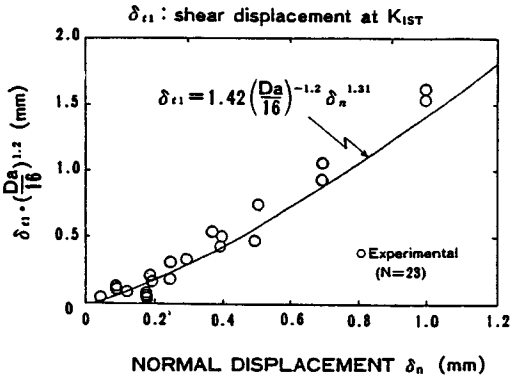
次に，K_{IST} 時のすべり量 δ_{t1} についても上記と同様の方法で実験値をまとめ，これを図—4 に示した．データ数は，図—3 より限られたものとなり 23 個であった．この結果，最小二乗法による回帰曲線として，下式を得た．

$$\delta_{t1}=1.42\left(\frac{D_a}{16}\right)^{-1.20}\delta_n^{1.31} \quad \cdots\cdots(12)$$

コンクリート強度についての有意な差は認められず，$a_6=0$ とした．最大せん断強度 τ_u については，既往の実験データでは十分な情報が得られず，Bazant, Gambarova[5] の実験式をそのまま採用した．すなわち，

$$\tau_u=\frac{0.01}{0.01+\left(\frac{\delta_n}{D_a}\right)^2}\tau_0,\quad \tau_0=0.245\,f_c \quad \cdots\cdots(13)$$

以上示した式 (11)～(13) で与えられるパラメーターを式（9）に代入することにより，種々の条件下の接線



図—4 最大せん断剛性時のせん断変位 δ_{t1} に関する実験結果のまとめと最小二乗近似による各係数の決定

せん断剛性 k_t を求めることが可能となった．

② 垂直剛性 k_n のモデル化

ひびわれ界面の垂直剛性は，式（3）から，

$$k_n\equiv\frac{\partial\sigma_n^c}{\partial\delta_n}=\frac{d\sigma_n^c}{d\delta_n}\Big|_{\tau_{nt}^c=\text{const.}} \quad \cdots\cdots(14)$$

と考えることができる．垂直剛性に関する既往の検討はきわめて数少ないが，図—5 のようなモデルを考える．すなわち，ある与えられた初期ひびわれ幅は垂直応力 $-\sigma_n^c$（圧縮応力）の増加により，$\delta_n=0$ に向かって閉合していくが，せん断方向に不整合 δ_t があった場合，完全に閉合することはなく，$\delta_n=0$ のかわりに，$\delta_n=\delta_n^*$ を漸近線としたものである．すなわち，$\sigma_n^c\sim\delta_n$ 関係および垂直剛性 k_n を次式で表現する．

$$-\sigma_n^c/f_c=b_1(\delta_n-\delta_n^*)^{-b_2} \quad \cdots\cdots(15)$$

$$k_n/f_c=b_1b_2(\delta_n-\delta_n^*)^{-(b_2+1)} \quad \cdots\cdots(16)$$

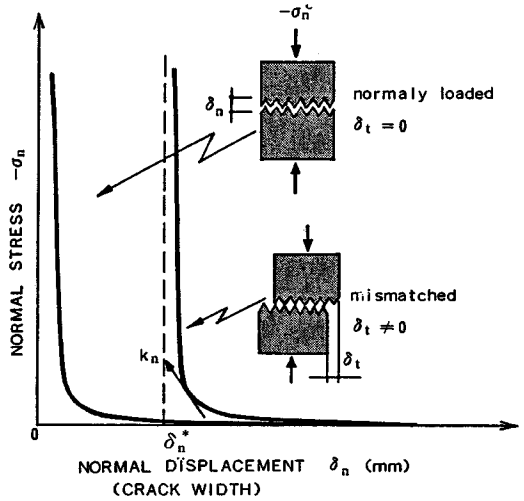
ここで，b_1，b_2 は材料定数を示す．δ_n^* は軸圧縮応力によって閉合しない残留ひびわれ幅を意味する．

次に，仮定した実験曲線式（15）の係数を決定するため，実験結果との照合を行った．図—6 は，吉川の行ったひびわれ界面での垂直載荷試験結果[13]の一部をとりまとめたもので，初期すべり量 δ_{t0} およびコンクリート圧縮強度 f_c をパラメーターとしている（また，載荷中は，せん断応力 τ_{nt}^c を一定にしている）．

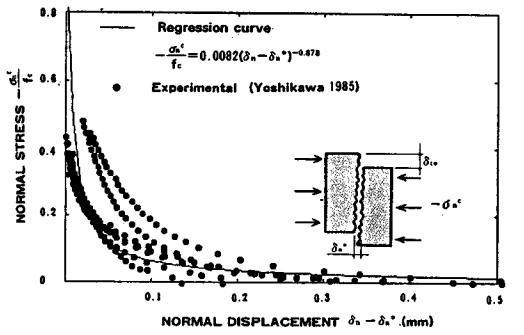
そして，一連の実験結果を $-\sigma_n^c/f_c\sim(\delta_n-\delta_n^*)$ によって正規化し，整理・図化した．これらは，残留ひびわれ幅 δ_n^* を実験曲線から読み取り，最小二乗近似により式（15）の各係数 b_1 と b_2 を算出し，実線にて図示したものである．その結果，実測データ群より $b_1=0.0082$，$b_2=0.878$ を同定し，次式の近似曲線を得ることができた．

$$-\sigma_n^c/f_c=8.2\times10^{-3}(\delta_n-\delta_n^*)^{-0.878} \quad \cdots\cdots(17)$$

図—6 の実験データはややばらつきを呈するが，いずれも同様の傾向を示すもので，ひびわれ界面でのひびわれ



図—5　ひびわれ界面における垂直応力と垂直変位の関係に関するモデル化



図—6　ひびわれ界面における垂直応力と垂直変位の関係に関する実験結果と最小二乗法による曲線近似

幅閉合の様子をほぼ近似し得ると考える．残留ひびわれ幅がどのような形で定義されるかについてはさらに検討が必要であるが，ここでは $\delta_n^*=\beta_d\cdot\delta_t$ で与えられるものと仮定する．

③　交差係数 μ_f, β_d

交差効果は，ひびわれ界面の特異な非線形性状を特徴づける重要な役割を担うが，そのモデル化・定量化はきわめて限られたものとなっている．これは，現象論としては認知されていたたとえば[10),14)]ものの，これらを非対角項として取り扱う解析手法が完備していなかったこと，ならびに交差係数を同定する際の実験的な困難さに起因していたものと判断される．そこで，前述した交差係数の定義式，

$$\mu_f\equiv\left(\frac{-\partial\sigma_n^c}{\partial\tau_{nt}^c}\right)^{-1}=\left.\frac{d\tau_{nt}^c}{-d\sigma_n^c}\right|_{\sigma_n=\text{const.}} \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\beta_d\equiv\frac{\partial\delta_n}{\partial\delta_t}=\left.\frac{d\delta_n}{d\delta_t}\right|_{\sigma_n^c=\text{const.}} \quad\cdots\cdots(19)$$

に従い，これらに合致する実験を実施することにより，交差係数を実験的に同定することを試みた．

まず，摩擦係数 μ_f については，ひびわれ幅を一定に保持した状態でせん断変形を与えたときの，せん断応力と垂直応力との比を求めればよい．そして，この条件に合致する実験結果（吉川[13)]，Laible[15)]，Paulay[4)]）を参照・分析した．加えて，Bazant, Gambarova[5)] については数値シミュレーション結果をそのまま引用し，実験結果の1つとみなした．そして，$-\sigma_n^c\sim\tau_{nt}^c$ 関係がほぼ直線的でその勾配が δ_n のみに依存すると考え，摩擦係数 μ_f を算出した．これらを図—7にプロットするとともに，最小二乗近似式

$$\mu_f=1.16\exp(0.61\,\delta_n) \quad\cdots\cdots(20)$$

を得た．すなわち，ひびわれ幅の増大とともに摩擦係数 μ_f は増加するもので，このことは $-d\sigma_n^c=d\tau_{nt}^c/\mu_f$ が示すように，あるせん断応力増分に応答する垂直応力（圧縮）の増加分が減少することを意味する．

ダイレイタンシー比 β_d については，垂直応力を一定としたときのせん断変形（すべり量）と垂直変形（ひびわれ幅）の関係を求めればよい．そこで，ひびわれ面直交方向の垂直応力を一定としたときの直接一面せん断実験および直接二面せん断実験を実施し，ダイレイタンシー比 β_d を求めた[13)]．

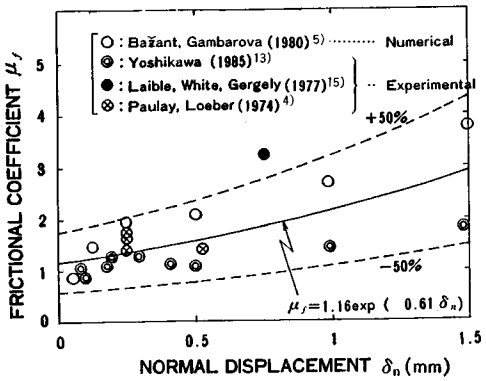
ダイレイタンシー比 β_d は，載荷過程において，増加または減少する非線形パラメーターとなることが予想されたが，得られた $\delta_n\sim\delta_t$ は比較的直線性に富み，最大せん断力以降の軟化域においてもほぼ同一の勾配を追随するもので，β_d を一定とした．そして，種々の定垂直応力 $-\sigma_n^c$ をパラメーターとし，対応する β_d を図—8に示した．これより，載荷垂直応力の増加によって β_d が減少することが認められ，次式の近似曲線を得た．

$$\beta_d=1.64\exp\left(-6.42\left|\frac{\sigma_n^c}{f_c'}\right|\right) \quad\cdots\cdots(21)$$

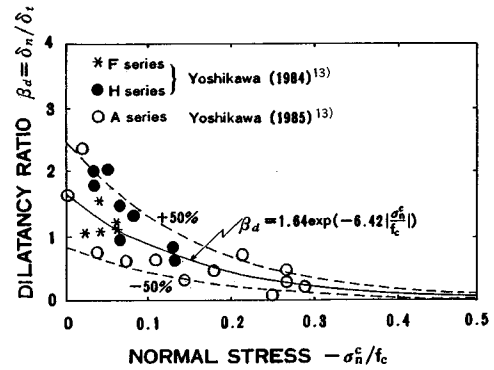
同図は，垂直応力が作用しないとき，ダイレイタンシー比は最大となり，以降，圧縮垂直応力の増大によりダイレイタンシー比は0に収束する．

以上により，交差係数を実験的に同定することができたが，どちらとも比較的大きなばらつきが認められ，図—7，8をみると，実測データ群のばらつきの幅は，得られた平均曲線に対して最大 ±50 % にも達することがわかる．特に，μ_f に対しては研究者ごとによる差異が認められ，β_d の場合では圧縮応力 $-\sigma_n^c$ が小さいほどばらつきが大きいことが特徴的である．

このようなばらつきの原因として，各供試体の材料条件，すなわち，圧縮強度，骨材寸法，玉砂利・砕石の違い，骨材粒度・表面粗度などが挙げられよう．加えて，供試体間のばらつきや，実験実施の困難さに伴う測定誤



図—7　摩擦係数 μ_f に関する実験結果のまとめと最小二乗法による曲線近似



図—8　ダイレイタンシー比 β_d に関する実験結果のまとめと最小二乗法による曲線近似

差にも起因することが推察される．したがって，より確度の高い交差係数を求めるには，さらに広範囲で系統的・高精度の実験的研究が必要とされる．また，β_d と μ_f のおのおのに対して，本論では1つの力学量で表現しているが，これは必ずしも十分とはいえず，さらにいくつかのパラメーターを加える必要がある．

以上により，基本4係数のモデル化が完了したが，ここでは式（2）に示した全微分が成立するための必要十分条件を確認する必要がある．本論では，表—2に提示した諸係数の提案曲線を用いると式（2）は不完全微分となるが，積分因数を導入することにより完全微分とすることができる．したがって，式（2）のままで与えられる力学4量については状態量（経路によらず，始点と終点のみの状態によって決まる量）ではなく，積分因数を適当に定めた場合に状態量となる．このようなことは，定式化過程における数学的要件と複雑な実現象の忠実なモデル化とが整合性よくかみ合わないことによるもので，工学上はたびたび遭遇する問題でもあり，現状ではやむを得ない措置と考えている．

4.　実験結果との比較

本提案モデルを既往の諸実験結果にあてはめ，ひびわれ界面における力学4量の非線形挙動について定量的に考察を行い，本モデルの適応性について検討する．

既往のせん断実験は，通例その境界条件によって，①垂直変位一定，②弾性拘束（鋼材または埋設鉄筋によるひびわれ面直交方向の拘束），③垂直応力（圧縮）一定の3ケースに大別される．ここで取り上げたのは上記①と②で，いずれも著名な実験例である．

なお，数値計算に際しては，文献6）の表—2に示した増分式を用い，これをパソコンプログラム[7),8)]により対象とする実験条件に従って処理した．

（1）　垂直変位一定の場合

垂直変位 δ_n を一定とした場合の実験結果について，本提案モデルによる解析結果とともに図—9に示した．これらは，(a) Paulay, Loeber[4)], (b) Houde, Mirza[11)], (c), (d) Fenwick, Paulay[12)], (e), (f) Reinhardt, Walraven[10)] を引用したもので，いずれもひびわれ幅 δ_n をパラメーターとした実験である．図中では，各プロットが実験値を示し，対応する理論値を実線で表わしている．

図—9の実験は，種々の異なる一定ひびわれ幅 δ_n，コンクリート圧縮強度 f_c，骨材の最大寸法 D_a の条件下30種類の供試体によるものであるが，実験値と理論値は大略合致しているといえる．

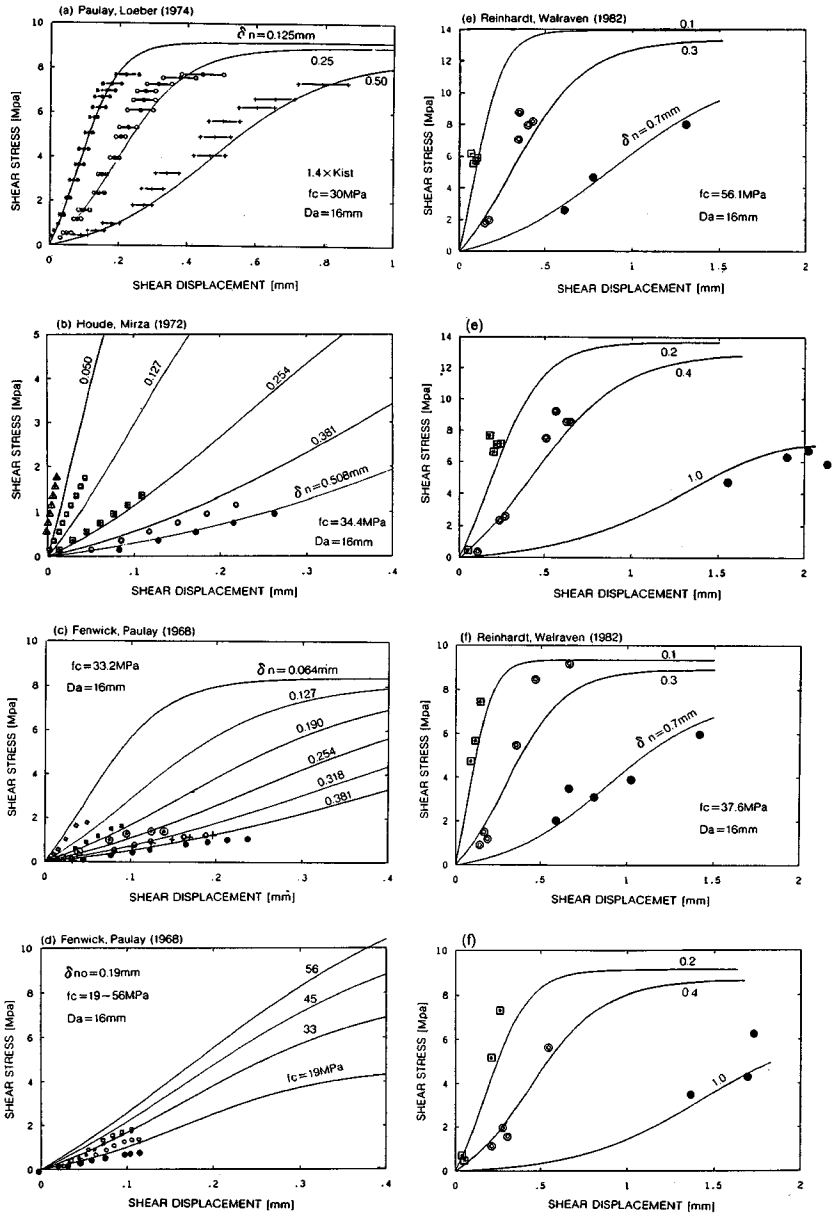
（2）　弾性拘束の場合

次いで，ひびわれ界面直交方向に鋼材による外部拘束または埋設鉄筋があるとき，すなわち，

$$-d\sigma_n^c = r_n d\delta_n \quad \cdots\cdots(22)$$

なる剛性 r_n をもつ場合について，実験結果との対比を行う．そこで，Millard, Johnson[14)] による合計9供試体について比較検討を行い，これらを図—10に図示した．これは，埋設鉄筋量と初期ひびわれ幅（0.125～0.50 mm）をパラメーターとしたもので，諸条件は脚注に示したとおりである（本実験は，界面の力学4量すべてが測定されている数少ない実験例である）．コンクリートに関する圧縮強度と骨材の最大寸法および初期ひびわれ幅は既知量であったが，埋設鉄筋による拘束係数 r_n が明示されていないため，垂直応力と垂直変位の関係（$-\sigma_n^c$～δ_n 関係）から推定した．これは，同図の最下段に示したもので，実験値とこれより推定した解析値が当然のことながらほぼ完全に合致している．

実験値には，初期ひびわれ幅や拘束鉄筋の違いがよく表われており，解析値も同様の傾向を与えている．実験値と解析結果は全般的にほぼ合致しているが，τ_{nt}^c～δ_t 関係でやや大きな乖離がみられる．



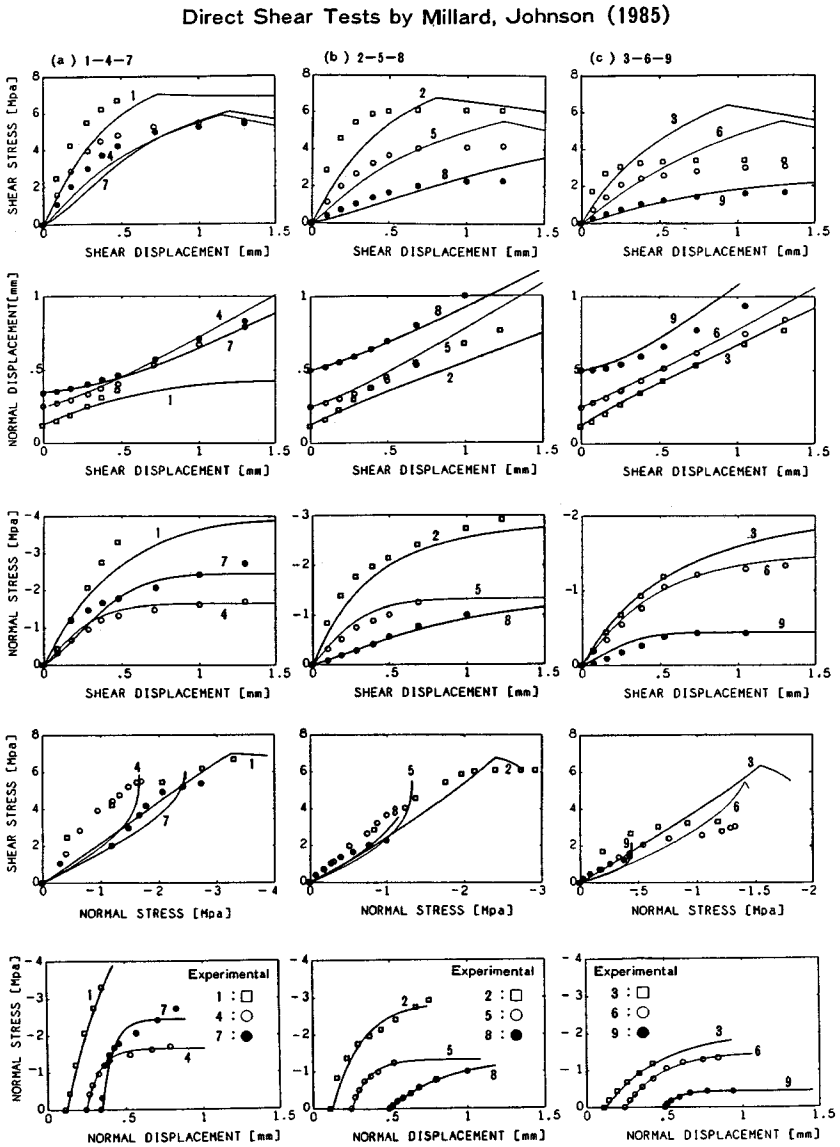
図—9　本提案モデルと実測結果との比較（ひびわれ幅 δ_n 一定の場合）
(a) Paulay, Loeber[4], (b) Houde, Mirza[11], (c) (d) Fenwick, Paulay[12], (e) (f) Reinhardt, Walraven[10]

以上の図—9, 10 で実験値と解析値が十分合致しない箇所が若干みられたが，この理由として次項が考えられる．

① 寸法効果：照合した諸実験の供試体は，種々の異なる形状寸法を有するもので，寸法効果があったことが推定される．特に，せん断応力は，作用せん断荷重をひびわれ界面の面積で除した平均公称応力であり，実際には加力方向にある分布形をもつことが考えられる．

② 交差係数：μ_f, β_d は，多くの実験値を用いた最小二乗法によって同定したが，いずれも ±50 % 程度の大きなばらつきが認められた（図—7, 8）．したがって，解析値の算定に際しては，これらを適当に調整する必要がある．このため，μ_f に対して，$c_1=0.5\sim1.5$，β_d に対して $c_3=0.5\sim1.5$ の幅をもつ係数を導入したが，たとえば，図—10 の計算では，$c_1=1$, $c_3=0.5$ を仮定した．

③ 骨材粒度，界面粗度：ひびわれ界面の凹凸による



Analytical Condition

ξ	a_{12}	c_1	c_3	Initial crack width δ_{no} (mm)			Concrete
0.5	0.245	1	0.5	□ 1 : 0.125	□ 2 : 0.125	□ 3 : 0.125	f_c=30Mpa
				○ 4 : 0.25	○ 5 : 0.25	○ 6 : 0.25	D_a=16mm
				● 7 : 0.35	● 8 : 0.50	● 9 : 0.50	

図—10 埋設鉄筋を有する場合の本提案モデルと実測結果との比較 (Millard, Johnson[14], 1-4-7, 2-5-8, 3-6-9)

粗度を表現するのであるから，本来ならば骨材の最大寸法のみならず，骨材の粒度分布と種別なども考慮されるべきである（このようなモデル化の例として，Walraven[16]がある）．すなわち，本提案モデルのように，骨材の最大寸法だけではやや不十分であることが予測される．

④ ダウエル効果：補強鉄筋を埋設した場合，その鉄筋はせん断方向にも抵抗力をもつ．これは，ダウエル効果とよばれるが，本提案モデルではこれを無視しており，このことによりせん断応力を過小評価することが考えられる．しかしながら，一般に，全体のせん断抵抗力に寄与するダウエル効果の比率は小さく（たとえば，Fen-

wick, Paulay[12])，しかもこれまで参照した諸実験の範囲では外部拘束と埋設鉄筋との差が明確に認められず，ダウエル効果の影響は考えにくい．

5. 結　　論

本文の結論を次のように要約する．

（1） ひびわれ界面におけるせん断挙動は，せん断応力やせん断すべりが生じる一方で，ひびわれ幅や垂直応力（圧縮応力）の増大などひびわれ直交方向の成分も関与し，界面の力学4量 τ_{nt}^c, σ_n^c, δ_t, δ_n すべてが干渉し合う複雑なメカニズムとなる．これは単にせん断剛性のみならず，垂直剛性や，さらにはせん断成分と垂直成分の交差効果を考慮する必要があることを示唆するものである．このような界面の非線形挙動を表現するため，著者らは，その力学4量についての構成方程式を提案した．

（2） 基本4係数（k_t, k_n, μ_f, β_d）を数学的には界面力学4量間の偏導関数として定義したが，これらの実験式を作り出すには広範囲で系統的な実験的研究が必要となる．そこで，著者らの実験も含めた国内外の既往主要実験を参照・整理し，その力学条件（特に境界条件）の明確な実測結果を抽出し，その実験式を導いた．

（3） せん断剛性 k_t は，基本4係数の中で最も重要なものでこれまで数多くの研究例があり，いわゆるせん断伝達機構の主動的役割をなす．本研究では，k_t をひびわれ幅 δ_n が固定された場合のせん断剛性（接線係数）として定義し，これを K_{tST}, δ_{t1}, τ_u をパラメーターとする双曲線関数でモデル化した．これら3パラメーターを用いた双曲線モデルにより，初期（$\delta_t < \delta_{t1}$）での比較的ルーズなすべり，その後の剛性復活（interlocking），τ_u に向かう頭打ちなどの特徴的な骨材のかみ合い効果を1つの式で表現することができる．そして，多くの実験結果のうち，境界条件が本定義と合致するもの（すなわち，δ_n＝一定の場合）を引用し，k_t についての実験モデルの各係数を同定した．

（4） 垂直剛性 k_n は，k_t とともに構成則の対角項に位置する重要な剛性であるが，これまでせん断伝達が主たる論点であったことから，ほとんど検討されることがなく，実験例も少ない．また，垂直剛性はひびわれ界面の閉合・再接触の判定にも重要となるばかりでなく，境界条件によってはせん断剛性にも間接的に影響を与える．

そこで，初期すべり量 δ_{t0} をパラメーターとし，ひびわれ面垂直方向の圧縮試験を行い，$-\sigma_n^c \sim \delta_n$ の関係を測定した．このような実験から，圧縮応力下の垂直応力とひびわれ幅の関係（$-\sigma_n^c \sim \delta_n$ 曲線）を指数関数で近似する実験式を求めた．このときのひびわれ幅は，δ_n＝0に向かって閉合するのではなく，すべりが生じていた場合は $\delta_n^* = \beta_d \cdot \delta_t$ を残留ひびわれ幅とし，この値を漸近値とした．これは，実施した6体の供試体の試験結果すべてを1個の実験式でほぼ近似し得るものである．

（5） ダイレイタンシー比 β_d と摩擦係数 μ_f は非対角項に位置するとともに，ひびわれ界面における特徴的な交差効果を表わす不可欠な係数である．このような交差効果に関する非線形現象は，これまで実験的には認知されていたものの，これらを数式モデルに取り込んだり，実験式を求めようとする研究は散見されるに過ぎない．

摩擦係数 μ_f は，著者らの定義から，ひびわれ幅 δ_n を一定に保持したときの界面応力（τ_{nt}^c と $-\sigma_n^c$）の比である．このような要件を満たす3例の実験結果と1例の数値計算結果を同一図上にプロットし，δ_n を関数とする実験式を最小二乗近似によって同定した．

一方，ダイレイタンシー比 β_d は，著者らの定義から，垂直応力（圧縮）を一定としたときの界面変位量の比（δ_n/δ_t）に相当する．このような条件の実験例は，コンクリート材料ではほとんどみられず，著者らが実施した一面せん断と二面せん断実験をもとに実験式を算定した．この場合は，ダイレイタンシー比は一定垂直応力を引数とする指数関数で表現し，諸係数を実験結果より最小二乗近似で求めた．

ただし，実験結果はかなりのばらつきを呈し，両係数とも，求めた実験曲線の±50％にもおよぶことがわかった．これは提案モデルの実験パラメーターの不足や実験テクニックの困難さ，もしくは実験結果に対する影響因子が不十分であったことによるものと推察される．このためには，さらに広範囲かつ高精度の実験的検証およびモデル化の再検討が必要とされる．

（6） 最後に，既往実験の実験結果に本提案モデルをあてはめ，その解析精度について検討した．ここでは，垂直変位一定の場合および弾性拘束の場合による実験結果を引用した．両ケースの場合とも，若干の差異はあるものの，実験値と解析結果は全般的に合致し，本提案モデルは，工学上ほぼ十分な予測精度を有するものと判断される．一方，実験結果と解析結果とは若干の乖離が認められたが，この理由として，供試体の形状・寸法の違い，交差係数のばらつき，回転変位の混入，骨材粒度分布やダウエル効果を考慮していないことなどが挙げられる．

参 考 文 献

1) The Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures of the Structural Division Committee on Concrete and Masonry Structures：State-of-the-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete, ASCE, New York, 1981.
2) Buyukozturk, O., Connor, J. J. and Leombruni, P.：

Research on Modeling Shear Transfer in Reinforced Concrete Nuclear Structures, Nuclear Engineering and Design, Vol. 59, No. 1, pp. 67～83, August 1980.

3) Goodman, R. E. and Dubois, J. : Duplication of Dilatancy in Analysis of Jointed Rocks, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 98, No. SM 4, pp. 399～422, April, 1972.

4) Paulay, T. and Loeber, P. J. : Shear Transfer by Aggregate Interlock, SP 42, American Concrete Institute, pp. 1～15, 1974.

5) Bazant, Z. P. and Gambarova, P. : Rough Cracks in Reinforced Concrete, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, No. ST 4, pp. 819～842, April, 1980.

6) 吉川弘道・田辺忠顕：コンクリート部材のひびわれ界面における力学的挙動に関する解析的研究，土木学会論文集，No. 372／V-5, pp. 101～110, 1986. 8.

7) 吉川弘道・田辺忠顕：ひびわれ界面の力学挙動（Fモードひびわれ）に関する解析モデル，土木学会第41回年次学術講演会，pp. 237～238, 1986. 11.

8) 石井賢史・吉川弘道・田辺忠顕：Fモードひびわれの数値解析とそのパソコンプログラム，土木学会第41回年次学術講演会，pp. 239～240, 1986. 11.

9) 山田一宇：鉄筋コンクリート製原子炉格納容器の設計における問題点，特にRCシェル要素のせん断設計法の合理化に関する研究，前田建設技術研究所報，No. 22-1, 1982. 3.

10) Reinhardt, H. W. and Walraven, J. C. : Cracks in Concrete Subject to Shear, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 108, No. ST 1, pp. 207～224, Jan., 1982.

11) Houde, Mirza (1972), 文献1）のchapter 5より参照した.

12) Fenwick, R. C. and Paulay, T. : Mechanisms of Shear Resistance of Concrete Beams, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 94, No. ST 10, pp. 2325～2350, October, 1968.

13) 吉川弘道：面内力を受ける鉄筋コンクリート部材の力学的挙動に関する解析モデル，東京大学学位論文，1986. 6.

14) Millard, S. G. and Johnson, R. P. : Shear Transfer in Cracked Reinforced Concrete, Magazine of Concrete Research, Vol. 37, No. 130, pp. 3～15, March, 1985.

15) Laible, J. P., White, R. N. and Gergely, P. : Experimental Investigation of Shear Transfer Across Cracks in Concrete Nuclear Containment Vessels, SP 53, American Concrete Institute, pp. 203～226, 1977.

16) Walraven, J. C. : Fundamental Analysis of Aggregate Interlock, ASCE, Vol. 107, No. ST 11, pp. 2245～2270, November, 1981.

17) たとえば，小出昭一郎：物理と微積分，共立出版，p. 106, 1981. 10.

（1988. 7. 28・受付）