

# 道路網信頼性の近似解析方法の比較研究

## A COMPARATIVE STUDY OF APPROXIMATION METHODS OF TERMINAL RELIABILITY ANALYSIS FOR ROAD NETWORKS

飯田 恭敬\*・若林 拓史\*\*・福島 博\*\*\*

By Yasunori IIDA, Hiroshi WAKABAYASHI and Hiroshi FUKUSHIMA

A number of methods for obtaining approximate terminal reliability between given two nodes in a road network have been proposed so far. In this paper, the following four methods are compared. Two of them are based on Reliability Graph Analysis with partial minimal path sets and cut sets developed by authors; One method determines upper and lower bounds with Boolean algebraic absorption and the other evaluates an approximate value without Boolean absorption. The remainder are Monte Carlo methods; One is a traditional Monte Carlo method with direct sampling and the other is an improved Monte Carlo method with restricted sampling by a variance reducing technique. Numerical examples for model networks and a real network are executed and the merits and demerits of those methods are discussed.

*Keywords: road network reliability, partial minimal path sets and cut sets, Boolean algebra, Non-Boolean algebra, Monte Carlo method, restricted sampling*

### 1. はじめに

道路網信頼性解析では、交通の諸特性に合致した評価解析法の確立が重要となる。信頼性工学はエレクトロニクス、機械システムの分野で発達したものであるが、道路網の信頼性解析がこれらのシステムと異なる主要な点は、次の3点に要約される。

- ① 交通の経路を考慮する必要がある。
  - ② 多数のODペアの信頼性を対象とする必要がある。
  - ③ 要求される精度はそれほど高くない。
- ①は、電気回路や通信ネットワークの場合、本来の経路が利用不能となった場合は相当な迂回経路でも許容されるのに対して、交通の場合は長距離の迂回はしないために日常的な経路に基づいた信頼性解析法が必要であることを意味している。②は、一般のシステムでは考慮の対象であるシステム信頼性が単一であるのに対し、道路網ではマルチコモディティフローの性質により、多数のODペアが存在しても容易に適用できる信頼性解析法が

必要であることを意味している。③は、本研究では信頼性を道路網整備水準評価指標と考え、道路計画や道路の管理運用のための計画情報と考えていることによる。信頼性工学での対象システムでは、ユニットが高信頼度、したがってシステムの信頼度も非常に高く、きわめて1に近い数値を取り扱う。さらに、このようなシステムでは、システムの故障がすぐさま事故や災害に直結する場合もあるので、求めようとする信頼度についてきわめて高い精度が要求される。たとえばアポロ計画などでは、テナインすなわち0.9999999999というような信頼度が問題にされる<sup>1)</sup>。これに対して道路網の信頼性の場合にはこのような高精度は必要ではなく、有効数字にしてせいぜい小数点以下2~3桁程度で十分であると考えられる。その理由としては、上述したように道路網整備水準の評価であること、ユニットであるリンクの信頼度を厳密に与えることが困難であることなどが挙げられる。

道路網は大規模なシステムであり、一般に大規模システムでの信頼性解析は、計算量が膨大となりきわめて困難とされている。そのため、信頼度の近似値を計算する種々の方法が開発されてきた<sup>1)~3)</sup>。すなわち、ミニマルパス・カットを用いる方法としては、含意排他公式(Inclusion-Exclusion Formula)による上・下限値<sup>1)</sup>、Fratta・Montanariのブル代数による方法<sup>2)</sup>、Esary・

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学科  
(〒606 京都市左京区吉田本町)

\*\* 正会員 工修 大阪府立工業高等専門学校助教授 土木工学科 (〒572 寝屋川市幸町 26-12)

\*\*\* 正会員 工修 近畿日本鉄道  
(〒543 大阪市天王寺区上本町 6-1-55)

Proschan の上・下限値<sup>6)</sup>等が存在する。しかしこれらの方法は、ノード間のミニマルパス・カットすべてを必要とするため、パス・カット数が膨大となる大規模ネットワークには適用が困難となる。

このため、このミニマルパス・カットのうち一部を選択して用いる方法<sup>2)</sup>が計算量を大幅に短縮可能とする点で有効となる<sup>7)</sup>。著者らは、部分的なミニマルパス・カットを利用し、プール演算で上・下限値を求める方法<sup>8)</sup>(本論文中ではプール演算法とよぶ)および非プール演算で近似値を求める方法(交点法<sup>9)</sup>とよぶ)を開発している。特に交点法では、プール演算を省略するために計算時間がきわめて少なく済み、大規模ネットワークの信頼性解析に有利であると考えられる。

近似計算法の有効性、あるいは優劣の判断は、システムが小規模な場合には、計算時間が多大であっても厳密値の計算が可能であるので、厳密値を基準に議論することができる。しかしながら、ネットワークが大規模になると、判断の基準となる厳密値が、計算困難あるいはまったく不可能となってしまう。したがって、その一般的有效性を検討するためには、原理的にまったく異なる信頼性解析法を利用して比較せざるを得ない。そこで本研究では、リンク信頼度を与件としてノード間信頼度を求めるというモデルの入出力構造では共通で、原理的には異なる方法として、従来実用的とされてきたモンテカルロ法を比較対象とすることを考える。モンテカルロ法には、従来広く知られている直接サンプリング法のほかに、精度の向上や計算時間の短縮を目指して、さまざまに工夫されたモンテカルロ法が存在する。本研究では、限定サンプリングによって高精度が得られるモンテカルロ法をとりあげこの方法についても検討する。しかしこれらの方法でも、計算に先立つ前処理作業や計算時間は大きいのが一般的で、これに対して③の観点から若干精度を犠牲にしても、簡単な方法で有効な近似値を算出することができれば有用であると考えられる。さらに、近似解法による近似値が、複雑で精密な方法で求められる近似値と大差なければ、きわめて有用な方法であるといえる。したがって、本研究では、著者らの開発したプール演算法、交点法の2方法と、モンテカルロ法について、解精度の実用性や計算時間等の効率性、計算作業の経済性さらに交通工学的意味も含めて比較分析し、実際道路網への適用性に対する実用性の評価を行うことを目的としている。

## 2. 各種信頼性解析法の概要

本研究では、ネットワークはリンクとノードから構成されるとし、信頼度はリンクのみによって決まると考える。ノードその他の道路網の構成要素は、等価的なリンクを考えることにより取り扱いが可能である。そして、

道路網の任意の2地点間において、円滑な走行移動が保証される確率をノード間信頼度と定義する。同様に、道路網の構成リンクに対し、円滑な走行移動が保証される確率をリンク信頼度とよぶ。リンク信頼度は既知であるとする。したがって、ここで比較対象とする方法はいずれも、リンク信頼度を与件としてノード間信頼度を求める方法である。また、各方法はいずれも、信頼度計算の過程でネットワークを等価変換等で変形させる必要がなく、オリジナルなネットワーク形状のまま信頼度評価が可能である。これは、多数のノードペアを対象とする場合に有効となる。以下に主な変数を定義する。

$X_a$ : リンク  $a$  の状態を表わす確率変数

$$= \begin{cases} 1: \text{リンク } a \text{ での円滑な} \\ \text{走行移動が可能} & \dots\dots\dots(1) \\ 0: \text{そうでない場合} \end{cases}$$

$X=(X_1, \dots, X_l)$ : リンクの状態を示す二値ベクトル

$b=(b_1, \dots, b_l)$ :  $X$  の実現値ベクトル

$\phi(X)$ : 構造関数

$$= \begin{cases} 1: \text{対象とする2点間で円滑な} \\ \text{走行移動が可能} & \dots\dots\dots(2) \\ 0: \text{そうでない場合} \end{cases}$$

ここに、構造関数とはシステムの状態を各リンクの状態を表わす状態ベクトル  $X$  を用いて知ることができるものであり、システムの構造によりその関数形が決まる。

$R$ : ノード間信頼度の厳密値

ここに、 $R$  は、次式で求められる。

$$R = \Pr\{\phi(X)=1\} \dots\dots\dots(3)$$

$$= E[\phi(X)] \dots\dots\dots(4)$$

$$= \sum_b \phi(b) \Pr\{X=b\} \dots\dots\dots(5)$$

$c_\nu$ : 直接的モンテカルロ法で用いる  $X$  に対するサンプルベクトル ( $\nu=1, \dots, N$ )

$s_\nu$ : 分散減少法によるモンテカルロ法で用いる  $X$  に対するサンプルベクトル ( $\nu=1, \dots, N$ )

$l$ : リンク総数

$N$ : モンテカルロ法における試行回数

### (1) プール演算法<sup>8)</sup>

ネットワークの特定のノード間に対する、ミニマルパス、ミニマルカットを  $P_s, K_s$  とし、その総数を  $p, k$  とする。ここに、ミニマルパスとは、ノード間の経路を構成するリンクのうちどれか1つでも故障になると通行が不能となり、すべてが機能していれば通行機能を保証するような部分集合である。また、ミニマルカットとはそれに属するすべてのリンクが故障すれば確実にノード間が通行不能となり、そのうちの1つでも機能状態となると、それに属する他のリンクすべてが故障していても必ずしも通行不能とはならないような部分集合である。以下、ミニマルを略してパス・カットとする場合もある。

すべてのパス・カットを利用する計算法では、信頼度の厳密値  $R$  が得られるが、計算量が膨大となる。そこで、部分的なパス・カット（選択数を  $p'(\leq p)$ ,  $k'(\leq k)$  とする）を利用すると、下限値  $L_1$  と上限値  $U_1$  を効率的に得ることができる。すなわち、

$$L_1 = E \left[ 1 - \prod_{s=1}^{p'} \left( 1 - \prod_{a \in P_s} X_a \right) \right] \dots\dots\dots (6)$$

$$U_1 = E \left[ \prod_{s=1}^{k'} \left\{ 1 - \prod_{a \in K_s} (1 - X_a) \right\} \right] \dots\dots\dots (7)$$

で与えられ、 $L_1 \leq R \leq U_1$  となる<sup>(註1)</sup>。式(6)、(7)での計算過程では、同一リンクの確率の重複計算を避けるため、論理積に関するブール演算 ( $X_a \cdot X_a = X_a$ ) を必要とする。

これらの式において効率的に上・下限値を得るには、ミニマルパス・カットの生起確率の大きいものから順に選択すればよいことが明らかとなっている<sup>(註2)</sup>。ここに、パス  $P_s$ 、カット  $K_s$  の生起確率はそれぞれ  $\prod_{a \in P_s} r_a$ ,  $\prod_{a \in K_s} (1 - r_a)$  で与えられる。さらに、このように選択されたパスは、ネットワーク上での実際の経路を反映し、またカットもスクリーンライン的で単純な交通断面を反映するので、交通工学的に意味のあるパス・カットを利用して信頼度計算が行える特徴も有している。

このブール演算法は、従来から提案されている Fratta・Montanari のブール代数法や含意排他公式による方法がすべてのミニマルパス・カットを必要とするのに対し、入力データとしてのパス・カット数がきわめて少なくすむ点で優れている。

(2) 交点法<sup>(註3)</sup>

(1) では、ブール演算を必要とするのでこれを省略すると、近似値  $R_p, R_k$  が得られる。すなわち、

註1) 式(6)、(7)の証明

いま、一部のミニマルパス  $p'$  個、ミニマルカット  $k'$  個で構成される構造関数をそれぞれ  $\phi_L, \phi_U$  と定義する。すなわち、

$$\phi_L(X) = 1 - \prod_{s=1}^{p'} \left( 1 - \prod_{a \in P_s} X_a \right) \dots\dots\dots (A.1)$$

$$\phi_U(X) = \prod_{s=1}^{k'} \left\{ 1 - \prod_{a \in K_s} (1 - X_a) \right\} \dots\dots\dots (A.2)$$

厳密値  $R$  を与える構造関数  $\phi(X)$  はすべてのミニマルパスの OR 結合として表現されるのであるから、式(A.1)で構成される  $\phi_L(X)$  はすべての  $X$  に対して不等式、

$$\phi_L(X) \leq \phi(X) \dots\dots\dots (A.3)$$

を満足させる。また、構造関数  $\phi(X)$  はすべてのミニマルカットの AND 結合でも表現されるから、式(A.2)で構成される  $\phi_U(X)$  はすべての  $X$  に対して不等式、

$$\phi(X) \leq \phi_U(X) \dots\dots\dots (A.4)$$

を満足させる。したがって、

$$\phi_L(X) \leq \phi(X) \leq \phi_U(X) \dots\dots\dots (A.5)$$

が成立する。したがって、

$$E[\phi_L(X)] \leq E[\phi(X)] \leq E[\phi_U(X)] \dots\dots\dots (A.6)$$

が成立し、式(6)、(7)すなわち、

$$L_1 = E[\phi_L(X)], U_1 = E[\phi_U(X)]$$

と式(4)から、

$$L_1 \leq R \leq U_1 \dots\dots\dots (A.7)$$

が成立する。(証明終)

$$R_p = 1 - \prod_{s=1}^{p'} \left( 1 - \prod_{a \in P_s} r_a \right) \dots\dots\dots (8)$$

$$R_k = \prod_{s=1}^{k'} \left\{ 1 - \prod_{a \in K_s} (1 - r_a) \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $r_a$  はリンク信頼度で、

$$r_a = E[X_a] \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。

式(8)には次のような性質がある。選択パス数  $p'$  が小さいうちは、パス間でリンクに重複がないようにすることが可能であるので、式(8)は式(6)の結果と一致する。式(6)ではブール演算が不要となるからである。したがって  $R_p$  の値は下限値となる。 $p'$  がミニマルパス総数  $p$  に一致すると  $R_p$  は Esary・Proschan の上限値に一致する。ここに、Esary・Proschan の上限値とは、

$$U_2 = 1 - \prod_{s=1}^p \left( 1 - \prod_{a \in P_s} r_a \right) \dots\dots\dots (11)$$

で与えられ、Esary・Proschan の下限値は、

$$L_2 = \prod_{s=1}^k \left\{ 1 - \prod_{a \in K_s} (1 - r_a) \right\} \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる<sup>(註4)</sup>。また、パス数に関して単調増加性が容易に証明できるので、式(8)は下限値から上限値へ向かうパス数に関する単調増加関数となる。同様に、式(9)は、選択カット数  $k'$  の増加に伴い、上限値から式(12)で与えられる下限値へ向かうカット数に関する単調減少関数を与える。

交点法とはこの性質を利用して、ノード間のミニマルパス、ミニマルカットを順次追加して式(8)、(9)で信頼度を計算し、両者の交点を信頼度の近似値とする方法である。得られる近似値は、Esary・Proschan の上・下限値にはさまれた値となることが保証される。部分的なパスやカットしか必要としないこと、ブール演算を経由しないことから、本方法は、従来の方法に比較して計算量がきわめて少なくすむ、そのため大規模ネットワークにも適用が可能であるという特徴がある。ミニマルパス・カットの選択法は、(1)と同様、パス・カットの生起確率の大きいものから順に選択すればよい。

(3) 直接的モンテカルロ法

このモンテカルロ法は、直接サンプリングによる最も基本的なモンテカルロ法であり、乱数発生の際のサンプリング領域を単純に  $[0, 1]$  の区間にとるものである。すなわち、2ノード間の連結・非連結を表わす構造関数  $\phi(X)$  を利用し、 $X$  の統計的に独立なサンプルを  $N$  個各リンクの信頼度に従いサンプリングする。信頼度の近似値  $R_c$  は、

$$R_c = N^{-1} \sum_{i=1}^N \phi(C_i) \dots\dots\dots (13)$$

で求められる。また、 $R_c$  の分散は、

$$\text{Var}(R_c) = N^{-1}R(1-R) \dots\dots\dots(14)$$

と与えられることが知られている。なお添字の  $C$  は、Crude Monte Carlo を表わしている。

(4) 分散減少法を導入したモンテカルロ法

前節で述べた直接的モンテカルロ法は、計算が非常に単純であるという利点を有している。その反面、システム信頼度が非常に高い場合には所定精度を得るために試行回数が増えすぎて多くなるのが欠点となっている。

これに対し、分散減少法によるモンテカルロ法の基本的な考え方は、対象とする値についての事前情報があればその値（本例では上・下限値）を利用してサンプリング領域を限定し（これを限定サンプリングという）、結果的に推定値の分散を減少させることによって、推定値の精度の向上あるいは試行回数の節約を図ろうとするものである。分散減少法の概念は従来から知られているものであるが<sup>10)</sup>、ここでは、Kumamoto・Tanaka・Inoue によって開発された方法<sup>2),11)</sup>を用いる。このモンテカルロ法では、限定サンプリング領域の設定のため、ミニマルパス・カットを用いて上・下限値（プール演算法による上・下限値とは別個のもの）を表現する構造関数の構成作業が追加的に必要となる<sup>12)</sup>。なお、この上・下限値を構成するために必要な、一部のミニマルパス・カットの探索作業は（1）、（2）と共通している。

最初に、限定サンプリングのための信頼度の上・下限値を  $R_U, R_L$  と定義し、 $R_U, R_L$  を規定する二値構造関数を  $\phi_U, \phi_L$  とする。 $\phi_U, \phi_L$  は、

$$\phi_L(\mathbf{b}) \leq \phi(\mathbf{b}) \leq \phi_U(\mathbf{b}), \text{ for all } \mathbf{b} \dots\dots\dots(15)$$

$$\phi_L(\mathbf{b}) \neq 0, \phi_U(\mathbf{b}) \neq 1 \dots\dots\dots(16)$$

を満たす。また、すべての  $a(0 \leq a \leq 1)$  に対して、

$$R_{L,a}(b_1, \dots, b_a) = \sum_{b_{a+1}, \dots, b_l} \phi_L(\mathbf{b}) \Pr\{X=\mathbf{b}\} \dots\dots\dots(17)$$

$$R_{U,a}(b_1, \dots, b_a) = \sum_{b_{a+1}, \dots, b_l} \phi_U(\mathbf{b}) \Pr\{X=\mathbf{b}\} \dots\dots\dots(18)$$

と定義する。 $R_{L,a}$  と  $R_{U,a}$  は、限定サンプリングによるサンプルベクトル  $\mathbf{s}$  の発生に利用する補助変数である。ここに、式（17）、（18）は、モンテカルロシミュレーションの実行過程で  $X$  の実現値が増加してきた場合の上・下限値を表わしている。 $\phi_L$  と  $\phi_U, R_{L,a}$  と  $R_{U,a}$  の構成法および  $\mathbf{s}$  の発生法<sup>2),11)</sup>は文献12)に例示されている。また、 $R_{L,0}$  と  $R_{U,0}$  はそれぞれ  $R_L, R_U$  となるので、次の不等式が成立する。

$$0 < R_L \leq R \leq R_U \leq 1 \dots\dots\dots(19)$$

もし  $R_U = R_L$  という等式が成り立つとすれば  $R = R_U = R_L$  であり、信頼度  $R$  はシミュレーションによらずとも求めることができる。したがって以降は、

$$R_U - R_L > 0 \dots\dots\dots(20)$$

という仮定に基づいて考えることにする。

式（5）を変形すると次式を得る。

$$R = \sum_{\mathbf{b}} [\phi(\mathbf{b}) - \phi_L(\mathbf{b})] \Pr\{X=\mathbf{b}\} + \sum_{\mathbf{b}} \phi_L(\mathbf{b}) \Pr\{X=\mathbf{b}\} \dots\dots\dots(21)$$

$$= \sum_{\mathbf{b}} [\phi(\mathbf{b}) - \phi_L(\mathbf{b})] \Pr\{X=\mathbf{b}\} + R_L \dots\dots\dots(22)$$

ここで、 $\Pr\{X=\mathbf{b}\}$ とは違った確率空間をもったランダムなサンプルを発生させる。次の範囲を定義する。

$$Z \equiv \{\mathbf{b} | \phi(\mathbf{b}) - \phi_L(\mathbf{b}) = 1\} \dots\dots\dots(23)$$

$$Y \equiv \{\mathbf{b} | \phi_U(\mathbf{b}) - \phi_L(\mathbf{b}) = 1\} \dots\dots\dots(24)$$

式（22）を  $Z \subset Y$  を考慮して変形すると、

$$R = \sum_{\mathbf{b} \in Z} [\phi(\mathbf{b}) - \phi_L(\mathbf{b})] \Pr\{X=\mathbf{b}\} + R_L \dots\dots\dots(25)$$

$$= \sum_{\mathbf{b} \in Y} [\phi(\mathbf{b}) - \phi_L(\mathbf{b})] \Pr\{X=\mathbf{b}\} + R_L \dots\dots\dots(26)$$

を得る。次に、 $Y$  に含まれる新たなランダムベクトルとして、 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_l)$  を導入する。そして、 $\Pr\{\mathbf{y}=\mathbf{b}\}$  という確率を、 $\mathbf{b} \in Y$  という条件で次のように定義する。

$$\Pr\{\mathbf{y}=\mathbf{b}\} \equiv \Pr\{X=\mathbf{b}\} / (R_U - R_L) \dots\dots\dots(27)$$

サンプリング領域が、 $R_U$  と  $R_L$  の間で定義されていることに着目すれば、式（26）は次のように書き直すことができる。

$$R = (R_U - R_L) \sum_{\mathbf{b} \in Y} [\phi(\mathbf{b}) - \phi_L(\mathbf{b})] \Pr\{\mathbf{y}=\mathbf{b}\} + R_L \dots\dots\dots(28)$$

式（15）、（24）から  $\phi_L(\mathbf{b}) \equiv 0$  であるので、 $Y$  に含まれるすべての  $\mathbf{b}$  について、

$$R = (R_U - R_L) \sum_{\mathbf{b} \in Y} \phi(\mathbf{b}) \Pr\{\mathbf{y}=\mathbf{b}\} + R_L = (R_U - R_L) E[\phi(\mathbf{y})] + R_L \dots\dots\dots(29)$$

となる。式（29）の期待値は、領域  $Y$  でランダムなサンプリングを行うことによって推定することができる。

この式（29）が分散減少法の基本式である。すなわち、 $Y$  に含まれる  $\mathbf{y}$  のうち統計的に独立な  $N$  個のサンプルベクトル  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N$  を考える。分散減少法によるモンテカルロ法によって評価される信頼度を  $R_R$  と表わすと、 $R_R$  は、

$$R_R = (R_U - R_L) N^{-1} \sum_{i=1}^N \phi(\mathbf{s}_i) + R_L \dots\dots\dots(30)$$

で求められる。 $R_R$  の添字  $R$  は、限定サンプリング (Restricted sampling) を表わしている。このモンテカルロ法（以下分散減少法とよぶ）によって求められたシステム信頼度の推定値の分散は、

$$\text{Var}(R_R) = N^{-1} (R_U - R) (R - R_L) \dots\dots\dots(31)$$

で与えられる。直接的モンテカルロ法（以下直接法とよぶ）の分散と分散減少法による分散とを比較すると、図-1に図示するように、

$$\text{Var}(R_c) \geq \text{Var}(R_R) \dots\dots\dots(32)$$

が常に成立する。したがって、分散減少法によるシステム信頼度の推定値の分散は、同一試行回数で直接法によるものより常に小さく、精度の向上が保証される。

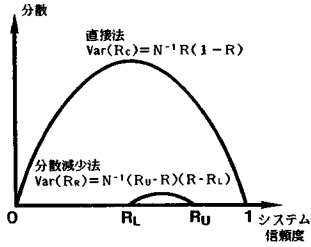


図-1 モンテカルロ法の分散の比較

### 3. n 番目最短経路探索問題の近似解法

プール演算法および交点法では、良好な近似値を得るためには、ミニマルパス・カットを生起確率の順に順序づけ、その上位から計算に用いるパス・カットを選択すればよい。この選択問題が、ネットワークのリンク長を  $-\log r_a$  で置き換えると、 $n$  番目最短経路探索問題に帰着することがわかっている<sup>7)~9)</sup>。さらに分散減少法では、限定サンプリングを行う際に、上限値  $R_u$ 、下限値  $R_l$  の差が小さい方が良好な近似値を得ることができる(図-1 参照)。そしてこのためのミニマルパス・カットの選択もまったく同一の問題となる。

$n$  番目最短経路探索問題の解法は、動的計画法(D.P.)によるものが一般的である。しかしこの方法では、ネットワークが大規模化した場合に、計算量と要求される記憶容量等が莫大なものとなる。そのため本研究では、経路探索に近似解法を用いることにした。この方法は、最短経路探索の代表的解法である Dijkstra 法を利用したものである。Dijkstra 法は計算時間がきわめて少なくすむうえに記憶容量も小さく、厳密な最短経路が探索できるなど多くの優れた点をもっている。本研究で用いた方法はこの利点を生かし、一部のリンクに便宜的に微小な増分を与えることによって、最短経路探索の繰り返しで  $n$  番目最短経路探索ができるように工夫したものである。すなわち最短経路探索を行った後、ネットワーク中のその経路を構成するすべてのリンク長に微小な増分を与える。ここで再び最短経路探索を行う。最初に選ばれた経路にはリンク長に増分が与えられたため、他の経路が選ばれる可能性がある。他の経路が選ばれたら、これを記憶する。増分を与える前と同一の経路が選ばれたら、さらに増分を与える。この繰り返しにより、最終的に必要とする経路数の3~5倍程度の経路を選び出す。それらの経路についてその等価的な経路距離を再計算して短い順に並べかえ、 $n$  番目最短経路探索を行う。

この方法は、 $n$  番目最短経路探索の近似的な解法であり、理論的厳密性はないが、少ない計算時間と記憶容量で  $n$  番目最短経路探索ができるという利点を有している。増分の与え方および候補として取り出す経路数を

ヒューリスティックに工夫することにより、かなり厳密に近い選択がなされることを確認している。本研究では、以下この方法によってミニマルパスおよびミニマルカットを選択する。

### 4. 解析方法の比較

#### (1) 仮想ネットワークでのモデル計算

本節では、2. で述べた4種類の近似計算法を仮想ネットワークに適用してその有効性を比較検討する。対象とするネットワーク形状は、図-2, 3に示す  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$  ネットワークである。リンク信頼度を同一値(0.9, 0.5の2ケース)および乱数発生によって与え、両ネットワークの対角線ノードペアを対象に計算を行う。

最初に、 $4 \times 4$  ネットワーク(16ノード24リンク)でリンク信頼度が同一値の結果から述べる。計算結果を表-1の上2段に示す。

まず、比較の基準となる厳密値を計算する。厳密値は事象空間法によって計算した。すなわち厳密値  $R$  は、

$$R = \sum_X |\phi(X_1, \dots, X_l)| \prod_{a=1}^l r_a^{X_a} (1 - r_a)^{1 - X_a} \dots \dots \dots (33)$$

において、右辺をベクトル  $X$  のとり得るすべて、すなわち  $2^l$  個のベクトル ( $l$  は、総リンク数) についてしらみつぶしに計算することで得られる。

次に、プール演算法では、効率よく上・下限値を得るには、パス・カットの生起確率の大きいものから順に選択すればよいことが明らかとなっている。パス・カットの選択数が多いほど良好な上・下限値を得ることができるが、計算時間にも制約がある。この方法では理論的に上・下限が保証されているため<sup>8)</sup>、ここではできる限り選択数を少なくすることを考え、一次独立なパス・カット数の少ない方を両者共通の選択数とした。その数は10本である。パス・カット数に関する厳密値への接近の様子を図-4に示す。リンク信頼度が小さくなるに伴い、上・下限値幅はしだいに大きくなる傾向がある。

次に交点法の結果を述べる。交点法による交点の発生の様子を図-5に示す。パスによる計算値が下限値から上限値へ、カットによる計算値が上限値から下限値へそ

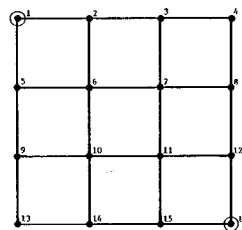


図-2  $4 \times 4$  のネットワーク (16ノード24リンク)

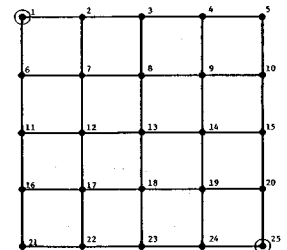


図-3  $5 \times 5$  のネットワーク (25ノード40リンク)

それぞれ単調増加，単調減少しているのが確認できる。表一1の交点位置の数字は，交点が生ずる位置での選択パス，カット数を表わしている。このケースでは，厳密値との誤差も小さく良好な近似値であるといえる。

直接的モンテカルロ法では，その試行回数が問題となる。試行回数を増やせば，その分精度は高まるが計算時間も増大する。モンテカルロ法の場合，計算時間は試行回数にほぼ比例すると考えられる。ここでは試行回数を1万回とする。リンク信頼度が0.5の場合の，試行回数1万回までのシミュレーションの様子を図一6に示す。

分散減少法を取り入れたモンテカルロ法も，同様に試行回数1万回までのシミュレーションを行う。この様子を図一6にあわせて示す。分散減少法では，サンプリングの各段階において上・下限値を表わす構造関数が必要となるが，ここでは構造関数を構成するミナルパス・カットを，生起確率の順にそれぞれ4本ずつ選択した。

信頼度の厳密値との誤差は，直接法と比較すると1/10以下となっており，分散減少法による精度向上の効果が現われていることが確認できる。しかしながら，道路網信頼度で要求される解精度から考えて実用上は直

接法でも十分であろうと考えられる。

以上は，得られた近似値の値を精度の面から考察したものであるが，信頼性解析法の優劣の評価では，計算機の計算時間も重要な要素となる。表一2上段は，この4×4ネットワークでの計算機CPU-TIMEを示したものである。計算は京都大学大型計算機センターにて行い，厳密値のCPU-TIMEはベクトルプロセッサFACOM VP-400 Eによるもの，その他はFACOM M-780によるものである。

厳密値の計算は事象空間法によっており，総リンク数を*l*とすると，CPU-TIMEは2<sup>*l*</sup>に比例する。CPU-TIMEは700秒を超え，厳密値の計算はベクトルプロセッサを用いてもきわめて多大の計算時間を要し不経済である。

他の計算時間は，分散減少法，直接法，プール演算法，交点法の順に小さくなっている。まず，モンテカルロ法相互を比較する。

分散減少法のCPU-TIMEを，直接法と比較すると，リンク信頼度0.9の場合で約1.2倍，0.5の場合で約1.4倍多くかかっている。これに対し，分散は0.9の場

表一1 モデル計算における各解析法の計算結果

ネットワーク形状	リンク信頼度	厳密値	プール演算法			交点法		モンテカルロ法(直接法)	モンテカルロ法(分散減少法)
			上限値(誤差)	下限値(誤差)	上・下限値の幅	推定値(誤差)	交点位置	推定値(誤差)	推定値(誤差)
4×4ネットワーク	一定値 0.9	0.97505	0.97619 (+0.00114)	0.95039 (-0.02466)	0.02580	0.97717 (+0.00212)	5	0.97770 (+0.00265)	0.97542 (+0.00037)
	一定値 0.5	0.19844	0.33876 (+0.14032)	0.11390 (-0.08454)	0.22486	0.19732 (-0.00112)	14	0.19170 (-0.00674)	0.19818 (-0.00026)
	乱数	誤差の最大値 誤差の最小値 誤差の平均値	-----	(+0.05402) (+0.00265) (+0.02497)	(-0.14912) (-0.02433) (-0.06650)	0.18722 0.03405 0.09147	(+0.05732) (-0.00092) (+0.02816)	平均 6.2	(+0.00766) (+0.00021) (+0.00005)
5×5ネットワーク	一定値 0.9	-----	0.97595 (+0.00078)	0.95647 (-0.01870)	0.01948	0.97612 (+0.00095)	7	0.97730 (+0.00213)	0.97517 (基準値)
	一定値 0.5	-----	0.30981 (+0.15825)	0.04386 (-0.10770)	0.26595	0.11447 (-0.03709)	32	0.15400 (+0.00244)	0.15156 (基準値)
	乱数	誤差の最大値 誤差の最小値 誤差の平均値	-----	(+0.05615) (+0.00400) (+0.02112)	(-0.23859) (-0.04014) (-0.14070)	0.27080 0.04414 0.16182	(+0.03140) (+0.00005) (+0.01191)	平均 9.1	(+0.00707) (-0.00001) (+0.00051)

※ 上・下限値の幅とは上限値と下限値との差であり，交点位置とは交点が発生するのに要したミナルパス・カット数をいう。  
5×5のネットワークでの誤差は，厳密値が求められないためモンテカルロ法(分散減少法)による推定値を基準値とした。

表一2 モデル計算における各解析法のCPU-TIME

ネットワーク形状	リンク信頼度	厳密値CPU-TIME	プール演算法		交点法	モンテカルロ法(直接法)			モンテカルロ法(分散減少法)			モンテカルロ法の計算効率比 E <sub>c</sub> /E <sub>R</sub>
			上限値CPU-TIME	下限値CPU-TIME	CPU-TIME	CPU-TIME	分数(×10 <sup>-6</sup> )	計算効率 E <sub>c</sub>	CPU-TIME	分数(×10 <sup>-6</sup> )	計算効率 E <sub>R</sub>	
4×4ネットワーク	0.9	738.092	1.609	1.641	0.033	5.683	2.4327	13.83	6.698	0.054064	0.36	38.18
	0.5	737.886	1.642	1.604	0.032	3.989	15.906	63.45	5.545	4.4658	24.76	2.56
5×5ネットワーク	0.9	-----	15.913	24.948	0.031	13.937	(2.2185)	30.92	16.194	(0.034769)	0.56	54.91
	0.5	-----	15.823	24.960	0.045	9.202	(13.028)	119.88	12.425	(4.3706)	54.30	2.21

CPU-TIME: 単位・秒 (厳密値のみFACOM VP-400E, 他はFACOM M-780), 計算効率: ×10<sup>-6</sup>  
※ 5×5のネットワークでの分散値は，厳密値が求められないため，モンテカルロ法(分散減少法)によって求められた値をもとにした推定値である。

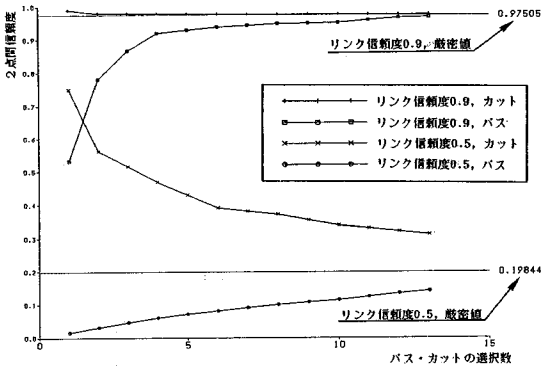


図-4 ブール演算法による厳密値への接近の様子(4×4のネットワーク)

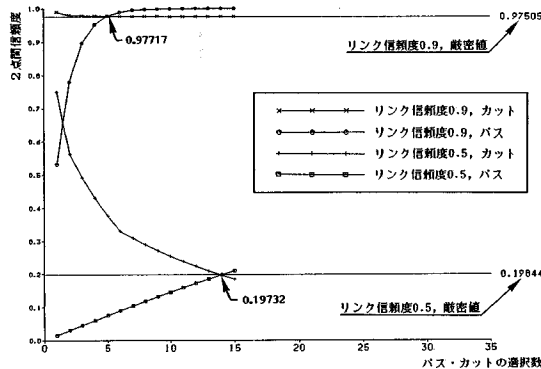


図-5 交点法による交点発生の様子(4×4のネットワーク)

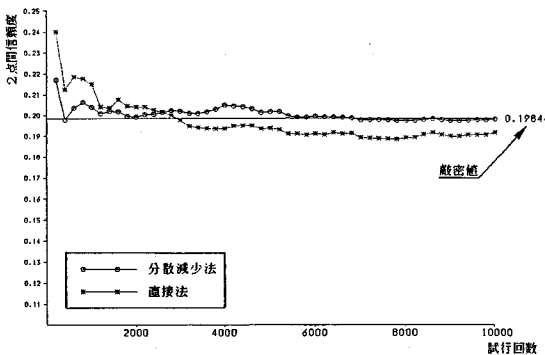


図-6 モンテカルロ法によるシミュレーションの様子(4×4のネットワーク, リンク信頼度0.5の場合)

合で約 1/45, 0.5 の場合で約 1/3.6 に減少している。ここで、モンテカルロ法の計算効率を CPU-TIME と分散との積で定義すれば、この値が小さいほど計算効率がよいこととなり、分散減少法は直接法に比べて、0.9 の場合で約 38 倍、0.5 の場合で約 2.6 倍の計算効率をもつ。このことから、システム信頼度(ノード間信頼度)が高信頼度になるほど、分散減少法の効果が現われるこ

とが確認できる。

ブール演算法は、選択パス・カット数を増加させると厳密値により近い上・下限値を得ることができるが、CPU-TIME が指数的に増加する性質がある。パス・カット数を抑えれば計算時間は少なくなるが、良好な上・下限値を得にくい。ここで示した CPU-TIME は、パス・カットの選択数を上述のように 10 としたものである。

交点法は、ミニマルパス・カットを追加的に式(8)、(9)に代入して信頼度を計算し、両者の交点を信頼度の近似値としている。非ブール演算型の計算方法であるため計算量がきわめて少なく済み、経路探索以外にはほとんど計算時間を要しない。生起確率順にパス・カットを列挙したリスト(本研究ではこのリストを Dijkstra 法を利用して作成しているが、手作業でできる場合もある)があれば、交点の計算は電卓でも可能である。このようにこの方法では、信頼度算出のための計算時間がほとんど無視できるのが大きな特徴となっている。

次に、リンク信頼度を同一値とただけでは精度の優劣を十分論ずることはできないので、各リンクの信頼度を乱数で与えて多数のリンク信頼度の組合せ(これをパターンとよぶ)を発生させる。対象ノードペアは同一とし、パターン数は 30 とした。なお、比較の基準値として厳密値をそれぞれ求めることは、膨大な CPU-TIME を要する。一方、リンク信頼度が 0.9 および 0.5 の計算で、分散減少法による推定値がきわめて精度の高い近似値を与えることが確認できたので、以下は分散減少法による推定値(試行回数 1 万回)を基準値として、これとの比較により各方法の優劣を検討することにする。

各方法による計算結果を表-1 の 3 段目に示す。この欄では、30 パターンの結果から、基準値との誤差および上・下限値幅の最大値、最小値および平均値を表示しており、各指標の変動の範囲を知ることができる。この表から、おおむね乱数による結果はリンク信頼度が同一値 0.9 および 0.5 の中間的な値であり、先述の傾向がほぼ保たれているといえる。なお、直接法の誤差が小さく算出されているが、これは分散減少法を基準値としたためと考えられる。

次にネットワークを拡大して、5×5 ネットワーク(25 ノード 40 リンク)のノードペア(1, 25)に対して計算を行う。4×4 ネットワークと同様、リンク信頼度を同一値(0.9, 0.5 の 2 ケース)および乱数発生によって与える。結果を表-1 下 3 段に示す。

厳密値の計算は先述したように、 $2^L$  に比例する。5×5 ネットワークでは 4×4 ネットワークよりもリンク数が 16 リンク増加するので、計算時間はさらに  $2^{16}$  倍となることが予想され、計算は事実上不可能といえる。したがって、ここでも分散減少法による推定値を基準値と

する。各方法の計算結果を4×4ネットワークの場合と比較すると以下ようになる。

プール演算法では、一次独立なパス、カット数はそれぞれ17, 24となる。しかし、パス、カット選択数が10本を越えると厳密値への接近は緩慢となる性質があることから、計算機ジョブの経済性を考慮してそれぞれ13本ずつとした。そのため、選択パス、カット数が少なくなったが、リンク信頼度が0.9の場合には上・下限値ともに良好な近似値を得ている。上・下限値の幅も小さい。これは、リンク信頼度が高い場合には、少数のパス、カットの信頼度への寄与が大きいためである。しかし、リンク信頼度が0.5の場合や乱数で与えた場合にはこの幅も大きくなり、本方法では良好な近似値を得にくくなる。このように、プール演算法ではリンク信頼度が高い場合には、少数の選択数でも精度よく近似値を得ることができる。この精度の良否は上・下限値の幅で判断できる。

交点法では、交点の発生が遅れる。リンク信頼度が0.9の場合には少ないパス・カット選択数で交点が発生するが、リンク信頼度が低くなるに従って交点発生のためのパス・カット選択数が増加する。しかしながら、得られた近似値は、基準値との誤差が±0.05以内に収まっており、この程度の誤差が許容されれば十分実用であろうと考えられる。CPU-TIMEも、他の方法に比較してきわめて小さいのが大きな特徴である。

モンテカルロ法については、直接法と分散減少法との差や分散の値は4×4ネットワークの場合とほぼ同程度であり、両手法とも4×4のネットワークの場合と同様、精度が高く、またノード間信頼度の値の大小にも左右されず、安定した結果を示している。CPU-TIMEについても、分散減少法は直接法の1.2~1.4倍であり4×4ネットワークの場合と同程度であることがわかる。しかし、両モンテカルロ法ともCPU-TIMEは、4×4ネットワークの場合に比較して2~3倍必要となり、リンク数(24から40に増加)の増加以上に増加する。このことは、後述するように、大規模ネットワークを対象とする場合、モンテカルロ法にも適用限界があることを示唆している。

(2) 現実ネットワークへの適用可能性

本節では、各方法を現実規模の道路ネットワークに適用し分析・検討を加える。本節で用いるのは京都市のネットワークであり、49ノード85リンクの格子状ネットワークで表現されている。各リンクの信頼度は、昭和60年度センサスによる混雑率を参考に、信頼度を混雑率の反比例関数で与えるという簡便な方法で求めた。このリンク信頼度の与え方には問題も多いが、本研究ではリンク信頼度を与件とした場合の2点間信頼度の効率的算出法を比較・検討するのが目的であり、リンク信頼度の与え方については別の機会に述べることにする。

表-3 現実規模ネットワークでの計算結果

ノード ペア	プール演算法			交点法		モンテカルロ法 (直接法)	モンテカルロ法 (分散法)
	上限値 (誤差)	下限値 (誤差)	上・下限値 の幅	推定値 (誤差)	交点	推定値 (誤差)	推定値
ケースX	0.91351 (+0.08655)	0.43734 (-0.38962)	0.47617	0.87038 (+0.04342)	22	0.82380 (-0.00318)	0.82696
ケースEW1	0.87299 (+0.04474)	0.55359 (-0.27466)	0.31940	0.82315 (-0.00510)	10	0.83050 (+0.00225)	0.82825
ケースEW2	0.79983 (+0.05204)	0.47218 (-0.27561)	0.32765	0.76322 (+0.01543)	10	0.75840 (+0.01061)	0.74779
ケースNS	0.97946 (+0.04358)	0.65199 (-0.28388)	0.32747	0.97019 (+0.03431)	40	0.93230 (-0.00358)	0.93588

※ 上・下限値の幅とは上限値と下限値との差であり、交点位置とは交点が発生するのに要したミニマルパス・カット数をいう。また、誤差はモンテカルロ法(分散減少法)による推定値を基準値としたものである。

表-4 現実規模ネットワークでの計算結果

ノード ペア	プール演算法		交点法	モンテカルロ法 (直接法)		モンテカルロ法 (分散減少法)	
	上限値 CPU-TIME	下限値 CPU-TIME	CPU-TIME	CPU-TIME	分散 ( $\times 10^{-6}$ )	CPU-TIME	分散 ( $\times 10^{-6}$ )
ケースX	1.971	1.826	0.049	56.158	14.515	61.175	5.8717
ケースEW1	1.886	2.120	0.060	53.450	14.077	60.122	6.0629
ケースEW2	1.948	1.761	0.059	53.969	18.323	61.138	2.9106
ケースNS	2.020	1.966	0.051	57.446	6.3117	63.009	2.4546

※ 分散値は、厳密値が求められないためモンテカルロ法(分散減少法)によって求められた値をもとにした推定値である。 CPU-TIME: 単位・秒 (FACOM M-780)

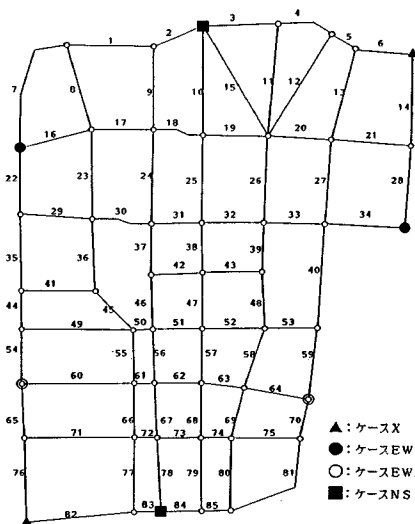


図-7 京都市のネットワーク (49ノード85リンク)



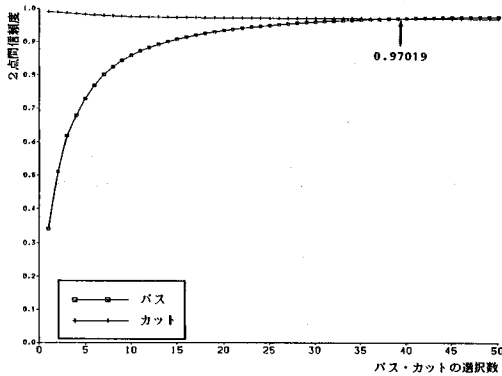


図-8 ケース NS での交点発生の様子

対象とする2点間として、4ノードペアを選んだ。すなわち、対角線方向ノードペア（以下ケースXとよぶ）、東西方向ノードペア2ケース（ケースEW1, EW2）、南北方向ノードペア（ケースNS）である。これらを図-7に示す。それぞれに対して各方法を適用し、ノード間信頼度を求めた。計算結果を表-3, 表-4に示す。

プールの演算法、交点法に関してはこれまでと同様、生起確率の順にパス・カットを選択して計算に用いている。ただしプールの演算法に関しては、計算時間の短縮のためそれぞれ10本で計算を打ち切った。モンテカルロ法では、それぞれ1万回の試行を行った。

プールの演算法では、パス・カットの選択数を減らしたこともあって、かなり誤差の大きい結果となった。パス・カット数を増加させると、理論的には厳密値により近い近似値が得られる。しかし、このネットワークでのパス・カットの総数は非常に膨大な数となるため、少々選択数を増やしてもこの値が厳密値に大きく接近しない。したがってプールの演算法は、ネットワークが拡大した場合には近似値として利用するのは難しいと考えられる。

交点法では、ネットワークが拡大したため、交点の発生がかなり遅れた。特にケースNSでは、パス・カットを40本ずつ選択してようやく交点が発生した（図-8参照）。基準値との誤差はケースXのときが最大で、およそ0.04程度となっている。計算時間はほとんど変わらず、きわめて効率的に近似値が計算できる。

モンテカルロ法では、直接法、分散減少法ともに、高い精度で近似値を与えていると考えられるが、ネットワークが拡大したため計算時間がかなり増大した。乱数の発生および連結性の判定に時間がかかるのが理由である。したがってモンテカルロ法では、良好な精度を得ることができる反面、リンク数の増加以上に計算時間が増加する性質があるといえる。

## 5. まとめ

本論文では、道路網のノード間信頼度を求める方法としてミニマルパス・カットを利用した2方法とモンテカルロ2手法の計4方法をとりあげ、異なる規模のネットワークを対象に道路網への適用性の比較検討を行った。

仮想ネットワークおよび実規模ネットワークを対象に計算を行った結果をまとめると、各方法には一長一短があり、対象とするシステムの規模に応じて適切な方法を選択する必要があるといえる。各方法の特徴をまとめると以下のとおりである。

(1) プール演算法が、他の方法に比べて優れている点は、パスによる値は下限値、カットによる値は上限値と、厳密値との大小関係が数学的に保証されており、得られる値に説得力をもたせられることである。しかし、システム規模が大きくなると選択パス・カット数が増加し、良好な上・下限値を得ることが困難となる。したがって、この方法の適用範囲はシステム規模が小さい場合、あるいは少々システムが拡大しても、システム信頼度が高い場合であると考えられ、この場合には効率よく上・下限値を得ることができる。さらに、この方法では確率変数の情報が保存されるため、ネットワーク中における各リンクの重要度（整備順位の決定等に利用できる）等の解析的分析が可能<sup>8)</sup>な点が長所となっている。

(2) 交点法は、対象とするネットワークでの $n$ 番目最短経路探索を行った後、きわめて簡単な計算で信頼度が求められるという大きな利点がある。このため、信頼度計算の実行可能性がネットワーク規模に左右されない。また、プールの演算法同様、現実的な経路や交通断面に基づいた記述が行えることが大きな特徴となっており、計算過程に交通工学的の意味を与えることができる。しかし、得られた近似値は、プールの演算法ほど明確な数学的裏付けがないため、厳密値との乖離の程度が常に一定値以内に収まる保証がないのが欠点である。しかしながら、今回検討した種々のネットワークにおいては基準値との誤差はほぼ $\pm 0.05$ 以内に収まっており、この程度の誤差が許容されれば実用的な方法となると考えられる。なお、交点の効率的な位置決定法として、パス・カット選択数が大きくなると両曲線の変化が緩慢になることを利用して、パス・カットの増加による曲線変化を外挿して求める方法も考えられる。

(3) 直接的モンテカルロ法では、得られる精度がシステム規模に左右されず安定しており、道路網の信頼性評価にとっては十分であると考えられる。しかし、システム規模が小さい場合には、プールの演算法等の方が有効であって、追加的作業を必要とするモンテカルロ法を利用する意義は少なく、プールの演算法の適用限度を越える

システム規模から本手法の有効性が発揮される。しかし、さらにシステム規模が大きくなると急激に計算時間が増加するという短所を有している。

この方法の問題点は、得られた信頼度が単なる連結確率であり、連結している場合の経路が、たとえばジグザグの経路や大回りの経路<sup>8)</sup>のように、必ずしも現実に利用される経路を反映していないことである。現実的な経路かそうでないかをシミュレーションの段階で判定するのは困難である。また、この連結性の判定のために、インシデンス行列等の連結データを与える必要があるが、この作業量が大きくなる。

(4) 分散減少法も、直接法と同様の長所・短所をもつ。直接法に比べてきわだった長所は、きわめて高い計算効率をもっていることである。ここで、計算効率とはCPU-TIMEと分散との積で定義したものである。したがってこの方法の特徴は、きわめて高信頼度のシステムにも対応できることである。しかしながら、段階的に行われるサンプリング領域設定のため、シミュレーション以前に経路探索によってパス・カットを選択し、構造関数の構築およびその際に、確率の重複計算を避けるために項の整理を行う追加作業が必要となる。そしてこの段階的サンプリングのための構造関数がリンク総数の約2倍(正確には、2(リンク総数+1)個)必要であり、その作業が複雑かつ膨大となることが短所となっている<sup>12)</sup>。論文中で示したCPU-TIMEはシミュレーション以降のものであり、シミュレーション以前のこの作業量をいかに評価するかが問題となっている。このように、両モンテカルロ法とも精度の点では優れているが、その値を求めるのに要する作業時間(構造関数の構築、シミュレーション、連結性の判定などに要する時間)がネットワークの拡大に伴って膨大化するという欠点をもっている。

両モンテカルロ法を比較すると、分散減少法が直接法に対して優位性を発揮するのは、きわめて精度の高い値が要求される場合である。直接法は、きわめて高信頼度のシステムには対処できないという欠点をもつが、道路網に適用する場合はさほど問題とならないであろう。

以上述べてきたように、本研究では、4×4、5×5、京都市ネットワークを対象に信頼性解析法を比較した。ネットワーク規模と適切な信頼性解析法との関係をより詳細に知るには、さらにリンク数、ノード数を細かく変化させて分析を行う必要もあろうが、精度やCPU-TIMEにおける大体の傾向は得られたものと考えられる。また、計算の困難性等の問題点も比較的確確に得られたものと考えられる。これらをまとめると次のようになる。

システムが小規模で、かつ厳密値の計算が困難な場合には、上・下限値の得られるブル演算法が有利である。システム規模が大きくなると、ブル演算法のメリット

が少なくなり、代わりに交点法やモンテカルロ法の実用性が顕著となる。さらにネットワーク規模が拡大し現実規模のシステムになると、モンテカルロ法では計算時間が膨大化して実用性が乏しくなる。このような大規模システムにおいても、交点法では計算の増大量はわずかで済み、実行可能性は保証されている。精度はモンテカルロ法に比べて優れているとはいえないが、道路網の整備水準指標の精度としては、支障となることは少ないと考えられる。また、計算がきわめて容易であり、かつ選択するパス・カットは日常的な経路や、交通断面を反映し交通工学的意味を有しているので、種々の道路交通計画に対して効果的な現実的対応が可能となる。したがって、道路網の信頼性解析に適用するには、交点法はきわめて有用な実用的方法といえる。

#### 参考文献

- 1) 井上紘一：FTAの基礎理論と数値的解析法，井上威恭監修，総合安全工学研究所編「FTA安全工学」，第2章，pp.69～70，日刊工業新聞社，昭和54年。
- 2) Henley, E.J. and Kumamoto, H. : Reliability Engineering and Risk Assessment, Prentice-Hall, Inc., 1981.
- 3) 三根 久・河合 一：信頼性・保全性の数理，朝倉書店，1982.
- 4) 井上紘一・稲垣敏之：大規模システムの信頼性解析へのグラフ理論の応用，システムと制御，Vol.20, No.12, pp.641～648, 1976.
- 5) Fratta, L. and Montanari, U.G. : A Boolean Algebra Method for Computing the Terminal Reliability in a Communication Network, IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-20, No. 3, pp.203～211, 1973.
- 6) Barlow, R.E. and Proschan, F. : Mathematical Theory of Reliability, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
- 7) 若林拓史・飯田恭敬：交通ネットワーク信頼性解析への信頼性グラフ理論適用の考え方，土木計画学研究・講演集10, pp.125～132, 1987.
- 8) 飯田恭敬・若林拓史：ブル代数を用いた道路網ノード間信頼度の上・下限値の効率的算出法，土木学会論文集，No.395/IV-9, pp.75～84, 1988.
- 9) 飯田恭敬・若林拓史・吉木 務：ミニマルパス・カットを用いた道路網信頼度の近似計算法，交通工学，Vol.23, No.4, pp.3～13, 1988.
- 10) 津田孝夫：モンテカルロ法とシミュレーション，pp.84～106，培風館，昭和56年。
- 11) Kumamoto, H., Tanaka, K. and Inoue, K. : Efficient evaluation of system reliability by Monte Carlo method, IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-26, No.5, pp.311～315, 1977.
- 12) 若林拓史・飯田恭敬・福島 博：道路網の信頼性解析に対するモンテカルロ法の適用，土木計画学研究・講演集11, pp.259～266, 1988.

(1988.11.25・受付)