

新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析

INVESTIGATION OF THE QUASI-STATIC BEHAVIOR OF GRANULAR MATERIALS WITH A NEW SIMULATION METHOD

岸野 佑次*

By Yuji KISHINO

A new simulation method, which will be called the granular element method, has been developed to investigate the quasi-static behavior of granular materials. The granular element method is based on an iterative process which includes the calculation of the contact stiffness matrices and the cancellation of the fixing force vectors to get the equilibrium state. The comparison with the exact solution of a granular assembly of three discs shows the efficiency of this method. Another example is the bi-axial shearing test of 122 discs. Through the detailed investigation of the results, the induced anisotropy and the dissipation mechanism are discussed. It is observed that the dissipation in granular assembly tends to take place locally before the formation of internal structure or after the collapse of the structure.

Keywords: granular materials, computer simulation, contact stiffness matrix, induced anisotropy, dissipation mechanism

1. ま え が き

粒状体に関しては、従来より種々のアプローチによる研究が進められているが、いまだ一般的力学体系を構成するまでには至っていない。これは、現段階においてなお粒状体内部に起こる現象の的確な把握が十分ではないためと考えられる。たとえば、粒状体が弾塑性モデルとして巨視的に扱われることはあっても、弾性や塑性、さらには、降伏といった概念が微視的にどのように説明されるのか明らかではない。このような観点から、今後、粒状体のマイクロメカニクスの研究¹⁾の一層の推進が必要と考えられる。

粒状体力学の微視的なアプローチにおいては、粒状体内部の種々の微視量を詳細に把握し、巨視的な現象との対応を考察することが必要となる。このような研究を実際の粒状体の試験のみにより推進することは不可能であることから、計算機による数値シミュレーションが1つの有用な手段になると考えられる。Cundallの個別要素法 (Distinct Element Method)²⁾は、そのような目的を達成するために提案された数値シミュレーション法であり、粒状体への応用も種々試みられている³⁾⁻⁴⁾。

ところで、Cundallの方法は、粒状体の準静的な挙動を詳細に調べるためには必ずしも適したものではないように思われる。これは、この解析が粒状体を構成する粒子の動的な運動に支配されて進められることによる。逐次解析過程の1ステップにおける粒子の移動は、運動法則に基づく拘束のない単一粒子の加速度運動である。この運動による粒子の移動の結果、隣接粒子との新しい接触状態が生成されるので、これに基づいて算定される力の不釣り合いに応じて次のステップの加速度運動が生じることになる。したがって、各解析ステップにおいてすべての粒子が静止するまで待つことなく境界を継続的に移動させるとすれば、内部粒子は常に静的な釣り合い条件を満たさない状態に置かれることになる。さらに、粒子の振動を抑え、収束を安定させるために、粘性係数の導入を必要とするが、これは静的な場合には本来考慮する必要がない量である。

本文は、粒状体の準静的な変形機構を詳細に調べるために開発した新しいシミュレーション法⁵⁾(粒状要素法とよぶこととする)の概要と、この方法を応用した例についての考察を示したものである。3.には、厳密解が簡単に求まる3粒子集合体の例を示す。また、4.には122個の粒子集合体の解析をもとに、粒状体の散逸特性などを含めた変形機構の考察を示す。

* 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科
(〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

2. 粒状要素法の概要

(1) 解析方法の基本的な考え方

本文で提案する粒状要素法は以下に示す基本的な考え方に基づいている。これらの考え方は三次元における任意形状の一般的な粒子集合体にも適用が可能であるが、後に示す具体的な説明や例題は二次元円粒子の集合体の場合に限定する。

① 粒状体を構成している粒子の弾性的な性質を、粒子間および粒子と境界の間の接触点において、法線方向および接触面内の仮想ばねを設けることにより考慮することとし、粒子自身は剛体的であると仮定する。

② 粒子同士や粒子と境界は互いに重なり合うことができ、かつそのときに限り接触力が生じると仮定する。通常重なり量は粒子の径に比して十分小さく、粒子集合体の変形は主として粒子配列の変化によって生じる。

③ 粒子間や粒子と境界の間のすべりに関して Coulomb の摩擦則を仮定し、接触力のせん断成分がこれにより定まる最大値を越えることがないようにする。

④ 逐次解析の過程において生じる粒子の不つり合い力や不つり合いモーメントは局所的な剛性マトリクスにより解消される。局所的剛性マトリクスは、各粒子とそれに隣接している粒子や境界との相対的位置関係に応じて時々刻々改訂される。

⑤ 与えられた境界条件や載荷条件に応じて境界の移動を制御する際に、境界の応力はその時点で境界に直接接している粒子とその相対的位置関係に従って算定する。

以上の考え方のうち、④における各粒子の移動方法が Cundall の個別要素法と本質的に異なっている。逐次解析の各ステップにおける粒子の移動方向は、個別要素法の場合、不つり合い力をベクトル的に合成した方向であるのに対して、本方法の場合は、剛性マトリクスにより合理的に定まる移動方向である。Fig. 1 に本方法の解析の流れを示す。この図のように、本方法は境界条件に基づく境界の移動と不つり合い量を解消させるための各粒子の移動を繰り返す逐次演算の過程から成っている。

(2) 要素間の接触力-相対変位関係

Fig. 2 に示すように、 $x=(x, y)^t$ に重心のある半径 r の粒子 A と $x'=(x', y')^t$ に重心のある半径 r' の粒子 B が接触しているとす。接触点 C における単位法線ベクトルと単位接線ベクトルを、それぞれ、 n, t とすれば、粒子 A に作用する接触力 p の法線方向成分および接線方向成分は、それぞれ、 $p_n = -p \cdot n, p_t = -p \cdot t$ と表わされる。いま、粒子 B を固定した状態で粒子 A に変位 Δx と重心のまわりの回転 $\Delta \omega$ を与えたときの粒子間相対変位増分は次のように表わすことができる。

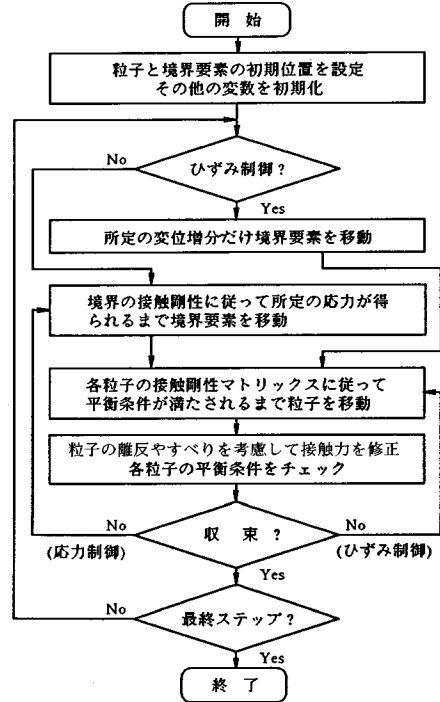


Fig. 1 Flow chart of the granular element method.

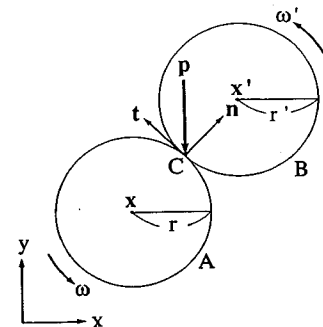


Fig. 2 Contact force between grains.

$$\Delta U_c = T_c \Delta X \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $\Delta U_c = (\Delta u_n, \Delta u_t)_c^t$ は n, t 方向の変位増分を与えるベクトル、 $\Delta X = (\Delta x, \Delta y, r \Delta \omega)^t$ は x, y 方向の変位と回転の増分を与えるベクトル、

$$T_c = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 1 \end{bmatrix}_c \dots \dots \dots (2)$$

は変換マトリクス (θ は n と x 軸のなす角) である。

接触力と相対変位の関係は一般に非線形性を考慮して定めるべきであるが³⁾、粒子が剛体的であり、すべりが生じるまでの相対変位を微小と想定すると、この部分には線形性を仮定してもよいと思われる。これより、2粒子が接している限り、両者の相対変位増分に対して、次式のような接触力増分が生じることになる。

$$\Delta P_c = S_c \Delta U_c \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $P_c = (p_n, p_t)_c^t$ は接触点 C に作用している接触力ベクトル、また、

$$S_c = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix}_c \dots\dots\dots (4)$$

は接触点 C における法線および接線方向の仮想ばねの剛性 k_n, k_t より成る剛性マトリックスである。

粒子と境界の間の接触点についても以上と同様に剛性マトリックスを定めることができる。なお、粒子間や粒子と境界の間の離反やすべりに伴う剛性の非線形性については、式 (4) の剛性マトリックスを定める段階では考慮せず、粒子や境界の移動量を算定した後に (5) に示すような方法で補正を行うこととする。

(3) 固定力ベクトル

粒子集合体の平衡状態は各粒子を逐次移動させることにより求める。一般に、逐次演算の過程において、各粒子に作用している力は平衡条件を満たさない。したがって、各粒子の変位や回転を固定した状態で強制的に平衡条件を満たさせるためには、Fig. 3 のように、個々の粒子に仮想の力とモーメントを加える必要がある。

固定力ベクトルはこれを実現するために粒子中心に加える仮想の力 f と仮想のモーメント m とから成るベクトルであり、 $F = (f_x, f_y, m/r)^t$ と表わす。F は、接触点 C に作用している接触力 P_c と粒子重心に作用する物体力 $B = (b_x, b_y, 0)^t$ により、

$$F = \Sigma_c T_c^t P_c - B \dots\dots\dots (5)$$

と与えられる。ここに、 Σ_c は 1 つの粒子の全接触点についての和を表わす。

(4) 接触剛性マトリックス

接触剛性マトリックスは、隣接する粒子や境界を固定した状態で、着目している粒子に単位の変位や回転を与えたときに生じる力とモーメントより成るマトリックスであり、次のように導かれる。式 (1), (3) より、粒子の変位と回転の増分 ΔX により、C 点に接触力の増分

$$\Delta P_c = S_c T_c \Delta X \dots\dots\dots (6)$$

を生じる。したがって、すべての接触力増分により次の

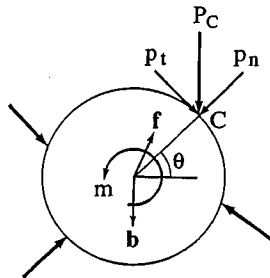


Fig.3 Fixing of a grain.

固定力増分が生じることになる。

$$\Delta F = S \Delta X \dots\dots\dots (7)$$

ここに、接触剛性マトリックス S は式 (5), (6) より

$$S = \Sigma_c T_c^t S_c T_c \dots\dots\dots (8)$$

により与えられる。S は粒子同士または粒子と境界の相対的な移動に伴い逐次変化する。

もし、 $\det S \neq 0$ に対し、隣接粒子を固定したまま 1 つの粒子のみの平衡状態を得ればよいのであれば、固定力ベクトルは $F + \Delta F = 0$, すなわち、 $\Delta X = -S^{-1}F$ により解消される。

(5) 固定力ベクトルの解消

Fig. 1 に示したように、設定した境界条件下における粒子集合体の平衡位置は、固定力ベクトルを粒子ごとに逐次解消することにより得られる。このような逐次解析が必要な理由は、粒子間の接触関係が時々刻々変化し、したがって、接触剛性マトリックス S を逐次改定する必要があること、また、 $\det S = 0$ となる場合もししばしば生じるので、これに対処する必要があることによる。

各粒子の固定力ベクトルを個別に逐次解消していくとすると、解消の順序により結果が異なる可能性がある。これを避けるために、まず、すべての粒子について 1 つ前のステップの粒子配列により固定力ベクトルや接触剛性マトリックスを求める。次に、これらに基づいて個々の粒子の移動量を定めた後、全粒子を同時に移動させる方法をとる。その際、粒子移動量の絶対値については個々に求めた量を修正して用いることとする。

以下に接触剛性マトリックスのもつ特性ごとに、粒子移動量を求める方法について述べる。

a) $\det S \neq 0$ の場合

接触剛性マトリックスが $\det S \neq 0$ を満たす場合は、

$$\Delta X = -\alpha S^{-1}F \dots\dots\dots (9)$$

に従って粒子を移動させればよい。ここに、修正係数 α は、隣接粒子も同時に移動することを考慮して、 $\alpha < 1$ とする。

b) $\det S = 0$ (接触点数 0) の場合

全く接触点のない粒子については、物体力に応じて移動させる。本来、物体力は粒子に運動を生じさせるが、本文は準静的な問題を扱っているため、動的な効果はないものとする。過度の移動による他の粒子との大きな重なり合いを避けるために、次式により物体力の作用方向に徐々に移動させることとする。

$$\Delta X = \beta B / k_n \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\beta > 1$ は修正係数である。

c) $\det S = 0$ (接触点数 1) の場合

粒子の接触点数が 1 の場合、法線方向については a) のように法線方向の剛性に従って移動させ、接線方向に

は物体力に応じて隣接粒子の上を転がして移動させる。したがって、 $\Delta u_i=0$ とおけば、 ΔX は

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_c \begin{bmatrix} -\alpha' f \cdot n / k_n \\ \beta' b \cdot t / k_n \end{bmatrix}_c \dots\dots\dots(11)$$

により算定される。ここに、 α' 、 β' は α 、 β と同様の修正係数である。

d) $\det S=0$ (接触点数2以上) の場合

これは、 $k_i=0$ の特殊な場合に限られるが、回転を拘束して移動させることとすれば、 ΔX は $\Delta \omega=0$ と

$$\Delta X' = -\alpha S'^{-1} F' \dots\dots\dots(12)$$

により与えられる。ここに、'を付した量は回転成分を除いたベクトルまたはマトリックスである。

以上のようにして求めた ΔX に対する接触力の増分は式(6)により計算される。この結果、もし p_n が零以下になったならば、 $p_n=0$ とおく。また、もし p_t がCoulombの法則により定まる限界値を越えたならば、

$$|p_t| = p_n \tan \phi + c \dots\dots\dots(13)$$

となるように p_t の絶対値を修正する。ここに、 ϕ は摩擦角であり、 c は粘着力である。

(6) 境界要素の移動と収束の判定

ここでは、主に粒状体の要素試験を念頭に置いて境界の移動方法などについて説明するが、基本的な考え方は任意の境界条件にも応用可能である。

解析領域の境界は境界要素の組から成る。通常の2軸試験の制御のためには、後の例に示すように、4辺の壁が境界要素として用いられる。また、より細かな制御を行うためには、Fig. 4のように領域の外周に沿って配置された粒子の組を境界要素とすることもできる。

平衡状態における境界要素の固定力ベクトルは零ではなく、外力として作用する力とモーメントに等しい。境界要素の接触剛性は隣接する粒子を固定したまま境界要素に単位の変位および回転を与えるための力およびモーメントと定義される。境界要素の移動は、この境界要素の接触剛性に基づいて、内部粒子の場合と同様に行われる。ただし、以下に示すように、载荷の制御方式に応じ

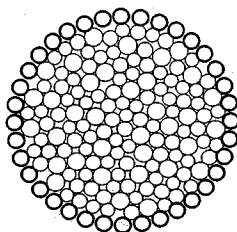


Fig. 4 Example of boundary elements.

て境界要素の移動方法を工夫する必要がある。

ひずみ制御の場合は、各载荷ステップのひずみ増分に対応した移動量を境界要素に与えた後は、すべての内部粒子が平衡位置に落ち着くまでそのひずみを保つようにすればよい。内部粒子が平衡状態に達したとき、境界要素の固定力ベクトルを算定すれば、それが境界に作用する外力となる。

応力制御の場合は、各载荷ステップの応力増分を前ステップの応力に加え、境界要素に与える外力を求める。逐次計算の各ステップにおける固定力ベクトルと外力との差の解消は、境界要素を境界要素の接触剛性に応じて移動させることにより行う。この場合、境界要素は内部粒子固定のまま移動させるので、(5)に述べたような修正係数は乗じない。境界要素の移動により内部粒子に新たな固定力ベクトルが生じるので、これを内部粒子の移動により解消させる。この内部粒子の移動は逆に境界要素の固定力ベクトルを変化させる。したがって、境界要素における外力が所定の値となり、内部粒子が平衡状態に達するまで、以上のステップを繰り返す。

応力制御とひずみ制御とは通常混在することになる。たとえば、応力のみを制御する試験はない。これは、応力のみ境界条件では、粒子の絶対変位を確定させることができず、領域全体の平行移動や回転により解が収束しない可能性があるためである。したがって、通常、応力制御により境界要素を移動させる場合には、剛体的な平行移動や回転が含まれないような拘束を加えて制御する必要がある。また、粒状体の場合、せん断変形と体積ひずみの関係が重要であるので、体積一定条件のような特殊な場合を除き、完全なひずみ制御は用いられない。

混合型の制御方法として平均応力一定のせん断試験について説明する。この場合、各ステップの始めに所定のせん断ひずみ増分を与えて平衡状態を求めた後、境界に作用する平均応力と設定した値との間に生じた差に対しては応力制御により境界要素を移動させる。このとき、領域には等方的なひずみのみが生じるようにし、最初に与えたせん断ひずみ増分を変化させないようにする。

逐次解析の収束を安定なものとするためには、解析の過程において過度の重なり合いを避けることが重要である。このためには、各载荷ステップにおいて境界要素が急激に移動しないように、ひずみ増分や応力増分の大きさを制限する必要がある。逆に、極端な重なり合いがない限り、たとえ平衡条件を満たさない人為的な粒子パッキングの入力データに対しても、本文の方法を用いることにより所期の平衡状態を得ることができる。

収束の判定は、次式のように、各粒子の固定力ベクトルの絶対値の大きさを調べることにより行う。

$$F^i F^i \leq a^2 \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 a は精度 (力の単位) である。

3. 3 粒子集合体の例題

本節においては、簡単に厳密解の求まる 3 粒子集合体の平均応力一定 2 軸せん断試験について、厳密解と粒状要素法による解析結果とを比較する。また、仮想ばねの剛性や境界の摩擦係数の影響について考察する。

(1) 剛体 3 粒子の場合の厳密解

Fig. 5 のように、3 個の摩擦のない剛体粒子 (粒径はいずれも r) が 4 方の壁より外力を受けている場合の平衡条件を考える。粒子と壁との摩擦はなく、物体力は作用していないものとするれば、壁から粒子に加えられる力は同図に示すように、 P_1 と P_2 で表わされる (以下、添え字の 1 は鉛直方向, 2 は水平方向の量を表わすものとする)。粒子間力 X は、水平方向と接触面の法線のなす角度を θ とすれば、次式で与えられる。

$$X = P_1/2 \sin \theta \dots\dots\dots(15)$$

また、 P_1 と P_2 の関係は

$$P_1/P_2 = 2 \tan \theta \dots\dots\dots(16)$$

である。

一方、応力は次式のように与えられる。

$$\sigma_1 = P_1/2 r(1+2 \cos \theta) \dots\dots\dots(17)$$

$$\sigma_2 = P_2/2 r(1+\sin \theta) \dots\dots\dots(18)$$

式 (16)~(18) より、主応力比は

$$\sigma_1/\sigma_2 = 2 \tan \theta(1+\sin \theta)/(1+2 \cos \theta) \dots\dots\dots(19)$$

となる。また、初期状態において $\theta = \theta_0$ とすれば、境界辺の移動に伴うひずみは次式で与えられる。

$$\epsilon_1 = 2(\sin \theta - \sin \theta_0)/(1+\sin \theta_0) \dots\dots\dots(20)$$

$$\epsilon_2 = 2(\cos \theta - \cos \theta_0)/(1+2 \cos \theta_0) \dots\dots\dots(21)$$

後掲の Table 2 と Fig. 7 には、初期状態を $\theta_0 = 60^\circ$ (粒子重心を正三角形の頂点に置いた配列) とする解析結果を “exact” として示す。

(2) 粒状要素法による解析 (摩擦のない場合)

厳密解の場合と同様に、 $\theta_0 = 60^\circ$ を初期状態 (ただし、応力は等方状態) とする解析を行った。

3 粒子 (粒子半径 1 cm) の初期配列は Fig. 5 におい

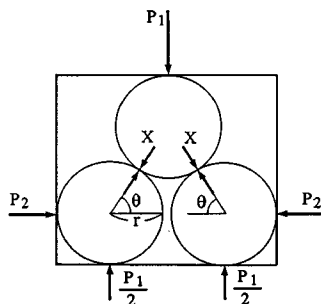


Fig. 5 Equilibrium of three grains.

て $\theta_0 = 60^\circ$ で接し、すべての接触力は零とする。まず、粒子や境界の間に初期の接触力を生じさせるために、等方応力 $\sigma_0 = 1.5 \times 10^6$ dyn/cm (奥行き方向の幅は 1 cm, 以下同様) となるまで徐々に等方圧を加えた。この初期状態に対し各載荷ステップにおけるせん断ひずみ増分を $\Delta(\epsilon_1 - \epsilon_2) = 0.05\%$ としてひずみ制御のせん断試験を行った。境界と粒子の間の摩擦角は、厳密解と比較するため、 $\phi' = 0^\circ$ とする。この場合、粒子間摩擦角は結果に影響を及ぼさない。 $\phi' \neq 0^\circ$ の場合については (3) に述べる。仮想ばね定数 k_n, k_t (粒子間および粒子境界間同一) および収束判定の精度 a (固定力ベクトルの絶対値の最大値) については Table 1 に示す値を用いて解析を行った。仮想ばねは粒子の弾性的変形に対応するものと考えられるが、ここではなるべく剛体粒子に近い状態を実現するために、同表のような値を選んだ。また、 k_t/k_n の比の値は弾性体の接触問題の Mindlin 解の下限値に近い 0.7 とした²⁾。なお、物体力および粘着力は 0、修正係数 α は 0.75 とした。

Table 1 Constants used in each case.

Case	k_n (dyn/cm)	k_t (dyn/cm)	a (dyn)
1	1×10^8	7×10^7	100
2	1×10^8	7×10^7	1
3	1×10^{10}	7×10^9	100
4	1×10^{10}	7×10^9	1

せん断の初期および最終の状態における粒子配置を、Case 1 の場合について、Fig. 6 に示す。図中の各接触点を通る細長い長方形は接触力を表わす。長方形の幅は力の大きさ、向きは力の作用方向を示す。同図は仮想ばねの剛性の小さい場合の結果ではあるが、粒子間の重なりがほとんどないことが観察される。本方法に従ってひずみ制御による載荷を続けるならば、Fig. 6(b) の後の有限変形の解析も行うことが可能である。

次に、Table 1 の各場合の最大せん断ひずみと応力比 $(\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2)$ の関係を、(1) の厳密解とともに、Table 2 に示す。同表よりわかるように、いずれの場合もせん断ひずみが零のときを除いて、厳密解と良く合う結果となった。剛体に対する厳密解においては、仮想ば

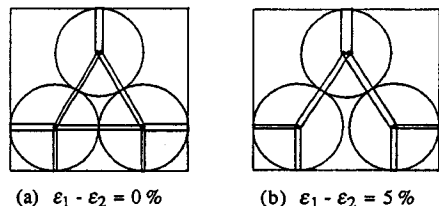


Fig. 6 Location of grains.

Table 2 Comparison of stress ratio.

$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$	Exact	Case1	Case2	Case3	Case4
0%	0.5274	0	0	0	0
1	0.5164	0.5189	0.5187	0.5166	0.5164
2	0.5053	0.5079	0.5076	0.5056	0.5054
3	0.4942	0.4967	0.4965	0.4944	0.4942
4	0.4829	0.4854	0.4852	0.4832	0.4829
5	0.4716	0.4741	0.4739	0.4718	0.4716

ねを設けたシミュレーションと異なり、応力比が Table 2 の 0% の値になるまでひずみは零である。

Table 2 より、ばね剛性を Case 3, 4 のように大きく仮定した場合、剛体の厳密解に非常に近い結果が得られることがわかる。また、Case 1, 2 の場合もこれらとの差異は小さい。さらに、Table 2 の 2 つの収束判定の精度による解析結果の差異も大きくないので、以後の解析においては Case 1 のデータを採用することとする。

(3) 粒状要素法による解析 (摩擦のある場合)

境界と粒子の間の摩擦を考慮して (2) と同様の 3 粒子の解析を行った。粒子間摩擦角は光弾性実験との比較を行っている Cundall らの解析²⁾を参考に $\phi = 25^\circ$ とした。また、粒子と境界との間の摩擦角は $\phi' = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ と変化させた。他の定数は (2) の Case 1 と同様である。せん断ひずみ-応力比関係を Fig. 7 に示す。同図には (1) で求めた厳密解の結果を破線で示した。厳密解と $\phi = 0^\circ$ のシミュレーション解析結果との差異は仮想ばねとしてモデル化した粒子の弾性変形に起因する。図中の変曲点は下の 2 粒子が離れ始める点に対応しており、このとき、応力比は最大値となる。3 粒子の場合は回転の自由度が限られているため、 ϕ' がこの最大値に及ぼす影響が大きい。

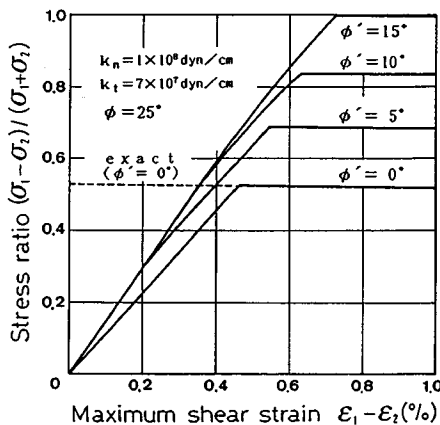


Fig. 7 Stress-strain relationship.

4. 2軸せん断試験のシミュレーションとその考察

ここでは 122 個の円形粒子集合体について、平均応力一定のひずみ制御による 2 軸せん断試験をシミュレートした例を示し、変形特性、力学量の統計的分布特性、エネルギーの散逸機構などについて考察する。

(1) 設定した解析条件

初期状態の粒子配列と接触力の分布を Fig. 8 に示す。同図には、Fig. 6 と同様に、接触力の分布も示した。このパッキングは 3 種の径の円粒子が等しい総面積となるように混合されており、初期空隙率は 0.260 である。初期状態は人為的パッキングを所定の等方応力状態になるように圧縮したものである。人為的パッキングは一般に平衡条件を満たしていないが、本方法を用いて平衡状態を得ることができる。この例においては、まず、重力に対抗できる程度の等方応力を 4 辺の壁に加えて平衡状態を求め、その後、応力制御により等方応力を徐々に増加させることにより初期状態を得た。また、得られた初期状態より出発してせん断を加える際には、2. (6) に述べた方法に従って平均応力を一定に保ち、各ステップのせん断ひずみ増分を $\Delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0.05\%$ とするひずみ制御の載荷方法を用いた。

等方圧縮およびせん断において用いた諸定数は、3. の結果を参考にして、Table 3 のように定めた。同表の値は深さ方向は 1 cm として示した。粒子の重量は水中重量と考えた。ただし、載荷はすべて排水条件下で行った。なお、4 辺の壁には平行移動のみを許し、かつ、水平および鉛直の壁がそれぞれ対称的に移動するように拘束を与えた。壁面は主応力方向を向いているので、壁と粒子との間の摩擦係数は零に設定した。また、境界における応力は水平および鉛直の各方向について 2 つずつの壁に作用している接触力の総和を各方向の辺長の 2 倍で割ることにより求めた。

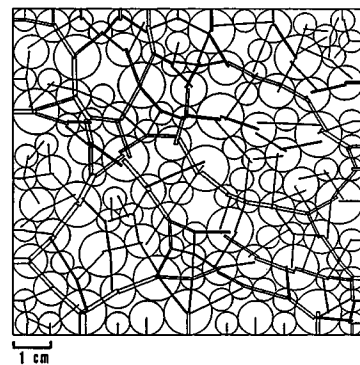


Fig. 8 Distribution of contact forces at the initial state.

Table 3 Constants used in the analysis.

Diameter of disc	6, 9, 12 mm
Weight of disc	1500 dyn/cm ²
Stiffness k_n, k_t	$1 \times 10^8, 7 \times 10^7$ dyn/cm
Friction angle	25° (between discs) 0° (against wall)
Cohesion c	0 dyn
Confining stress σ_0	1.5×10^5 dyn/cm
Modification factor	
$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$	0.75, 0.5, 20, 20
Accuracy a	100 dyn

(2) 解析結果

Fig. 9 にせん断ひずみと応力および体積ひずみとの関係を示す。変形が進むとダイレイタンスが増加し、やや密詰めめの砂の試験に類似している。図中の黒丸はピーク点を表わす（以後同様とする）。応力やひずみの添え字の 1 は鉛直方向、2 は水平方向を表わす。ピーク時における主応力比 σ_1/σ_2 の値は約 1.7 である。ピーク後の軟化が進んだ段階などにおいて不安定な変形もみられるが、これは、粒子数が多くないために、粒状体を構成する粒子構造の局所的な変化が巨視的な変形特性に影響を及ぼしているものと思われる。

Fig. 10 にピーク状態における接触力の分布を示す。初期状態の分布 Fig. 9 と比較して、鉛直方向に接触力が集中していることが観察される。また、光弾性実験においてもみられるように⁶⁾、接触力は均等には分布せず、力の伝達を積極的に担う粒子と、そうでない粒子とが存在する。さらに、接触点における法線の向きが最大主応力方向の鉛直方向に集中する傾向がみられる。

Fig. 11 は、接触力を伝達している接触点の数について接触法線の向き別に統計をとり、これを初期状態とピーク状態について百分率で示したものである。なお、接触点の数は、(3) に述べる配位テンソルの定義に合わせて、境界と粒子の間の接触点は粒子間の接触点

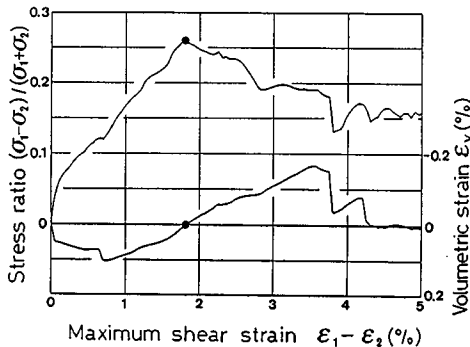


Fig. 9 Stress-strain relationship.

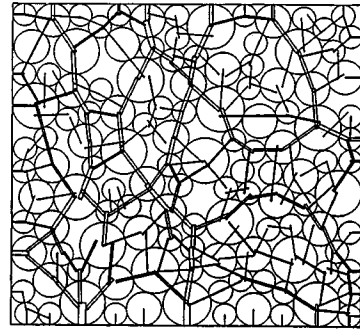


Fig. 10 Distribution of contact forces at the peak state.

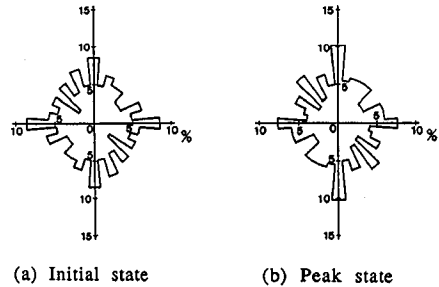


Fig. 11 Distribution of contact normals.

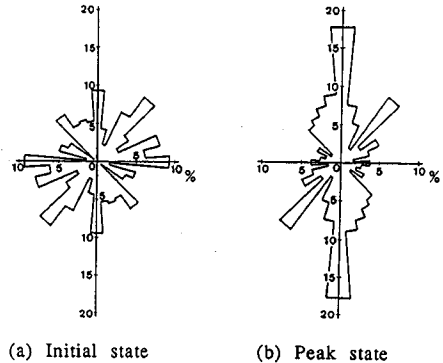


Fig. 12 Distribution of elastic energy.

の半分に評価することとした。この例における境界要素は水平および鉛直方向の平らな壁であるので、これらの方向で分布が多少突出することになるが、ピーク状態において最大主応力の作用する鉛直方向に接触法線の向きが集中する傾向を窺うことができる。

Fig. 12 は、Fig. 11 と同様に、各接触点における法線および接線方向の仮想ばねの弾性エネルギーの合計
$$e_c = (p_n^2/k_n + p_t^2/k_t)/2 \dots\dots\dots (22)$$
 について接触法線の向き別の総和を求め、百分率で示したものである。この図は接触法線の向きを弾性エネルギーのウェイトをかけて調べたものとなっている。Fig. 11 に比して、最大主応力方向への集中が顕著な分布となっている。ただし、鉛直方向の次に水平と 50 度

の方向への集中がみられるが、これは、この粒子集合体のパッキングの特性によるものと考えられる。

(3) 配位テンソルと弾性エネルギーテンソル

ここでは、粒子1個当たりの接触点数を表わす配位数と粒状体のもつ弾性エネルギー密度について異方性に着目した考察を行う。なお、以下の考察においては、接触力を伝達している接触点のみを対象とする。

まず、配位テンソルを次のように定義する。

$$C_{ij} = \{ \sum_c (\sum_c n_i n_j) \} / N \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 n_i は接触点における単位法線ベクトル、 N は粒子数であり、 \sum_c は各粒子の接触点に関する和、 \sum_c は領域内の粒子に関する和を表わす。 C_{ij} は構造テンソル⁷⁾の一種であり、トレースが配位数に等しい。

また、次の量を弾性エネルギーテンソルと称する。

$$E_{ij} = \{ \sum_c (\sum_c e_i e_j n_i n_j) \} / 2A \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 A は領域の面積である。 E_{ij} のトレースは粒状体中の弾性エネルギー密度を表わす。なお、上式の定義によれば、Fig. 12と同様、境界と粒子の間の弾性エネルギーの半分は境界側のもので除外される。

Fig. 13に配位テンソルの主値 C_1 、 C_2 とせん断ひずみの関係を示す。最大・最小主軸の方向は応力テンソルの最大・最小主軸の方向と一致する。配位数 $C_1 + C_2$ は接触力を伝達している接触点のみに基づいて算定されているので、体積ひずみの増減とは必ずしも対応していない。この図より、 C_1 がせん断ひずみの増加とともに硬化および軟化の過程を通じて漸増すること、および C_1 と C_2 の差として現われる粒子配列の誘導異方性が主として C_2 、すなわち最小主応力方向の接触点密度、の変化に支配されていることが特徴的である。また、この例では境界の拘束が大きいので明確ではないが、ピークを挟んだステップにおける C_2 の急激な減少は局所化のような不安定現象に関係するものと考えられる。

Fig. 14は弾性エネルギーテンソルの主値 E_1 、 E_2 とせん断ひずみの関係である。このテンソルの最大・最小主軸の方向も応力テンソルの最大・最小主軸の方向に一致した。 E_1 には明確なピークがみられ、応力比のピークに対応している。この試験のように平均応力が一定の場合、弾性エネルギー密度 $E_1 + E_2$ の変化はわずかであるが、応力比のピーク直前に若干増加している。

(4) 散逸特性の考察

ここでは、Coulombの摩擦則に基づいて算定される散逸エネルギーをもとに、粒状体における散逸機構について考察を行う。

Fig. 2において、2粒子の重心の変位増分ベクトルを Δx 、 $\Delta x'$ 、重心まわりの回転増分を $\Delta \omega$ 、 $\Delta \omega'$ 、単位接線ベクトルを t とすれば、これらの粒子の接触点間相対変位の接線成分は次式で与えられる。

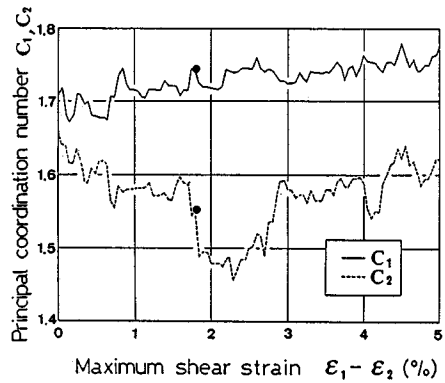


Fig. 13 Transition of co-ordination tensor.

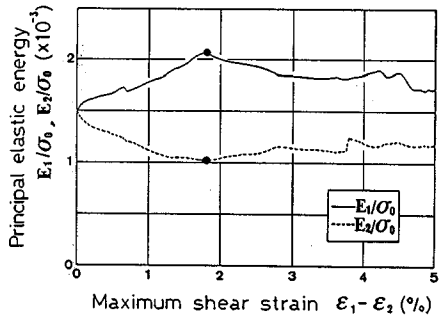


Fig. 14 Transition of energy tensor.

$$\Delta u_t = (\Delta x - \Delta x') \cdot t + (\tau \Delta \omega + \tau' \Delta \omega') \dots\dots\dots (25)$$

このうち、弾性的変位は次式で与えられる。

$$\Delta u_e = \Delta p_t / k_t \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 Δp_t は接触力の接線方向成分の増分、 k_t は接線方向ばねの剛性である。よって、相対すべりは

$$\Delta u_d = \Delta u_t - \Delta u_e \dots\dots\dots (27)$$

により定まり、C点における散逸エネルギー増分を

$$\Delta d_c = p_t \Delta u_d \dots\dots\dots (28)$$

と表わすことができる。上式中、 p_t は考えているステップの前後の平均値(片方の接触力が零のとき零)とする。領域内すべての接触点の Δd_c が算定されれば、散逸エネルギー密度の増分は、式(24)と同様に、

$$\Delta D = \{ \sum_c (\sum_c \Delta d_c) \} / 2A \dots\dots\dots (29)$$

と計算される。载荷の各ステップまでの散逸エネルギー密度 D は ΔD を加算することにより求まる。

一方、粒子集合体になされる外部仕事は、境界とそれに接している内部粒子の間の接触力に基づいて別個に求めることができる。Fig. 15に単位面積当たりの外部仕事 W と散逸エネルギー密度 D のせん断に伴う変化を示す。 W と D の差は仮想ばねに蓄えられる弾性エネルギーに相当し、Fig. 14の E_1 と E_2 の和である。実際、これら3者の計算値は数%の誤差で適合した。この図のように、粒状体がせん断を受けるとき、载荷初期より

散逸エネルギーが生じている。このことに示されるように、粒状体においては弾性変形の限界としての降伏は明確には存在しないと考えられる。

Fig. 15において、 W や D が階段状に増加しているステップが数か所あるが、これは Fig. 9 よりわかるように、不連続な圧縮ひずみの生じたステップに対応している。このようなステップにおいては、局所的に不安定な粒子構造が崩れ、粒子配列の修正が行われている。粒状体には外部から拘束力が作用しているので、このような配列の修正に対しては必ず不可逆的な圧縮ひずみが生じると考えられる。このシミュレーションにおいては、粒子数が少ないために、局所的な不安定性が巨視的なひずみに影響を及ぼすことになるが、粒子数の多い場合には、このような影響が平均化され、Fig. 15 は全体として下にわずかに凸な滑らかなグラフになると考えられる。せん断ひずみが大きくない範囲で、同図の関係を原点を通る直線とみなし、 $W=D$ と近似する限りにおいては、Roscoe タイプの応力比ひずみ増分比関係⁹⁾が得られる。

Fig. 16 は各载荷ステップごとに最大のエネルギー散逸が生じる接触点に着目し、この接触点における散逸エネルギー増分の全散逸エネルギー増分に占める割合 P_{max} の変化を調べたものである。この図には3%のせん断ひずみを生じるステップ60までを示した。この図に示されているように、ステップによっては、最大の散逸が50%以上に達する場合もあり、散逸は領域全体にわたって同時には生じない傾向にあることが注目される。最大散逸割合の比較的大きなステップについて以下に記す。

まず、ステップ1は等方的に圧縮を受けた後に初めてせん断を経験するステップであり、不可逆的な圧縮ひずみが生じている。ステップ14は負のダイレイタンスが最大となるステップであり、ステップ1と同様に大きな圧縮ひずみを生じている。ステップ29はひずみ硬化の途中にあり、ステップ1や14のような圧縮ひずみは生じていないが、最大散逸の生じた接触点における粒子間相対変位に占める相対回転の割合が大であった。ステップ37は応力比のピーク直後のステップである。このように、特に粒子構造の変化や力学的な状態の変化す

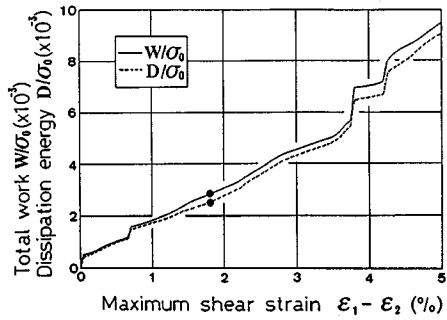


Fig. 15 External work and dissipation energy.

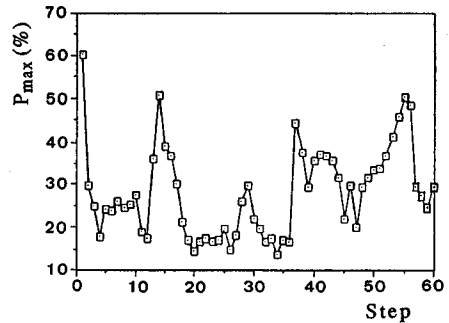


Fig. 16 Percentage of maximum dissipation.

る点においては散逸が特定の接触点に集中する傾向にある。

散逸エネルギーの分布特性を考察するために、個々の接触点における増分の全増分に対する比 P と、 P 以上の散逸レベルに達している接触点の数 N の関係を調べた。Fig. 17 は代表的なステップについてこの関係を両対数グラフ表示したものである。図には全体の99%以上の散逸が生じる上位20個の接触点について示した。せん断を最初に経験するステップ1は直線近似に載るフラクタル的な統計分布を示す⁸⁾。これに対してせん断の進んだステップ5は散逸を上位数個の接触点により平均化して分担している。ピーク直後のステップ37は再び分散性の散逸分布になっている。なお、これらの図のすべてにステップ1の近似直線を示した。その他、Fig. 16 に示される最大散逸の割合が特に大きいステップにおいては、 $\log P$ 軸切片が右に位置し、フラクタルに近い分

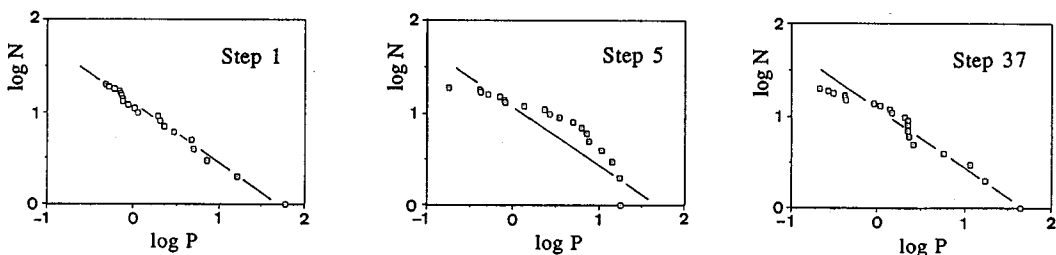


Fig. 17 Distribution of dissipation energy.

布となる。以上のことより、粒状体の変形過程は、散逸エネルギー分布の平均化のための内部構造生成の過程と、その構造が壊れて新しい散逸モードを生成する過程の繰り返しより成っていると考えることができよう。

5. あとがき

粒状要素法は粒状体の準静的な変形特性を調べるうえで有効である。本文においては、シミュレーション解析より得られた結果について、新たに定義した配位テンソルや弾性エネルギーテンソルを用いた力学的異方性の考察を示した。また、エネルギーの散逸機構についての解析結果とその考察を示した。粒状体の微視的な挙動は複雑であるが、このような検討を重ねることにより、粒状体の変形特性の詳細が明らかにされると考えられる。

粒子相対移動の自由度が極度に限定される3.の例においては、仮想ばねの弾性に支配される可逆部分と、粒子間すべりに基づく散逸部分との間に、明確な限界点が認められる。これに対して、4.の例に示したせん断試験においては、明確な限界点は見当たらない。これは、散逸機構の考察に示したように、一般の粒子集合体の場合、載荷初期より大きな散逸を生じる接触点があり、領域全体として明確な降伏点が現れにくいからである。このようなことから、粒状体の構成則の誘導に際しては、従来の金属塑性論を修正した理論に基づくのではなく、異なった立場からのアプローチが必要になるのではないかと考えられる⁹⁾。

本文の解析例の演算には36ビットの小型計算機(12MBメモリー)を用いた。粒状要素法は大行列を用いないので、大きな記憶容量を要しない。多少計算時間を要する点を除けば、小型計算機に適した方法であるといえよう。また、本方法のような逐次解析法の利点は、解析過程において数値誤差が生じて、解が収束の方向に向かい、誤差が蓄積しないことにある。したがって、たとえば、粒子パッキングの初期値が平衡条件を満たさないものであっても、逐次解析の過程を経て、平衡条件を満たす粒子配置が得られる。

粒状体の不可逆的な変形のために、シミュレーションによる解析結果は解析過程の偶然性に支配されることになるが、このことは、実際の実験においても再現性が問題となることと同等であり、非弾性的変形の本質とも考

えられる。本文に示したようなシミュレーション解析が実際の実験に比べて有利な点は、解析過程の各ステップにおける情報を記憶させることができるので、種々の微視的な解析や、同一試料に対してさまざまに分岐させた経路についての試験が可能となることである。

本方法は非排水条件を考慮した解析に応用することも可能であり、具体例として、繰り返し載荷による液状化のシミュレーション解析も行っている⁹⁾。今後、種々の応用を通して、粒状体の微視的変形機構の考察を示したい。また、他のシミュレーション解析方法との具体的な比較についても別の機会に示したい。

最後に、本文の作成にあたり有益なご助言を頂いた東北大学工学部土木工学科教授 佐武正雄博士に謝意を表します。なお、本研究は昭和60~62年度文部省科学研究費補助金一般研究(B)(研究課題番号60460156)の補助を受けた研究であることを付記する。

参考文献

- 1) Satake, M. and Jenkins, J. T. (eds.) : *Micromechanics of Granular Materials*, Elsevier, 1988.
- 2) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. : A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47~65, 1979.
- 3) 木山英郎・藤村 尚 : カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析, *土木学会論文報告集*, Vol. 333, pp. 137~146, 1983.
- 4) Uemura, D. and Hakuno, M. : Granular assembly simulation with Cundall's model for the dynamic collapse of the structural foundation, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol. 4, No. 1, pp. 155s~164s, 1987.
- 5) Kishino, Y. : Disc model analysis of granular media, *Micromechanics of Granular Materials* (Satake, M. and Jenkins, J. T. eds.), Elsevier, pp. 143~152, 1988.
- 6) Drescher, A. and de Josselin de Jong, G. : Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 20, pp. 337~351, 1972.
- 7) Satake, M. : Constitution of mechanics of granular materials through graph representation, *Theor. Appl. Mech.*, Vol. 26, pp. 257~266, 1978.
- 8) 高安秀樹 : フラクタル, 朝倉書店, 1986.
- 9) 岸野佑次 : 散逸関数に基づく粒状体の流れ則の誘導, *土木学会論文集*, Vol. 394/III-9, pp. 115~122, 1988.

(1988. 6. 27・受付)