

拡張カルマン・フィルターによる土質定数の空間分布推定

ESTIMATION OF SPATIAL VARIATION OF SOIL PROPERTIES USING EXTENDED KALMAN FILTER ALGORITHM

鈴木 誠*・石井 清**

By Makoto SUZUKI and Kiyoshi ISHII

The finite element method has been a successful analytical tool in solving various geotechnical engineering problems such as prediction of settlements. Accuracy of the finite element analysis depends on that of estimation of soil properties. However, reliable soil properties cannot always be obtained easily. Hence, an extended Kalman filter, numerical technique developed in the field of system identification, is introduced. In the course of this, the finite element technique is employed in estimating spatially variable soil properties using the observed response values. Furthermore a discussion on applicability of this back analysis method is provided.

Keywords: probability theory, finite element method, soil mechanics, mapping, identification

1. はしがき

有限要素法は、地盤工学における地盤の変形問題や地下水位の予測問題などに対する有効な解析手法である¹⁾。有限要素法の解析結果の精度は、入力データである土質定数の信頼性に強く依存するが、実際の問題を解く場合には、必ずしも信頼性の高い土質定数が常に得られるとは限らない。そこで、有限要素法に土質定数などに含まれる不確定性を考慮できるようにした確率有限要素法^{2),3)}や、通常の有限要素法とは逆に、観測された変位量や地下水位の高さなどから、土質定数を精度よく求めて、その後の予測を確かなものにしようとする逆解析のアプローチが試みられている⁴⁾。

土質定数の不確定性は、土質定数のもつ本来的な不確定性と、土質調査・試験法によるデータの質的・量的不足からの統計的不確定性とに分けられる⁵⁾。さらに、前者の不確定性では、平均値、分散という代表的な確率特性のほかに、土質定数の空間的な分布特性が問題にされることがある⁶⁾。均質とみなせる地盤に設置された基礎において、土質定数の空間分布が不等沈下の原因となる

こともある。そのため、地盤の地層構成と土質定数の空間分布の比較的細かな変化をとらえることが問題となる。確率過程論の立場によれば、土質定数などの確率変数の空間分布は、平均値、分散および相関モデル（自己共分散関数など）により規定される確率特性を満足する母集団としてとらえられる⁷⁾。また、建設地点が特定され、土質調査が行われている場合などでは、解析の対象とする地盤モデルは母集団ではなく、母集団からの1つの実現値であるサンプル過程とすることができる。著者らは、土質調査により一部の土質定数が明らかにされているサンプル過程に対して、クリッキングとよばれる空間分布推定法を用いた確率有限要素法を適用して、沈下量の確率論的な予測を行っている⁸⁾。

本研究では、サンプル過程と仮定した土質定数の空間分布を、沈下量などの観測値を用いて推定（同定）するという逆解析手法の開発を主題にする。Giodaによると逆解析手法には、大別して数理計画法の最適化手法により確定論的にデータを取り扱う手法と、ベイズ理論により確率論的にデータを取り扱う手法とがある⁹⁾。確定論的手法には、通常の順解析に対する逆定式化による直接法^{10),11)}と、逆定式化を必要とせずに繰り返し収束計算を行う間接法^{12),13)}とがある。確率論的手法には、事前分布を観測値を用いて更新し、事後分布を作成するベイズ理

* 正会員 清水建設(株)大崎研究室
(〒100 千代田区内幸町2-2-2 富国生命ビル)

** 正会員 工博 清水建設(株)大崎研究室主任研究員(同上)

論による手法^{14),15)}がある。本手法は、サンプル過程の概念をもとにして、カルマン・フィルタ¹⁶⁾とベイズ理論を結び付けた有限要素法である。本手法によれば、従来は土質調査からのみ推定が可能であった土質定数の空間分布に対して、観測値をもとに推定を行うことができ、さらに土質定数の不確定性を推定誤差として評価することができる。逆解析手法のなかで、本研究と関連の深いものとして次のものがある。村上らは、間接法の一つであるカルマン・フィルタと有限要素法を結び付けたカルマン・フィルタ有限要素法により観測節点配置を検討している¹⁷⁾。また、地盤工学へのカルマン・フィルタの適用例として、星谷らは地盤の液状化のパラメータ同定¹⁸⁾を、斎藤らは山留め掘削による土質定数の推定¹⁹⁾を行っている。本研究では、このカルマン・フィルタの初期値を、経験的ではなく確率・統計的に計算より求めているところに特徴がある。さらに、ここで求めた確率特性を確率有限要素法に入力することにより、沈下量などの将来予測がより正確にできるようになる。

本論文の構成は次のとおりである。2.においては、拡張カルマン・フィルタのアルゴリズムと拡張カルマン・フィルタへの有限要素法の組み込みに関する定式化を示す。3.では、観測点と解析精度の関係を簡単な4要素モデルで検証する。さらに、一層地盤に盛土荷重が作用したとき、沈下量や側方変位量の観測値が得られたとして、土質定数の空間分布を推定している。最後に、4.では、本研究のまとめを示している。

2. 拡張カルマン・フィルタを用いた有限要素法の定式化

カルマン・フィルタは、システムの線形性、システムの状態量および観測値に付加される雑音の正規白色性の仮定をもとにした最小二乗推定法で、Kalman-Bucyによって理論化された²⁰⁾。ここで、雑音はシステム状態量や観測値に含まれる誤差である。白色性とは時間に無関係であること（このような雑音をホワイトノイズという）、正規性とは時系列としての雑音の振幅分布が正規分布に従うことを意味する。本章では、はじめに拡張カルマン・フィルタの基礎定式化とそのアルゴリズムを示し、次に、土質定数の空間分布を観測値から推定（逆解析）するため、有限要素法を組み込んだ拡張カルマン・フィルタの定式化を示す。

(1) 拡張カルマン・フィルタ

カルマン・フィルタは、次式に示す観測方程式とシステム状態方程式により構成される¹⁶⁾。

$$y_t = H_t x_t + v_t \dots\dots\dots(1)$$

$$x_{t+1} = F_t x_t + G_t w_t \dots\dots\dots(2)$$

式(1),(2)は離散化表示されており、添字 t は時間

あるいは繰り返しのステップ数を示す。ここで、 x_t : 状態量ベクトル (n)、 y_t : 観測値ベクトル (m)、 H_t : 観測マトリックス ($m \times n$)、 F_t : 状態遷移マトリックス ($n \times n$)、 G_t : システム雑音係数マトリックス ($n \times p$)、 v_t : 観測雑音ベクトル (m)、 w_t : システム雑音ベクトル (p) である。

式(1)は観測方程式で、状態量と観測値との関係を示す。今回の問題では、土質定数が状態量として推定する未知数に、沈下量あるいは側方変位量が観測値となる。式(2)はシステム状態方程式で、状態量の時間的遷移を記述するものである。さらに、雑音ベクトルは正規性のホワイトノイズを考えて、以下の性質を有するものとする。

$$E[w_t] = E[v_t] = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$E \left[\begin{pmatrix} w_t \\ v_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_s^T & v_s^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q_t & 0 \\ 0 & R_t \end{pmatrix} \delta_{ts} \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 δ_{ts} はクロネッカーデルタ関数である。また、 Q_t 、 R_t はシステム雑音および観測雑音の共分散マトリックス ($p \times p$)、($m \times m$) である。

カルマン・フィルタは、式(1)と式(2)に示したように線形観測方程式と線形システム状態方程式を基本として、システムの漸化的な最適状態推定のアルゴリズムを構成したものである。これに対して拡張カルマン・フィルタは、次式に示す非線形観測方程式と非線形システム状態方程式を基本としている。

$$y_t = h_t(x_t) + v_t \dots\dots\dots(5)$$

$$x_{t+1} = f_t(x_t) + G_t w_t \dots\dots\dots(6)$$

この基本式に対するアルゴリズムでは、式(5)と式(6)を線形化するために、 h_t と f_t を状態量の推定値 $x_{t/t-1}^*$ と $x_{t/t}^*$ のまわりにテーラー展開し、2次以降を無視する。

$$h_t(x_t) \approx h_t(x_{t/t-1}^*) + H_t(x_t - x_{t/t-1}^*) \dots\dots\dots(7)$$

$$f_t(x_t) \approx f_t(x_{t/t}^*) + F_t(x_t - x_{t/t}^*) \dots\dots\dots(8)$$

ここで、 x の添字 * は推定値を、また、 $t/t-1$ は y_{t-1} が与えられたときの t ステップの推定値を、 t/t は y_t が与えられたときの t ステップの推定値を示す。 H_t と F_t は次式で定義されるマトリックスである。

$$H_t = \left(\frac{\partial h_t}{\partial x_t} \right)_{x_t = x_{t/t-1}^*} \dots\dots\dots(9)$$

$$F_t = \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_t} \right)_{x_t = x_{t/t}^*} \dots\dots\dots(10)$$

式(7),(8)を式(5),(6)に代入すると、

$$y_t = H_t x_t + v_t + h_t(x_{t/t-1}^*) - H_t x_{t/t-1}^* \dots\dots\dots(11)$$

$$x_{t+1} = F_t x_t + G_t w_t + f_t(x_{t/t}^*) - F_t x_{t/t}^* \dots\dots\dots(12)$$

となる。ここに、

$$\eta_t = y_t - h_t(x_{t/t-1}^*) + H_t x_{t/t-1}^* \dots\dots\dots(13)$$

とおくと、式(11)は次式のようになる。

$$\eta_t = H_t x_t + v_t \dots \dots \dots (14)$$

拡張カルマン・フィルターでは、式(11)と式(12),あるいは式(11)の代わりに式(14)と式(12)が基礎式となる。

次に、拡張カルマン・フィルターを用いた最適化のアルゴリズムは、以下に示す式により構成される(誘導は文献16)に詳しく示されている)。

フィルター方程式:

$$x_{t+1/t}^* = f_t(x_{t/t}^*) \dots \dots \dots (15)$$

$$x_{t/t}^* = x_{t/t-1}^* + K_t \{y_t - h_t(x_{t/t-1}^*)\} \dots \dots \dots (16)$$

カルマン・ゲイン:

$$K_t = P_{t/t-1} H_t^T (H_t P_{t/t-1} H_t^T + R_t)^{-1} \dots \dots \dots (17)$$

推定誤差共分散マトリックス:

$$P_{t+1/t} = F_t P_{t/t} F_t^T + G_t Q_t G_t^T \dots \dots \dots (18)$$

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - K_t H_t P_{t/t-1} \dots \dots \dots (19)$$

初期条件:

$$x_{0/-1}^* = \bar{x}_0, \quad P_{0/-1} = \Sigma_0 \dots \dots \dots (20)$$

ここで、 $P_{t/t}$: 推定値 $x_{t/t}^*$ と真値 x_t との推定誤差共分散マトリックス ($n \times n$), K_t : 時間 t におけるカルマン・ゲイン ($n \times m$), \bar{x}_0, Σ_0 : 推定値 (n) と推定誤差共分散マトリックス ($n \times n$) の初期値である。計算の収束は $P_{t/t} = E[(x_{t/t}^* - x_t)(x_{t/t}^* - x_t)^T]$ を評価関数として、 $P_{t/t}$ を最小とする $x_{t/t}^*$ が繰り返し計算により求められる。

(2) 有限要素法を用いた空間分布推定法の定式化

拡張カルマン・フィルターに有限要素法を組み込み、変位量の観測値から土質定数の空間分布を推定するための定式化を次に示す。提案する方法では、初期値設定が本手法の1つの特徴となっている。

a) 観測方程式

一般の有限要素法において、変位と荷重の関係は次の剛性方程式で与えられる。

$$Ku = f \dots \dots \dots (21)$$

ここで、 K は剛性マトリックスであり、土質定数である状態量 x の関数となる。 u は変位ベクトル、 f は荷重ベクトルである。変位 u は、式(21)より次のように表現する。

$$u = K^{-1} f \dots \dots \dots (22)$$

観測値 y は、変位 u に観測雑音ベクトル v を加えたものになるので、観測方程式は次のように定義できる。

$$y = u + v = h(x) + v \dots \dots \dots (23)$$

また、式(21)の両辺を x で偏微分すると

$$\frac{\partial K}{\partial x} u + K \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \dots \dots \dots (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = K^{-1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} u \right\} \dots \dots \dots (25)$$

となり、荷重 f と状態量 x は独立であるとすれば、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x} u \dots \dots \dots (26)$$

となる。式(23)は式(5)の観測方程式に対応し、式(26)は式(9)の偏微分係数 H_t に対応している。後で示す例題では、観測値が1回だけ収録されたことから、拡張カルマン・フィルターは状態量を初期値より漸次改善していくためのものであり、時間 t は時間的な遷移を示すのではなく、収束計算の繰り返しステップ数を表わすことになる。

b) システム状態方程式

観測値が一時に収録されたとすれば、土質定数である状態量 x は変化しないので、状態遷移マトリックス F_t を単位マトリックス I として、式(12)あるいは式(2)によるシステム状態方程式は次式で表わせる。

$$x_{t+1/t} = I x_{t/t} \dots \dots \dots (27)$$

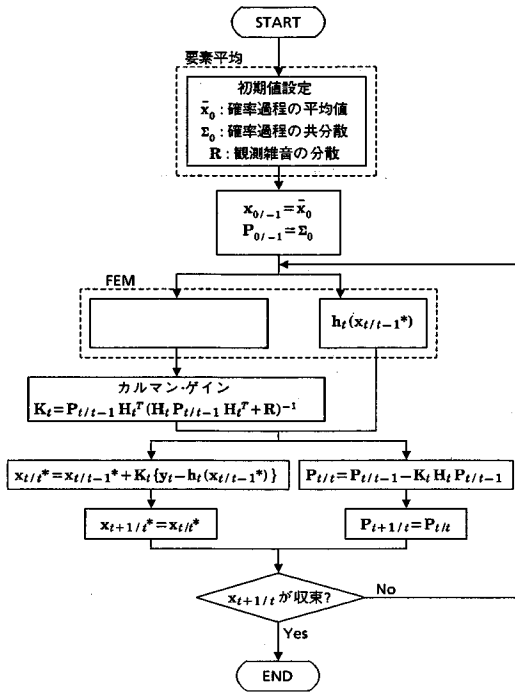
式(27)において、 x_t について簡便な計算のため雑音は混入しないものと考えて、システム雑音は無視している。

c) 初期条件

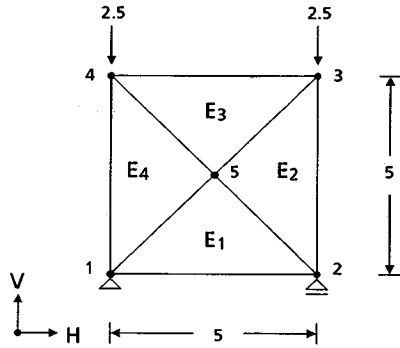
本手法では、カルマン・フィルターの推定値と推定誤差共分散マトリックスの初期値として、ベイズ理論の事前分布の平均値と共分散をそれぞれ用いる。これは、推定される土質定数のサンプル過程を正規確率過程の実現値であると仮定していることによるためである。以下に理由を述べる。

ベイズ理論は、事前情報として事前分布の確率特性を与え、観測値を事後情報として事後分布の確率特性を求めるものである。ここで、事前分布を分散が既知な正規確率過程の平均値とすると、確率特性は平均値の推定値および推定誤差共分散により与えられる。さらに、二乗誤差を基準(損失関数)として、ベイズ理論によるサンプル過程の推定の定式化を行うと、推定値は最小分散推定値¹⁶⁾になる。すなわち、カルマン・フィルターにより推定しようとする対象をサンプル過程とすると、カルマン・フィルターのアルゴリズムは Cividini ら¹⁵⁾が行っているベイズ理論による逆解析と同じものになる。ここに、カルマン・フィルターの初期値として、ベイズ理論による事前分布の平均値と共分散を用いる理由がある。

具体的な計算では、最初に土質定数を単一の状態量として適当な土質定数の初期値と分散を与え、観測値を用いてトレンド成分とみなせる平均値 \bar{x}_0 を推定し、推定値の初期値とする。ここでトレンドとは全体的な傾向を表わすもので、重回帰分析などから求められる。この段階では状態量より観測値の数が多いので、初期値は一意的に決まる。次に、土質定数の自己共分散関数をもとに、要素の分散や要素間の共分散は要素の大きさを考慮して得られる共分散マトリックス²¹⁾を求め、これを推定誤差共分散マトリックスの初期値 Σ_0 とする。むしろ、土質定数の自己共分散関数は経験的に定められるかもしれな



図一 逆解析フロー



図二 解析モデル

空間的な相関特性を次に示す自己相関関数より与えている。変動係数を0.5と大きめの値をとったのは、4つの要素での弾性定数の差を明確にみるためであり、軟弱な粘性土では変動係数が0.3~0.5程度考えられることからこの値を用いた。

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{2.0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2.0} \right)^2 \right\} \right] \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 ρ は相関係数を表わし、 $\Delta x, \Delta y$ は、それぞれ水平(H)、鉛直(V)方向の2地点間の距離である。

この例題では、変位量を既知として、要素における弾性定数を推定しようとする問題であることから、まず、上述の確率特性を有する弾性定数の場をシミュレーション法により、1つ発生させ、通常の有限要素法を用いて変位量を求めた。次に、この変位量を用いて、弾性定数は未知として、各要素の弾性定数を本手法により推定する。このとき、解の収束判定は、すべての変位の誤差が 10^{-5} 以下として計算を打ち切っている。変位の許容誤差 10^{-5} は、最大観測変位量 4.7×10^{-3} の約0.2%になっており、それより小さい値は、一般的にも観測精度から無理と考えたものである。解析にあたり、初期値としては状態量の推定値は1000、推定誤差共分散は最初に与えた変動係数と自己相関係数より求めたものを用いた。ここで、初期に与える観測雑音の共分散マトリックスRは、対角項を 1.0×10^{-6} 、非対角項を0としている。

解析は、観測点の数や位置(方向)を変化させた7ケース行った。結果を表一に示す。このモデルでは、4つの要素の弾性定数が状態量となり、理論的には4つの観測値があれば正解が求まるわけであるが、実際には観測値に入る雑音や本手法の数値誤差、計算の打ち切りなどにより若干の誤差がでる。そこで、観測値を多くすると安定した解を得ることができるようである。Case 1~3の結果をみると、推定値では観測値4つのCase 3の方が正解に近いが、推定誤差(推定値と真値の差)は観測値が多くなるに従って、小さくなるのがわかる。また、観測値が4つ以上あれば、いずれの場合にも4つの状態

いが、従来では根拠なく定められていたカルマン・フィルターの推定誤差共分散マトリックスの初期値を、確率過程で表現される場の共分散として経験によらず計算から求め、土質定数の空間分布推定に用いるところが本手法の1つの特徴である。計算アルゴリズムの全体フローを図一に示す。

3. 数値解析例

本章では、はじめに簡単な例題に2.で示した手法を適用することにより、手法の有効性を検証する。次に、地盤工学の数値解析例に本手法を適用する。ここでは、1層地盤の地表面に載荷荷重を作用させたときの地表面の沈下量や地盤内の側方変位量を観測して、地盤の弾性定数の空間分布を推定する問題である。

(1) 適用性の検証

図二に示すモデルを用いて、本手法の有効性を検証する。解析モデルは、長さを 5×5 とした正方形であり、4つの二次元平面ひずみの三角形要素より構成されている。外力として、このモデルの上端左右の節点3,4に、それぞれ鉛直方向に2.5の荷重を与える。ここで、長さや荷重の大きさは無次元量と考えている。材料定数は次のように設定した。ポアソン比も不確実性による影響をみるうえで重要なパラメーターであるが、ここでは問題を簡単にするために確定値として0.3とする。弾性定数は平均値1000、変動係数0.5の正規確率過程として、

表一 推定値と推定誤差

Case	Observed points V: Vertical direction H: Horizontal direction	Modulus of elasticity			
		E ₁	E ₂	E ₃	E ₄
1	V: 2, 3, 4, 5 H: 3, 4, 5	1158 (87)	979 (72)	874 (66)	1096 (78)
2	V: 2, 3, 4 H: 3, 4	1163 (93)	974 (75)	878 (69)	1090 (82)
3	V: 3, 4 H: 3, 4	1174 (99)	965 (79)	888 (73)	1080 (87)
4	V: 3, 4 H: 3	1023 (259)	961 (93)	1020 (254)	1073 (100)
5	V: 3, 4 H: 4	1174 (100)	964 (80)	888 (74)	1080 (88)
6	V: 3, 4	1020 (270)	960 (95)	1020 (270)	1073 (102)
7	V: 4 H: 4	1113 (141)	1090 (232)	1045 (305)	1073 (101)
	Values given by simulation	1182	965	888	1082

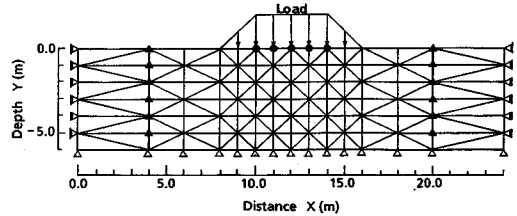
The upper row shows estimators
The lower row shows estimation errors

表二 観測量への影響度

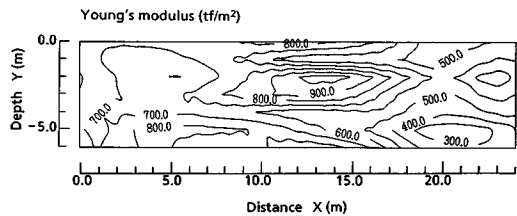
Observed point	Displacement	$\partial u / \partial x \quad (\times 10^{-6})$			
		E ₁	E ₂	E ₃	E ₄
H: 2	0.001597	-1.65	-0.49	0.67	-0.49
H: 3	0.002140	-0.49	-2.58	-0.49	1.60
V: 3	-0.004703	1.14	3.23	1.14	-0.95
H: 4	-0.000106	-1.16	2.09	1.16	2.09
V: 4	-0.004236	1.14	0.95	1.14	3.23
H: 5	0.000843	0.82	0.71	0.34	0.22
V: 5	-0.001943	1.61	0.57	-0.48	0.57

V: Vertical direction, H: Horizontal direction
x is assumed to be 1000

量は入力した値に収束する傾向があるといえる。次に、観測値を3つとしたCase 4, 5を検討する。Case 5の結果は、Case 3の結果とほぼ一致している。一方、Case 4の結果ではE₁とE₃の収束が悪くなっている。Case 3, 4の収束の違いから、観測点の取り方により推定値が変わっているのがわかる。この差は、要素の弾性定数E₁とE₂への節点変位量の影響度の違いによるものであり、観測値としてCase 4では節点3を、Case 5では節点4を用いているが、表二に示すように、E₁とE₂へは節点4の水平方向の影響度が節点3よりも高いためである。ここで影響度とは、ある要素の弾性定数の変動が着目している節点変位量の変動に与える影響を表わしたもので、有限要素法の剛性方程式から求めることができる。表二には、各要素の弾性定数が観測値に与える影響度を示している。また、観測値を2つとしたCase 6, 7では要素間の弾性定数の大小関係がほぼとらえられており、Case 6ではE₂とE₄、Case 7ではE₁とE₄の精度が、他の要素に比べて良いことがわかる。これは、Case 3, 4と同様に各観測値がそれぞれの要素の弾性定数に与える影響度によって説明できる。表二より、E₂には節点3の鉛直方向、E₄には節点4の鉛直方向などの影響度が大きいことがわかり、影響度の大きい点を観



図一三 解析モデル



図一四 弾性定数の空間分布

測点を選ぶと、解の収束性は良くなるといえる。

このように、本手法では推定値のほかに推定誤差を評価しており、観測値が与えられれば推定誤差を必ず小さくすることができることから、情報量を有効に利用した手法といえる。

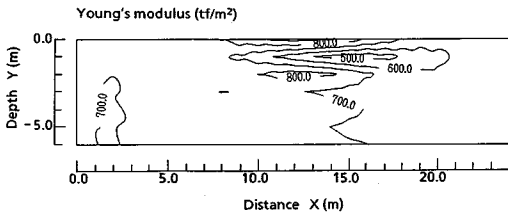
(2) 地盤モデルへの適用

解析モデルは、図一三に示すように深さ6m、幅24mの一層地盤であり、168個の二次元平面ひずみの三角形要素に分割されている。図中の●印は沈下量を観測する点で、▲印は側方変位を観測する点である。推定にあたり、地盤のポアソン比は0.3の確定値とし、弾性定数は、次に示す確率特性をもつ正規確率過程に従うものと仮定した。すなわち、平均値は500 tf/m²、変動係数0.3とし、自己相関係数を水平方向は鉛直方向に比べて強い相関性を有するモデルとして、次に示す式に従うものとした。これらの値は粘性土を想定して仮定した。

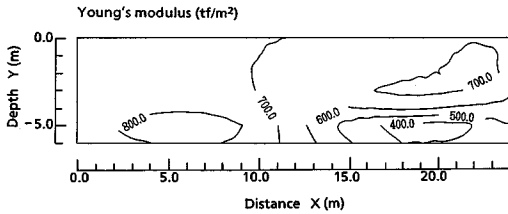
$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{5.0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{1.0} \right)^2 \right\} \right] \dots \dots (29)$$

解析条件として平面ひずみ条件を仮定して、荷重として図に示されるような単位体積重量 $\gamma = 1.85 \text{ tf/m}^3$ の盛土が帯状に載荷されると想定した。シミュレーションにより弾性定数の空間分布を1つ発生させ、要素ごとに局所平均をとったものを実際の地盤と仮定し、通常の有限要素法を用いて変位量を計算した。弾性定数のコンター図を図一四に示す。このコンター図は、要素重心に弾性定数を与えて描いたものである。図一四が、観測値により推定する弾性定数の空間分布である。

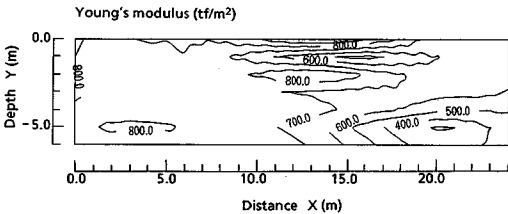
さて、解析では、有限要素の弾性定数をすべて状態量として、観測値から弾性定数を推定する。ここでは、観測値とともに載荷荷重条件および弾性定数の相関モデルの式(41)が既知であるとして問題を解く。解析は、情



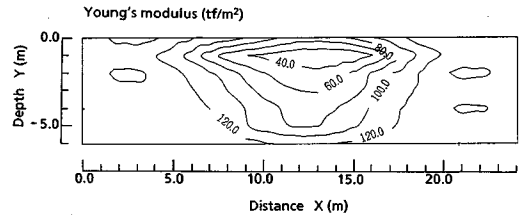
図—5 沈下量 5点からの推定値



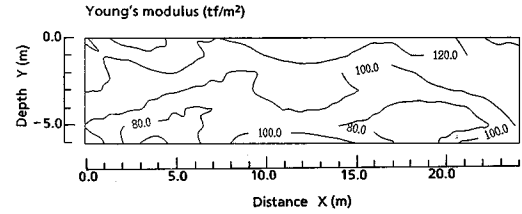
図—6 側方変位置 12点からの推定値



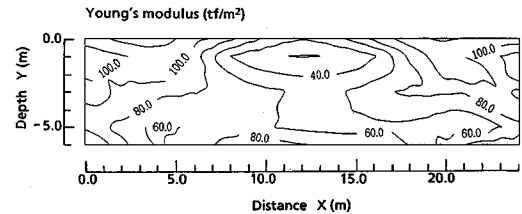
図—7 沈下量と側方変位置 17点からの推定値



図—8 沈下量 5点からの推定誤差



図—9 側方変位置 12点からの推定誤差



図—10 沈下量と側方変位置 17点からの推定誤差

報量と精度との関係を調べるために、情報量として沈下量のみを用いたもの、側方変位置のみを用いたもの、その両方を用いた3つのケースについて行った。

最初に、沈下量5点(図—3の●印)のみを用いて弾性定数を推定する。推定値の初期値を 692 tf/m^2 とし、上記の確率場における要素の共分散を推定誤差共分散マトリックスの初期値とした。結果を図—5に示す。地盤上部にコンターが密になり、この部分の推定値が収束していることがわかる。このように、本手法は、観測点への感度の高い部分が収束に大きく寄与する。次に、同じモデルで側方変位置12点(図—3の▲印)のみを用いた結果を図—6に示す。この結果では、側方変位の観測点の地盤下部での推定値が大きく収束している。しかし、地盤上部においては推定値の初期値からほとんど変化しておらず、今回の観測した側方変位の位置では推定にあまり寄与していないといえる。最後に、沈下量と側方変位置の両方17点(図—3の●印と▲印)を用いた結果を図—7に示す。図—4と図—7との比較から、この程度の情報量が得られると、弾性定数の空間分布がもつ全体的な傾向は十分に再現できていることがわかる。また、図—5～図—7より、鉛直方向に比べ水平方向に強い相関性を表わしており、初期条件として与えた推定誤差共分散の相関係数が、推定結果に効果的に作用しているこ

とがわかる。すなわち、式(29)により、地盤の水平方向と鉛直方向の相関性を与えていることから、図—7に示されるように水平方向に同じ大きさの弾性定数の空間分布が得られている。

なお、この推定法では解の一意性は保証されておらず、観測点の位置、方向、点数によっては異なった結果を与えるわけであるが、現実的には注目する場所を中心に観測が行われると考えられるので、その観測点に対して影響する土質定数の推定誤差は小さくできるものと考えられる。推定誤差を図—8～図—10に示す。図—8の推定値では、盛土直下の値が 40 tf/m^2 以下となり、初期値として与えた 150 tf/m^2 の約4分の1になっている。これは、盛土直下の要素が沈下量の観測点に対して影響度が大きいこと、他の部分に比べ収束に大きく寄与していることになる。また、図—9では、側方変位の観測点の地盤下部の値が小さくなっており、この部分の要素が側方変位の観測点に対して影響度が大きいことがわかる。図—10の推定誤差は、図—8と図—9に示される両方の推定誤差の影響を受けていることがわかり、図—7の推定値と比較すると、収束による推定値の変化が大きい部分は推定誤差が小さくなっている。このように、観測点に対する影響度の大きい点がより推定に寄与し、それに伴って推定誤差は小さくなる。

(1), (2) の例題からわかるように, それぞれの座標 (この場合要素) における数多くの状態量を限られた観測値から求めることは不可能である. しかし, 状態量の推定値を確率論的に表現して, その推定値の不確定性を確実に小さくすることはできる. このことから, 盛土などのように, 観測値が比較的容易に得られる場合には, 本手法を用いて土質定数の不確定性を減らすことができ, 工事の進捗によって盛土高がさらに高くなったときの沈下量や側方変位量の予測精度を向上することができる. また, 多層地盤の場合には多変量の確率過程を考えることになるが, 土層間での相関性を得ることができれば, 基本的に本手法を適用することができる.

4. 結 論

本研究で提案した解析手法は, 拡張カルマン・フィルターに有限要素法を組み込んだ逆解析手法であり, 地盤における土質定数の空間分布を, 観測値をもとに推定 (同定) するものである. ここで, 土質定数は確率過程の中の1つの実現値であるサンプル過程と考え, 拡張カルマン・フィルターの初期条件として, 確率過程の確率特性である平均値と分散および自己相関関数を用いている. 4つの要素からなる簡単な正方形のモデルを用いて, 観測点 (方向) を変化させて, 弾性定数を推定して本手法の有効性を検討した. 次に, 帯状に載荷された地盤を二次元平面ひずみの有限要素法でモデル化し, 地表面の5点の沈下量と12点の側方変位量の観測値を用い, 弾性定数の空間分布を推定した. 結果は次のようにまとめることができる.

(1) 本手法は, 拡張カルマン・フィルターおよび空間分布に関する確率特性を導入することにより, 観測点の数が推定する状態量の数より少なくても, 状態量を有効に推定することができる逆解析手法である. 正方形モデルの例題では, 未知数が4つに対して観測値が3つであっても, ほぼ妥当な推定値が得られた. また, 一層地盤モデルによる計算例では, 沈下量と側方変位量17点より, 地盤モデルの弾性定数の分布傾向がほぼ再現できている.

(2) 初期値設定をベイズ理論に基づいて行っているため, 推定値のほかに推定誤差を同時に評価することができる. 推定誤差は土質定数のもつ推定後の不確定性を表わしている. 一層地盤モデルによる計算例では, 初期の土質定数の不確定性である推定誤差が 150 tf/m^2 であったのに対して, 推定後には部分的に 40 tf/m^2 以下と約4分の1まで小さくすることができた.

(3) 推定値は, 観測点 (方向) に依存するため, 特に精度よく推定したい状態量に対しては, その影響度の高い点を観測点に選ぶ必要がある. 影響度は節点変位量

の偏微分係数を求めることにより, 簡単に求めることができる. たとえば, 正方形モデルの例題では, 節点4の水平方向変位の方が節点3の水平方向変位より, 全体の弾性定数への影響度が大きいので, どちらか1つの観測値を使えるならば, 節点4の変位量を用いる方が有効であることがわかる.

今回の検討では, 数値解析を通して手法の有効性について確認したが, 実際の地盤を扱うときは, 観測誤差 (精度) の問題や弾性計算の適用性などの問題も生じてくるものと思われる. 今後は, これらの面についても, さらに検討を進める予定である.

参 考 文 献

- 1) 川本眺万・林 正夫: 地盤工学における有限要素解析, 培風館, 1978.
- 2) Baecher, G.B. and Ingra, T.S.: Stochastic FEM in Settlement Predictions, ASCE, Vol.107, No.GT4, pp.449~463, 1981.
- 3) 鈴木 誠・石井 清: 地盤工学への確率有限要素法の適用, 第1回構造物の安全性および信頼性に関する国内シンポジウム (JCOSSOR), pp.435~440, 1987.
- 4) Gioda, G. and Sakurai, S.: Back Analysis Procedures for the Interpretation of Field Measurement in Geomechanics, International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics, Vol.11, pp.555~583, 1987.
- 5) Baecher, G.B.: Simplified Geotechnical Data Analysis, Reliability Theory and Its Application in Structural and Soil Mechanics, (ed. P. Thoft-Christensen), Martinus Nijhoff Publishers, pp.257~277, 1983.
- 6) 土質工学会: 土質基礎の信頼性設計, 土質基礎工学ライブラリー-28, 1985.
- 7) Vanmarcke, E.H.: Probabilistic Modeling of Soil Profiles, ASCE, Vol.103, No.GT11, pp.1227~1246, 1977.
- 8) 鈴木 誠・石井 清: 土質定数の空間分布推定法を用いた確率有限要素法, 土木学会論文集, 第394号/III-9, pp.97~104, 1988.
- 9) Gioda, G.: Some Remarks on Back Analysis and Characterization Problems in Geomechanics, Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, pp.47~61, 1985.
- 10) Kavanagh, K. and Clough, R.W.: Finite Element Applications in the Characterization of Elastic Solids, International Journal of Solids Structures, Vol.7, pp.11~23, 1971.
- 11) 桜井春輔・武内邦文: トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法, 土木学会論文報告集, No.337, pp.137~145, 1983.
- 12) Arai, K., Ohta, H. and Yasui, T.: Simple Optimization Techniques for Evaluating Deformation Moduli from Field Observations, Soils and Foundations, Vol.23, No.1, pp.107~113, 1983.

- 13) Hisatake, M. and Ito, T. : Back Analysis for Optimization Method, Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, pp.1301~1307, 1985.
- 14) Asaoka, A. : Observational Procedure of Settlement Prediction, Soils and Foundations, Vol.18, No.4, pp.87~101, 1978.
- 15) Cividini, A., Maier, G. and Nappi, A. : Parameter Estimation of a Static Geotechnical Model using a Bayes' Approach, International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences and Geomechanics, Vol.20, No.5, pp.215~226, 1983.
- 16) 片山 徹：応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, pp.73~78, 1983.
- 17) 村上 章・長谷川高士：Kalman フィルター有限要素法による逆解析と観測節点配置, 土木学会論文集, 第388号/Ⅲ-8, pp.227~235, 1987.
- 18) 星谷 勝・斎藤悦郎：液状化を伴う地盤の等価線形化, 土木学会論文報告集, No.340, pp.59~65, 1983.
- 19) 斎藤悦郎・古賀重利・鎌田正孝：拡張カルマンフィルタ支援による山留め工事の計測管理手法, 土木学会論文集, 第391号/Ⅵ-8, pp.115~124, 1988.
- 20) Kalman, R. E. and Bucy, R. S. : New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, Vol.83, pp.95~108, 1961.
- 21) 鈴木 誠・石井 清：確率有限要素法と要素分割, 土木学会論文集, 第388号/Ⅰ-8, pp.237~245, 1987.

(1988.6.2・受付)