

# 二次元層状斜面問題における変分安定解法の数値解析的適用

## NUMERICAL APPLICATIONS OF VARIATIONAL STABILITY APPROACH TO TWO-DIMENSIONAL LAYERED SLOPES

菊沢 正裕\*・山崎 勝司\*\*

By Masahiro KIKUSA WA and Katsushi YAMAZAKI

Variational stability analysis is a new method that can determine the safety factor as well as the critical sliding surface which satisfies the kinematical constraints. Theoretically it can be applied to nonhomogeneous problems, however, its use is scarce because of the difficulties in analytical application. A well known variational stability formulation may be of Baker et al., but there are some controversy with its application. At first, we pointed out the variational approach affords the extremum by discussing on the equality of the method to the upper bound calculation. Then we developed a numerical code based on Baker's theory and examined its applicability to the slope stability and compared the results with some of the conventional limit equilibrium methods. It is concluded that results of variational method agree quite reasonably with those of Spencer method and is proved to be more practical for less time consuming.

*Keywords: computer application, safety factor, slip surface, slope stability, stability analysis*

### 1. 序

極限平衡法に基づく斜面安定解析法は従来数多く提案されてきている。汎用の安定解析法は、斜面の幾何形状、土質強度特性、間隙水圧等を容易に扱える有用な手法である一方、応力～ひずみ関係に頼らず、また多くの場合スライス間応力についても仮定を導入することで単純化を計っている。仮定の是非と精度については詳しく検討されてもいるが<sup>16)</sup>、実際問題でいずれの仮定を是認すべきかは簡単に結論できない面がある。理論的根拠に対する批判は別として、この実績ある手法で実用上問題となるのはすべり面の探索が合理的かつ自動的になされないことであろう。特に強度の異なる層が介在する非均一地盤に対しては二次元問題でも経験的にすべり線位置を想定することは困難であり三次元問題になると均一の場合でも現実のすべり面を予測できないのが現状であろう。

すべり面探索法の研究としてはFEMの結果を有効に利用するため離散系の最適化手法である動的計画法を適用した山上らの研究<sup>15)</sup>やJanbuの簡便法で、安全率が2次関数となることから共役勾配法を適用して効果的

にすべり線を探る荒井らの研究<sup>1)</sup>が挙げられる。これらはいずれも応力場を基本とする手法である。これに対し従来法同様安全率を用い力の極限つり合いをとるが、変分理論を援用し塑性流れの適合則を満足するすべりを考える手法としては、斜面天端とすべり線の交点を可動とする横断条件を用いたRevillaらの研究<sup>11)</sup>とそれを差分により数値解析的に応用したWuの研究<sup>17)</sup>、ここで取り上げたBakerらの研究<sup>3),6)</sup>がある。また、Castilloら<sup>4)</sup>は変分理論を適用した種々の手法について比較評価している。いずれも長短があるが、ここでは、Bakerらの方法(以後、変分安定解析法とよぶ)の実用性を検討することにした。

Kopac<sup>9)</sup>に端を発する変分安定解析法(Variational stability approach)は、Garber & Baker<sup>6)</sup>によって安全率の概念が導入され、Leshchinskyら<sup>10)</sup>によって三次元に拡張された非均一問題にも適用できる手法である。本手法は、応力に関するオイラー方程式の解釈に関連し誤った定式化を行っているとの批判もあり<sup>8)</sup>、現在のところ広く認められた手法とはいえない。その中でBakerやLeshchinskyによって精力的に研究が続けられているがその適用例の多くは均一問題など理論解をもつ場合に限定されている。そこで、本論文では二次元層状斜面への適用計算を行い、その実用性を数値解析的に検討する

\* 正会員 農博 京都大学助手 農学部農業工学科  
(〒606 京都市左京区北白川追分町)

\*\* 特許庁(元・京都大学大学院農学研究科)

ことにした。

2. 変分安定解析法の概要

(1) 変分安定解析法の特徴

本手法の特徴をまとめると以下のようである。

- ① つり合い条件を考えるが、すべり線を表わす関数の汎関数としての安全率の停留条件から最小安全率とすべり線を決定する。
- ② 探索されるすべり線は塑性力学でいう Kinematical constraints を満足するもので上界計算同様その形状は二次元では対数らせんとなる。もちろん式の係数によっては直線や円弧も表現できる。
- ③ すべり線の両端は既知として横断条件を用いない。よって、極の位置を変えた繰返し計算が必要となる。
- ④ 強度が急変する境界層におけるすべり現象を合理的に探索することができる。
- ⑤ 変分安定解析法の結果は極限解析の上界解と等価である。

このように、本手法は、すべり線探索が合理的になされるのに加えて、従来の極限平衡法同様実際問題への適用には至便な手法である。特に設計上危険側の上限解を与えるものの経験的パラメーターである安全率を用いる点で実用性は高いといえる。なお、手法の手順から従来法の結果も実は上界解に近似的に対応することは従前から Taylor が指摘し<sup>13)</sup>、Chen<sup>5)</sup>も上界計算との比較によってそれを支持している。ただし、任意のすべり線に対する極限平衡法は下界値以下の結果を与える場合もあり得ることを荒井らは例示している<sup>2)</sup>。この点からもすべり線を合理的に決定する変分安定解析法の有用性が期待される。

(2) 変分安定理論と上界法

Baker らによって提案された変分安定理論は理論解が容易に示される均一斜面への適用にとどまったためその実用性を検証するべきであるといった議論とともに、その理論定式化自体に誤りがあるとの批判<sup>7),8)</sup>がある。実用性については3.で汎用の安定解析法との比較を通して検討するとし、本節では De Jong<sup>7)</sup>の厳しい指摘に対して著者なりの解釈を示しておく。以下では説明に必要な式のみを示すが変分安定理論の詳細は文献3), 6), 10)を参照されたい。

変分安定解析法は  $(x, y)$  座標系ですべり線を  $y(x)$  で表わし水平、鉛直、モーメントの3つり合い式に降伏(破壊)基準と強度安全率  $F$  を導入することから始める。すなわち、

$$\sum H = \int h(y, y', \sigma, F) dx = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum V = \int v(y, y', \sigma, F) dx = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\sum M = \int m(y, y', \sigma, F) dx = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここに  $y' = dy/dx$ ,  $\sigma(x)$  は  $y(x)$  に沿う垂直応力。次に、付帯条件式(2), (3)のもとに汎関数  $\Gamma$  の極小化を行う。すなわち、ラグランジュ定数  $\lambda_1, \lambda_2$  を用いて

$$\Gamma = \int \zeta dx = \int h dx + \lambda_1 \int v dx + \lambda_2 \int m dx \dots\dots (4)$$

式(4)の停留条件を満足する  $y(x), \sigma(x)$  は次式で表わされるオイラーの微分方程式を満たさねばならない。

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma'} \right] - \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

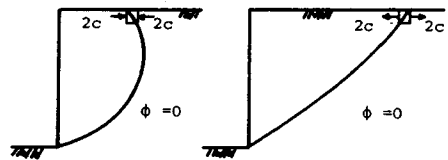
$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial y'} \right] - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

式(4)の  $\zeta$  は  $\sigma' (= d\sigma/dx)$  と独立なため式(5)は

$$\partial \zeta / \partial \sigma = 0 \dots\dots\dots (7)$$

となる。 $\zeta$  が  $\sigma$  の線形関数のため式(6)と独立に式(7)から  $y(x)$  が計算される。この  $y(x)$  は直線または対数らせんとなり、いわゆる塑性流れの適合則を満たす関数となる。ただし局所的なつり合い条件を考えるならば  $y(x)$  は式(6)とは独立に得られない。

さて、変分安定理論の不完全さに対する De Jong の指摘は以下のように要約される。すなわち、変分安定理論は局所的なつり合いを満足していないこと、それを考慮すると式(5)から計算される  $y(x)$  が式(6)を満足せず、Jacobi条件によると極値(extremum)が存在しないケースがあることを Fig.1 の例によって示した。著者は変分安定理論を擁護する立場から De Jong の指摘に対して以下のように考える。まず、天端付近の圧縮状態の応力特性を考えた Fig.1 (a) のすべりは全体つり合いのみを考えた場合にも現われるが、これは工学的に意味をもたない Overhang cliffs として Baker らは除外している。数学的には式(5)の  $\zeta$  が局所つり合いを無視した結果、 $\sigma$  に関して線形となり Jacobi 条件による判定ができなくなる。また、Fig.1 (b) のよ



(a) maximum compression (b) maximum tension  
Fig.1 Critical slip surface and boundary stress condition on the upper surface for a vertical cut off stability problem referred to by De Jong (1980).

うな局所的な引張り状態におけるすべりはまさに Overhang cliffs を除外したすべりに対応しており、この場合のすべりについて De Jong は extremum の存在を否定していない。Fig.1 (a) のような Overhang cliffs のすべりが生じる場合は別として、変分安定理論が上界法と等価な手法であることから extremum の存在は確信される。つまり、extremum の存在が上界定理により保証されている上界法と等価であることが変分安定理論の合理性を裏付けることになる。また、上界計算では工学的判断によって先の Fig.1 (a) のように extremum が不在となる運動学的可容速度場を想定しない。以下、上界法の骨子を変分安定理論との関係に注目しながら説明する。

一般に上界法では破壊強度と実強度の関数を表わす安全率  $F$  の代わりに崩壊外力と実外力を関係づける荷重係数  $\mu$  を用いる。問題は、kinematical constraints (適合条件と与えられた降伏基準に対する直交則) を満たす速度場  $u$  に対して式 (8), (9) を考えるものである。

$$\min \mu = D(u) \dots\dots\dots (8)$$

$$\text{subjected to}$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \int Xu dV = 1 \\ S &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに  $D$  はエネルギー消散率、 $X$  は物体力、 $F$  は外力仕事率で  $u$  が相対量であることから式 (9) 右辺の 1 は定数であればよい。  $S$  は体積ひずみに対する条件式で kinematical constraints に起因するものである。式 (8), (9) の問題は次式の汎関数の極小化問題に帰着される。すなわち、ラグランジュ乗数  $\eta$  と  $\mu$  (荷重係数でもある) を用いて

$$\Phi = D + \eta S - \mu(F - 1) \dots\dots\dots (10)$$

式(4)と式(10)は各理論の基本となる汎関数である。前者は応力と外力(自重)の平衡式から構成され、後者は適合系のエネルギー平衡式である。そしておのおののオイラー式は前者が式(7)から得られる  $y(x)$ 、すなわち塑性流れの適合則を満たすすべり線を与え、後者のオイラー式は力のつり合い式を与える。 Tamura ら<sup>10)</sup> は式(8)~(10)に対応する詳細式を与えた後、 $\Phi$  の  $u$  に関する第1変分を次式のように示している。表面力項を除外すると

$$\frac{\delta \Phi}{\delta u} = - \int (\sigma_{ij,j} + \mu X_i) \delta u_i dV \dots\dots\dots (11)$$

諸量がテンソル表示となっているが被積分項はまさしくつり合い式である。

このように変分安定理論はつり合い式から出発し、降伏基準を満たす応力と、適合条件を満たすメカニズムを算定するもので、メカニズムを出発点とし降伏条件を満たすエネルギーつり合い式を解く上界法と全く等価であ

る。しかし、メカニズムの仮定が不要であること、汎用の安定解析法と同様に強度安全率を含む力のつり合い式から出発する点で上界法に比べ変分安定法の方が斜面安定の分野ではなじみやすいと思われる。さらに上界解は設計上危険側の解であるが実績のある経験定数として種々の構造物について定められている安全率を使用できるという意味で実用性は高いといえよう。ただし、このことは2.(1)で述べたように従来の汎用安定解析法が上界解に近い結果を与えるとの知見に基づいているが、汎用解析法と上界法が等価である保証はなく、適合条件を満たさないすべり線を想定した場合、汎用の安定解析は上界解でも下界解でもない結果を導く可能性は高い。この点については計算結果の考察のところで言及する。

(3) 境界層の処理法

層状地盤の境界部分における強度は上下層の強度の中間的な値をとる場合と粘土化により上下層のいずれの強度よりも小さな値をとる場合が考えられる。ここでは前者の場合について、Baker ら<sup>3)</sup>が提案した境界領域の強度  $\phi = \tan \phi$  ( $\phi$  は内部摩擦角) が Fig.2 のように連続的(1回微分可能)に変化すると仮定する処理法を概説し、若干の計算例により境界処理の特性を示すことにする。

塑性すべりの条件(オイラー式)を満たすすべり線は Fig.2 中 A-A' と B-B' のように屈折あるいは反射する場合に分類される。いずれの場合もある区間にわたってすべり線が遷移域内に存在することになる。探索各区間においてすべり線が式(7)の解である対数らせん式を満たし連続であるとの条件から  $y(x)$  は計算されるが、帯状に存在する遷移域に沿ってすべるか、外に出るかは式(12)によって判定される<sup>3)</sup>。すなわち、すべり線上の点  $i(x_i, y_i)$  が遷移域に存在する条件は

$$\phi_1 \geq F_s \frac{f'_{ai}(f_{ai} - y_c) - (x_c - x_i)}{(f_{ai} - y_c) + f'_{ai}(x_c - x_i)} \geq \phi_2 \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

$$y_i = f_{ai}, y'_i \approx f'_{ai} \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

を満たすことである。ここに  $x_c, y_c$  は対数らせんの極の座標、 $y_i = y(x_i), y'_i = y'(x_i)$  はその勾配、 $F_s$  は

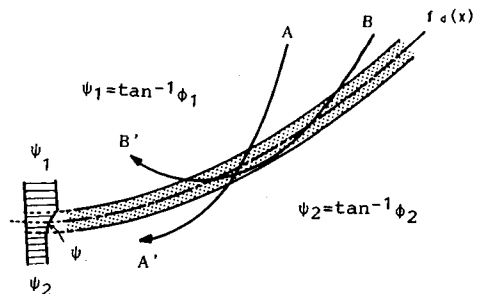


Fig.2 Schematic descriptions of transition zone between layers<sup>3)</sup>.

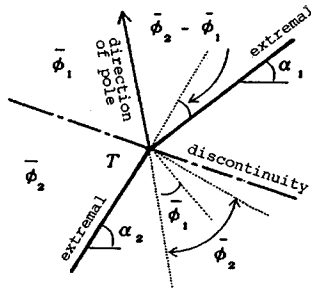


Fig. 3 Refraction of the extremals on the interface between layers<sup>3)</sup>.

最小安全率,  $f_{ai} = f_a(x_i)$  は, Fig. 2 に示す不連続線を表わす関数で,  $f'_{ai} = f'_a(x_i)$  は, その勾配である. 式 (12・b) は, 点  $i$  ですべり線  $y$  と不連続線  $f_a$  が交差し, かつ両者の勾配が近似的に等しいことを意味する.

屈折や反射が生じる場合, 探索区間ごとに決定されるすべり線は式 (7) のオイラー方程式を満足するとともに, ラグランジュ乗数がいずれの区間においても等しい (共通の極をもつ) との観点にたつて探索される. この結果, Fig. 3 に示すように屈折あるいは反射するすべり線の勾配は式 (13) を満たし, 変曲点  $T$  においては同じ極方向ベクトルをもつことになる<sup>3)</sup>.

$$\alpha_1 = \alpha_2 + (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) \dots \dots \dots (13 \cdot a)$$

$$\bar{\phi}_j = \tan^{-1}(\tan \phi_j / F_j), j=1, 2 \dots \dots \dots (13 \cdot b)$$

ここに, Fig. 3 に示すように  $\alpha_1, \alpha_2$  はすべり線の傾斜角,  $\phi_1, \phi_2$  は上層と下層の内部摩擦角である.

式 (12) を満足し, すべり線が不連続線と共通域を有する状況は二次元問題では比較的少ない. ここでは, 宇野ら<sup>14)</sup>が用いた Fig. 4 に示す二層斜面について式 (12) の特性を検討してみる. これらの斜面では各図のケース (a) のように斜面先すべりが最も危険となる. ところがこのすべり線先端  $A (x = x_A)$  が二層の境界, すなわ

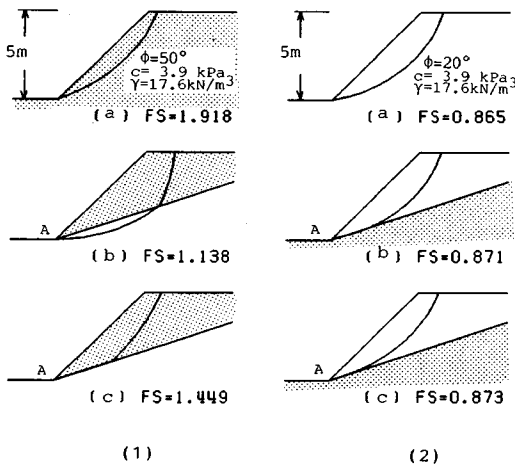


Fig. 4 Two layered slope of 45°.

ち不連続線上にくる. このように, すべり線探索開始点のり先点  $A$  にくる場合, 式 (12) による判定が最初から必要になるが  $y'(x_A)$  が未知であるため判定を行えない. つまり, すべりが遷移域に沿って生じるのか否かが不明である. そこで, (b)  $y' \neq f'_a$  と (c)  $y' = f'_a$  の結果を示した. この両者ですべての場合 (3 方向への探索) を考慮することになるが, 上層の強度が大きい Fig. 4 (1) の例では  $y' = f'_a$  とした (b) の方が小さい  $F_s$  を与えている (本例に限っていうならば, 探索起点を斜面天端に設定すればこのような問題は生じないが, ここに示したように 3 方向の探索で最小の安全率を求めることがプログラムの変更なしで済むので簡便であろうし, その方が汎用的であるといえる). 一方, 強度が上下逆の Fig. 4 (2) では, 探索方法によるすべり線や安全率への影響はほとんどない. なお, Fig. 4 (1) の (b) ではすべり線が不連続線を横切っているが, 屈折点前後における  $\alpha_1 = 37.2^\circ, \alpha_2 = 67.4^\circ$  は結果的に式 (13) をほぼ満足している.

### 3. 変分安定解析法と汎用極限平衡法の比較計算例

#### (1) 均一斜面の解析

2. で上界法と変分安定解析法の等価性, および極限平衡法が上界値と相応の結果を示す点について触れた. この点に関連して極限平衡法, 変分安定解析法, および上界法<sup>5)</sup>による安定係数の比較を行ったのが Table 1 である. 斜面傾斜角によらず類似の結果が得られている. ただし, 上界解は傾斜角が  $55^\circ$  以下になるとのり先破壊が臨界とならないが (安定係数はすべて 5.53 となる), Table 1 ではすべてのり先破壊に対する結果を比較している.

Fig. 5 には  $\phi \neq 0$  材料に対する均一斜面の結果を従来法と比較して示した. 本計算例では, 緩斜面と急斜面を対象に安定係数がほぼ等しいように前者では  $\phi = 15^\circ$ ,

Table 1 Comparison between various stability analyses for  $\phi = 0$  homogeneous slopes.

slope angle	limit equilibrium <sup>1)</sup>	variational method <sup>2)</sup>	limit analysis upper bound <sup>3)</sup>
90°	3.83	3.89	3.83
75°	4.57	4.56	4.56
60°	5.24	5.25	5.25
45°	5.88	5.87	5.86*
30°	6.41	6.45	6.51*
15°	6.90	6.94	7.35*

1) Ordinary method of slices 2) numerical calculation 3) Chen, W.F.(1975)

\* 5.53 for the case critical failure surface passes below tow.

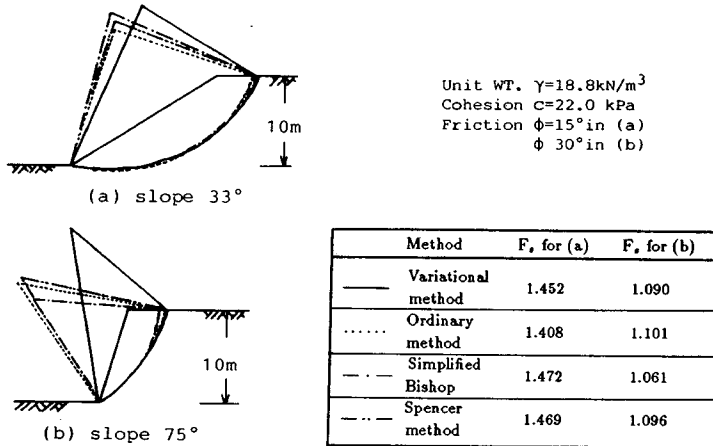


Fig. 5 Comparison between variational method and various limit equilibrium methods for homogeneous slopes.

後者では  $\phi=30^\circ$  とした。変分安定解析法の結果が汎用解析法の結果のばらつき内であること、臨界すべり線も類似のものとなることがわかる。また  $\phi$  が小さいほど対数らせんは円弧に近づくのですべり形状は円弧解析結果に近づき従来の極限平衡法（円弧すべり）とほとんど同じすべり線が得られている。

(2) 層状斜面の解析

Fig. 6~8 には、急傾斜地盤が強度の異なる薄い層（シーム）を介在する非均一問題の例を示す。Fig. 6 は、主として介在する水平弱層の層厚の影響を、Fig. 7 は弱層が傾斜している場合の位置の影響を、Fig. 8 は、Fig. 7 (b) を基本とした場合の層厚の影響と傾斜方向の影響を調べたものである。

まず、Fig. 6 では層厚が厚くなるほど  $F_s$  が低下し、ある程度以上厚くなるとの先ではなくその弱層にすべり線の先端がくる場合クリティカルになることがわかる。一方、同図 (a), (c), (e) に着目すると強度の異なる厚さ 0.5 m のシームが存在する場合の安定評価

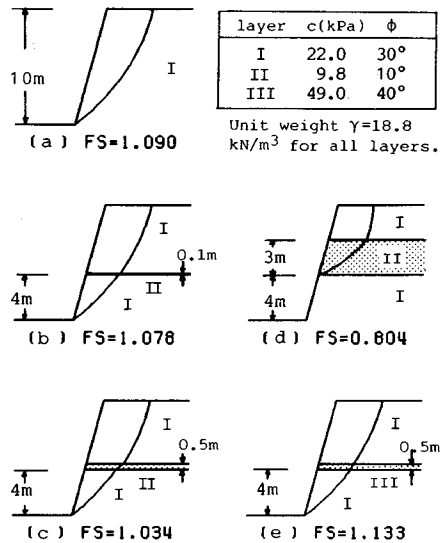


Fig. 6 Thickness effects of the intermediate layer on stability of 75° slope.

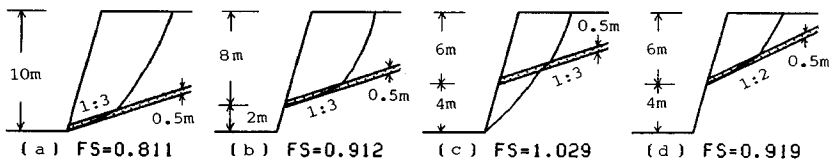


Fig. 7 Effects of location of inclined intermediate layer.

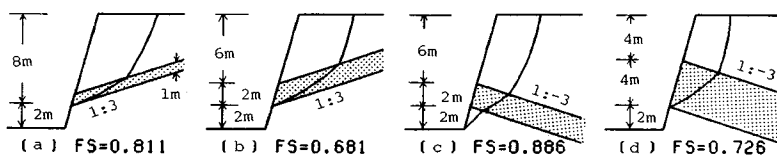


Fig. 8 Effects of thickness and dip of inclined intermediate layer.

も定性的ではあるが可能であることがわかる。

Fig. 7 (a)~(c) は、0.5 m の弱層が 1:3 の勾配で傾斜している場合についてその位置の影響を検討したものである。のり先部を弱層が通る場合、 $F_s$  が最小となり、弱層の位置が上方へ移動するにつれ安定性が向上することがわかる。また、弱層端の位置が中程度の高さになるとのり先すべりがクリティカルとなるが、弱層の傾斜がより大きく 1:2 とした同図 (d) では、再び弱層に沿うすべりが発生し安全率も低下する。

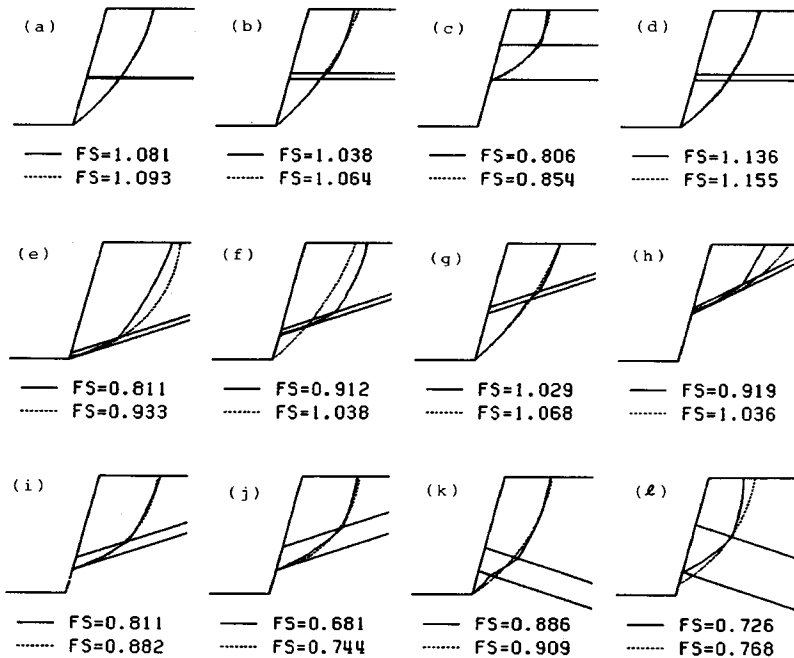
Fig. 8 は弱層の勾配が 1:3 であるが、層厚が厚い場合、および弱層の勾配を逆にした場合の結果である。層厚が厚くなると弱層に沿った Fig. 7 (b) のすべりから弱層を横切る Fig. 8 (a) や (b) のすべりになる。このようなすべり現象を経験に基づいて予測することはおよそ困難であろう。一方、地層が差し目の場合 (Fig. 8 (c), (d)), 弱層の影響が小さくなることは Fig. 8 (b), (c) の比較から明らかである。また、差し目方向に存在していても弱層厚が 4 m になると Fig. 8 (d) のように弱層端を起点とするすべりも発生する。

以上の結果は実用上有効な定量評価ではないが、本手法がすべり現象を定性的に説明し得る手法であるとの認識を与えるものである。そこで以下では汎用の円弧すべり解析との比較を行うことにする。Fig. 9 は Fig. 6, 7,

8 のおのおのを簡便法 (Ordinary method of slices) で計算した結果 (点線) を変分安定解析の結果 (実線) と比較したものである。Fig. 6 のように弱層が水平の場合、両解析とも類似のすべり線を与え、安全率は簡便法で数%, Spencer 法で 1% 程度大きくなるにとどまる。これに対して弱層が厚くなったり傾斜した場合、安全率は簡便法で最大 10% ほど大きくなる。全体に弱層を境に屈折する対数らせんすべりをうまく円弧で表現できているが Fig. 9 (f), (h), (l) のようにすべり線に相違が現われるケースもある。Fig. 10 は厳密法の 1 つである Spencer 法の結果である。Spencer 法は簡便法以上に変分安定解析法に近いすべり線を与え、安全率の差もケース (h) を除き 2~3% 以内となっている。

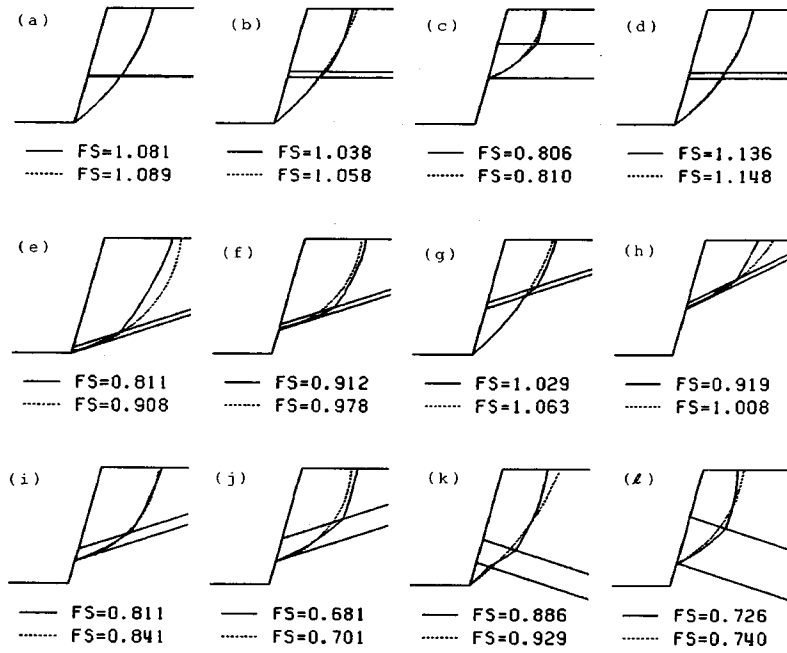
簡便法が比較的良好な結果を与える理由として本例のような急斜面ではスライス間力の作用方向がすべり面方向と一致するとの仮定が妥当であるからと思われる。この点はスライス間力の作用方向を水平と仮定する簡易 Bishop 法の結果 (Fig. 11) がよくないことからの推測である。したがって緩斜面では簡便法が十分機能しない可能性は高い。

変分安定法と厳密法の結果がよく一致することは変分安定法の有効性を示している。また簡便法, Spencer 法, 変分安定法の順で安全率が小さくなることは、変分安定



See Figs 6,7,8 for geometry and material properties of slopes.  
 — : Variational method . . . . . : Ordinary method of slices

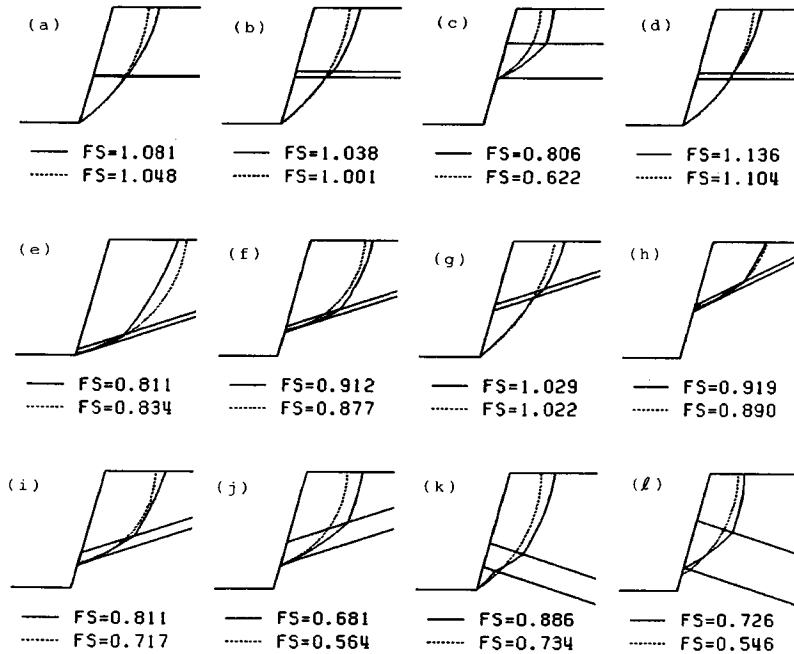
Fig. 9 Comparison between variational method and ordinary method of slices on the stability of 75° slope with an intermediate layer.



See Figs 6,7,8 for geometry and material properties of slopes.

— : Variational method    - - - : Spencer method

Fig. 10 Comparison between variational method and Spencer method on the stability of 75° slope with an intermediate layer.



See Figs 6,7,8 for geometry and material properties of slopes.

— : Variational method    - - - : Simplified Bishop method

Fig. 11 Comparison between variational method and simplified Bishop method on the stability of 75° slope with an intermediate layer.

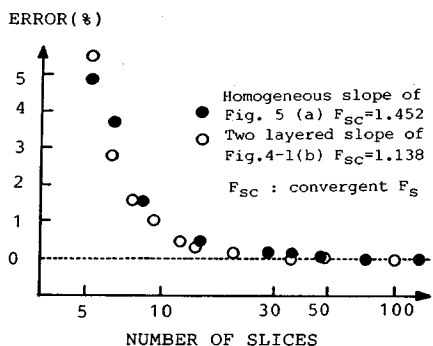


Fig. 12 Error to the convergency of safety factor to the number of slices (the increments of searching slip line).

法が上界解を与えることと考え合わせ、それぞれが上界解に属する結果を与えること、変分安定法がその最小値を導いていることを示している。ただしスライス間力の仮定が妥当とならない簡易 Bishop 法は変分安定法より小さい安全率を与え、上界解を導かないと考えられる。逆に緩斜面の場合 Bishop 法が上界解を与え、簡便法が上界解を与えないとの考えは先の Fig. 5 における安全率が緩斜面では簡便法、変分法、Spencer 法、簡易 Bishop 法の順に、また急斜面では簡易 Bishop 法、変分法、Spencer 法、簡便法の順に大きくなることから首肯されよう。

### (3) 計算効率

すべり線探索のための数値積分は対数らせんの動径の微小回転角  $\Delta\theta$  ごとになされ、これに対応して土塊がスライスに分割される。 $\Delta\theta=0.1\sim 0.01$  はスライス数  $N=10\sim 100$  に対応する。Fig. 12 は、均一と層状斜面の 2 例について探索区間数 (スライス数) と安全率の関係を示したものである。同図から収束安全率を基準にした場合スライス数 10 程度で十分な精度が期待されることがわかる。ただし分割数によって臨界すべりモードが全く異なる場合も考えられる非均一斜面では分割数は 30 程度必要であろう。なお、本研究で用いたすべての斜面について計算効率は Fig. 12 とほぼ同じである。また、(2) の解析例はいずれもスライス数約 30 で計算され、比較に用いた円弧すべり解析でも同じスライス数を使用した。計算時間は Fig. 7 (d) の例に対し簡便法を 1 として簡易 Bishop 法 3.7、変分安定法 4.1、Spencer 法 296 であり、この点からも変分安定法の実用性は高いといえる。

## 4. 結 論

数値積分を用いた変分安定法を主として二次元層状斜面問題に適用し、以下のように手法の有効性と実用性を検証した。

(1) 均一斜面、および水平層状斜面では汎用の円弧すべりスライス法と類似の結果を与える。

(2) 弱層を介在する三層斜面に対し、層の位置、層厚、勾配等によって弱層の影響が強く出る場合では、汎用の簡便法と相違が生じるが、厳密法の 1 つである Spencer 法にきわめて近い結果を与える。

(3) すべり線を合理的に定めるため安全率の収束計算が速く、簡易 Bishop 法程度の計算量ですむ点で実用性は高い。

(4) 層状斜面で層境界に沿ったすべりや屈折現象を評価でき、地すべり問題への適用も期待される。

(5) ここに示した急斜面の例では簡便法もおおむね良好な結果を示すが、簡易 Bishop 法は妥当な結果を与えない。ただし、緩斜面では逆に、簡便法より簡易 Bishop 法の方が有効となる。

なお、数値計算には京都大学大型計算機センター (FACOM VP 400) を用い、文部省科学研究費 (一般研究 (A) 63420049, 研究代表者: 京都大学農学部 長谷川高士教授) の援助を受けた。また、数値計算に関し京都大学学生 植野栄治氏 (現・農林水産省) の協力を得た。記して感謝の意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) Arai, K. and Tagyo, K. : Determination of noncircular slip surface giving the minimum factor of safety in slope stability analysis, *Soi. Fnd.*, Vol. 25, No. 1, pp. 43~51, 1985.
- 2) Arai, K. and Nakagawa, M. : A new limit equilibrium analysis of slope stability based on lower bound theorem, *Soi. Fnd.*, Vol. 28, No. 1, pp. 1~15, 1988.
- 3) Baker, R. and Garber, M. : Theoretical analysis of the stability of slopes, *Géotechnique* 28, No. 4, pp. 395~411, 1978.
- 4) Castillo, E. and Luceno, A. : A critical analysis of some variational methods in slope stability analysis, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 6, pp. 195~209, 1982.
- 5) Chen, W. F. : *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier Publishing Co., Amsterdam, Chapter 9. 3. 2, 1975.
- 6) Garber, M. and Baker, R. : Extreme-value problems of limiting equilibrium, *J. Geotechnical div. Proc. of ASCE*, Vol. 105, No. 10, pp. 1155~1171, 1979.
- 7) G. De Josselin De Jong : Application of the calculus of variations to the vertical cut off in cohesive frictionless soil, *Géotechnique* 30, No. 1, pp. 1~16, 1980.
- 8) G. De Josselin De Jong : A variational fallacy, *Géotechnique* 31, No. 4, pp. 289~290, 1981.
- 9) Kopacy, J. : Über die Bruchflächen und Bruchspannungen in den Erdbauten, *Gedenbuch für Dr. J. Jaky*. (Ed. by Szechy, K.) Akadimiai Kiado Budapest, pp. 81~99, 1955. (文献 3) で引用)



- 10) Leshchinsky, D., Baker, R. and Silver, M. L. : Three dimensional analysis of slope stability, *Int. J. for num. anal. method in geom.*, Vol. 9, No. 3, pp. 199~223, 1985.
- 11) Revilla, J. and Castillo, E. : The calculus of variations applied to stability of slopes, *Géotechnique* 27, No. 1, pp. 1~11, 1977.
- 12) Tamura, T., Kobayashi, S. and Sumi, T. : Rigid-plastic finite element method for frictional materials, *Soi. Fnd.*, Vol. 27, No. 3, pp. 1~12, 1987.
- 13) Taylor, D. W. : *Fundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., Chapter 16.25, 1943.
- 14) 宇野尚雄・浅井圭三・五十嵐誠 : 対数ら線を用いた斜面安定解析の試み, *土と基礎*, 35 卷 11 号, pp. 33~38, 1987.
- 15) 山上拓男・植田康宏・小山正之 : DP に基づく潜在すべり面探索手法の 2, 3 の適用例, 第 20 回土質工学研究発表会, pp. 1001~1002, 1985.
- 16) Wright, S. G., Kulhawy, F. H. and Duncan, J. : Accuracy of equilibrium slope stability analysis, *ASCE* Vol. 99, No. SM10, pp. 783~791, 1973.
- 17) Wu, L.-Y. : Stability analysis of arbitrary shape landslope by variational calculus and finite difference method, *J. of Chinese Institute of Engineers*, Vol. 10, No. 5, pp. 473~483, 1987.

(1988. 12. 5・受付)