

---

投稿論文  
**Paper**

# 砂粒子を含んだ鉛直上方噴流での乱流シュミット数

## TURBULENT SCHMIDT NUMBER IN AN UPWARD SUBMERGED JET INVOLVING SAND PARTICLES

久保田 稔\*・高木 不折\*\*

By Minoru KUBOTA and Fusetsu TAKAGI

This paper deals with an upward submerged jet to investigate the characteristics of the turbulent Schmidt number in order to better understand of sediment diffusion of sand particles. Dimensional analysis is used to divide the flow region into two regions. First is the jet region, the flow structure of which is not affected very much by the fall velocity of sand particles. Second is the anti-buoyant region, in which the fall velocity becomes significant. Moreover, the maximum rising height of the jet and the axial velocity distribution of these two regions are clearly defined. The turbulent Schmidt number in the jet region is chosen so that the numerical results of axial characteristic equations agree with measured values. Lastly, the values of the turbulent Schmidt number are found to be a function of the local Richardson number.

*Keywords*: jet, turbulent Schmidt number, Richardson number

### 1. 緒 論

浮遊土砂問題は、河川工学における重要課題であり、平衡浮遊土砂濃度分布に限らず非平衡浮遊土砂問題および組織渦による流水中への砂粒子の供給過程など幅広く研究が行われている。ところで浮遊砂濃度分布を議論する際には、必ず土砂拡散係数  $\epsilon_c$  を取り扱う必要が生じる。通常、 $\epsilon_c$  は運動量拡散係数  $\epsilon_M$  に比例していると考え、その比例定数  $\Delta (= \epsilon_c / \epsilon_M$  であり、乱流シュミット数  $s_c$  の逆数) を定式化する努力が続けられてきた。たとえば Singamsetti<sup>1)</sup> は砂粒子を含んだ鉛直下方噴流実験によって、 $\Delta$  は粒子レイノルズ数の増加に応じて 1.2 から 1.4 に増加すると報告しており、Einstein らによれば  $\Delta$  は 1.2 程度の値であり、van Rijn<sup>2)</sup> および辻本<sup>3)</sup> は、 $\Delta$  を沈降速度  $w_0$  と摩擦速度  $u_*$  の比 ( $w_0/u_*$ ) の増加関数として定式化している。一方また粒子径によって  $\Delta$  を区別し、微細粒子の場合は  $\Delta \approx 1$ 、比較的粒子径の大きい場合は  $\Delta < 1$  であるとも報告されている<sup>4)</sup>。ところで van Rijn 自身は、Guy らのデータを検討し、 $w_0/u_*$  が大きい場合 (比較的大きな粒子径の浮遊砂あ

るいは比較的摩擦速度が小さい土砂浮遊の初期段階に相当する) には、 $\Delta$  は 1 より小さくなるであろうと述べている。また最近 Karim ら<sup>5)</sup> は、Vanoni らのデータ ( $0.09 \text{ mm} < d < 0.15 \text{ mm}$ ) にベキ乗流速分布式を使用して、 $\Delta$  は 0.99 ~ 0.83 であると報告している。つまり  $\Delta$  の値は使用する流速分布式で微妙に変化すると述べている。以上述べた各研究成果より、 $\Delta$  あるいは乱流シュミット数  $s_c$  は  $w_0/u_*$  だけの関数ではなく、流れ場の構造にも密接にかかわっているものと考えられる。

さて沈降性粒子の土砂拡散係数  $\epsilon_c$  を求める手法には、乱流流束と土砂の濃度勾配より直接  $\epsilon_c$  を求める手法または拡散方程式で  $\epsilon_c$  を同定する手法がある。前者では乱流流束を求める際に、浮遊している個体粒子の測定受感部への衝突に起因する誤差が発生する。一方、後者の立場では通常、定常平衡浮遊土砂濃度分布より  $\Delta$  の値を逆算しているが、浮遊土砂濃度はカルマン定数  $\kappa$  にも影響を及ぼすために、逆算より求めた Rouse 式の指数  $Z (= w_0 / (\Delta \kappa u_*))$  より  $\kappa$  と  $\Delta$  とを分離する必要がある。ところで  $\Delta$  は、浮遊砂による密度成層流の乱れ構造と密接にかかわっているため、浮遊砂濃度による  $\Delta$  の挙動を把握するために、 $\Delta$  への成層流体の安定性の指標であるリチャードソン数のかわり方を検討するのは意義あることと考えた。

\* 正会員 工博 大同工業大学助教授 建設工学科  
(〒457 名古屋市南区白水町 40)

\*\* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科  
(〒464 名古屋市千種区不老町)

そこで今回著者らは、流れ場の構造が比較的簡単な噴流を取り上げ、噴流での  $s_c$  数 ( $=\varepsilon_M/\varepsilon_c$ ) を実験結果より同定し、 $s_c$  数とリチャードソン数との関係を検討することにした。また通常、渦に取り込まれた砂粒子はやがて重力の作用を受けて渦から離脱して沈降する。そこで、渦からの砂粒子の離脱を容易にするために、噴流の方向を鉛直上方とした。なお  $s_c$  数を検討する前に、この種の噴流では、噴流上部に砂粒子の沈降性の卓越した領域が発生すると考えられるので、まず噴流の領域区分を行い、対象とする噴流領域区間を明確にしている。その後、噴流の軸上の流速、軸上の濃度および半値幅（流速や濃度が軸上値の半分となる軸からの長さ）の各方程式を誘導して、乱流シュミット数  $s_c$  および流速分布と濃度分布の半値幅の2乗の比  $\sigma$  をこれらの方程式の数値解析結果と実験値で同定し、その後  $s_c$  数について議論している。

## 2. 実験装置および実験方法

Fig. 1 は、長さ 3.6 m、幅 0.9 m、深さ 1.5 m の実験水槽であり、その水槽底部中央には内径 4.95 mm の噴流ノズルが鉛直に設置されている。なお噴流ノズル出口の断面平均流速は、水槽側面に取り付けてある越流パイプより越流した平均越流流量より求めた。

噴流実験に使用した砂粒子は、50% 粒径が 0.342 mm の豊浦標準砂であり、沈降速度は Schiller の式より、5.1 cm/s である。この砂粒子の噴流ノズルへの供給については、一定量の砂粒子を噴流ノズルへ機械的に送るために、砂粒子と水の混合部を回転らせん構造とした。

この実験では、噴流出口からの各所定の高さで、噴流内の流速分布および濃度分布を測定している。この実験の第1の目的は、均一流体の噴流に対して従来使用されている経験的な流速および濃度分布式の適用性を検討することであり、第2は、この噴流の領域区分を行い、その後、実験結果より乱流シュミット数  $s_c$  の特徴を検討することである。

流速測定については、流速計のプロープを噴流出口原点から噴流軸上の所定の高さに設置し、その後、流速計

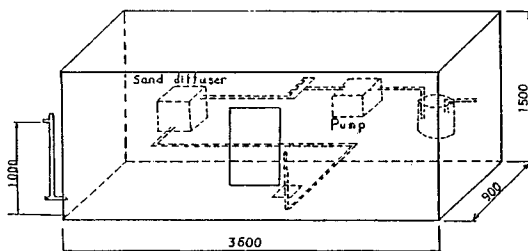


Fig. 1 Experimental apparatus.

Table 1 Experimental conditions.

| RUN | $u_0$ (cm/s) | $c_0$   |
|-----|--------------|---------|
| 1   | 249.95       | 0.00361 |
| 2   | 256.10       | 0.00980 |
| 3   | 279.05       | 0.00700 |
| 4   | 332.57       | 0.00250 |
| 5   | 329.45       | 0.00101 |
| 6   | 159.53       | 0.02810 |
| 7   | 148.62       | 0.00538 |
| 8   | 182.39       | 0.00340 |

を取り付けたポイントゲージ本体を噴流幅方向（水平方向）に移動させ、噴流幅方向の各点における平均流速を測定した。なおプロペラ式流速計（計測技研 VA-403）からの出力電圧は直接シグナルアナライザー（岩通 SM-2100）に入力され、10回の測定値の平均値を平均出力電圧とし、流速に変換している。なお実験前に行った出力電圧とこの流速との関係が、実験後も同じであったことを確認している。

噴流内での濃度測定のための砂粒子採取は、内径 2.4 mm の真鍮パイプをポイントゲージのアタッチメントに取り付け、サイホン方式によって、砂粒子を水とともに採取する方法によった。噴流出口からの採取高さ  $z$  は流速測定高さと同じであり、噴流幅方向の採取位置は、流速測定位置とほぼ同じ位置とした。噴流出口に近いところでは 500 cc、噴流出口から離れたところでは 1000 cc 採取した試料を乾燥させ、感量 0.01 g のはかりで乾燥重量を測定して砂と水の重量を求めた。なお噴流出口での濃度を精度良く測定するのは困難であったので、噴流出口付近の噴流軸上での数点の濃度  $c_m(0, z)$  とその測定位置  $z$  から噴流出口の濃度 ( $=c_0(0, 0)$ ) を外挿して決定した。Table 1 は、各実験の噴流出口での断面平均流速  $u_0$  と出口濃度  $c_0$  (体積濃度) である。

噴流周りの渦の可視化について、噴流軸の周りに発生している渦を鮮明に捕らえ、噴流断面を可視化するために、噴流上部 2 か所より 2 mm の隙間からスリット状の光（光源ハロゲン電球 1000 W）を照射し、35 mm カメラ（ニコン FE 50 mm 標準レンズ）を使用した。なお ASA 400 のフィルムを 3200 に増感している。

## 3. 流速および土砂濃度分布

Photo 1 は、砂粒子を含んだ鉛直上方噴流の全体写真であり、砂粒子の動きも模式的に描いてある。この写真より、噴流周りに発生している渦、噴流出口付近の流れの様子および噴流上部からの砂粒子の沈降の様子がよくわかる。

まず流速分布と濃度分布について検討を加えよう。噴流の各高さ（噴流出口から 15~50 cm の間で 2~3 か所）で、噴流幅方向に 8 点から 10 点程度、流速と濃度を測定している。今回の砂粒子を含んだ噴流の実験では、砂粒子の沈降性によって噴流上部付近の噴流構造と出口付

近の噴流構造とは異なっているものと考えられる。つまりこの種の噴流では、噴流領域を噴流出口付近に発生する砂粒子の沈降性があまり有意でない領域（以後この領域を噴流領域とよぶ）と砂粒子の沈降性が卓越した領域（以後この領域を逆浮力領域とよぶ）とに区別する必要がある。Fig. 2とFig. 3は噴流領域（これらの領域区分は後に詳しく述べる）での流速分布  $u(r, z)$  および濃度分布  $c(r, z)$  であって、おのおのの縦軸は軸上流速  $u_m(z) (=u(0, z))$  および軸上濃度  $c_m(z) (=c(0, z))$  で無次元化されている。また、横軸の噴流軸からの距離  $r$  は流速および濃度の半値幅つまり  $R_1(z)$  および  $R_2(z)$  で無次元化したものであり、 $R_1(z)$  と  $R_2(z)$  は  $u(R_1, z)/u_m(z)=0.5$ ,  $c(R_2, z)/c_m(z)=0.5$  と定義されている。同図より、この領域の無次元流速分布は実験条件および高さ  $z$  にかかわらず1本の曲線で表わされ、濃度分布も多少散らばりがみられるものの流速分布の場合と同様に、ほぼ1本の曲線で表わされると考えられる。そこでこれらの分布型を、正規分布型の分布式すなわち以下の式で表示する。

$$u(r, z) = u_m(z) \exp \left[ -\ln 2 \left( \frac{r}{R_1(z)} \right)^2 \right]$$

$$c(r, z) = c_m(z) \exp \left[ -\ln 2 \left( \frac{r}{R_2(z)} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (1)$$

ここに  $\ln$  は自然対数である。一方、逆浮力領域での流速分布については、プロベラ式流速計以外に水素気泡法によって噴流外縁に発生しているであろう逆流流速分布をも測定する試みを行ったが、外縁周りに発生している渦に起因する攪乱のために水素気泡が攪乱され、逆流流速分布を得ることはできなかった。

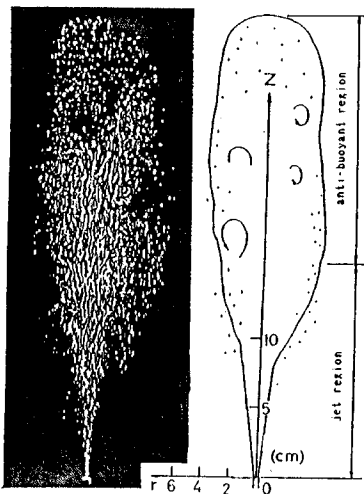


Photo 1 Visualized upward submerged jet involving sand particles.

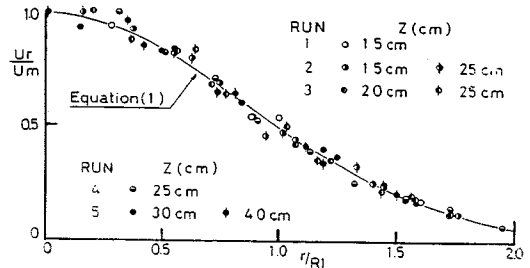


Fig. 2 Mean-velocity distribution in the jet region.

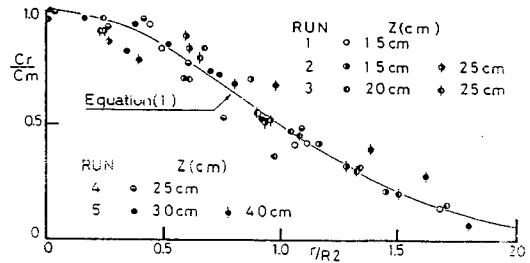


Fig. 3 Mean-concentration distribution in the jet region.

#### 4. 噴流の幾何形状と軸上流速

##### (1) 次元解析手法による噴流の特性量

著者らは、噴流領域での運動量拡散係数  $\epsilon_m$  と土砂拡散係数  $\epsilon_c$  との比つまり乱流シュミット数  $s_c$  を検討するのが本論の主目的としている。ところで、砂粒子を含んだ鉛直上方噴流は、前述したように噴流領域と逆浮力領域とから成り立っていると考えられ、これら各領域での噴流の内部構造は、噴流流速と砂粒子の沈降性とのかわりのうえで大いに異なっているものと考えられる。したがって、上記の噴流領域での砂粒子を含んだ噴流の諸特性を検討するには、まずはこれらの領域を明確に区分する必要がある。そこで著者らは次元解析手法を用いて、噴流領域と逆浮力領域とを区分する境界高さ、各領域での軸上流速分布および逆浮力領域の最大上昇高さをまず決定することにした。さて噴流の場合、連続方程式、運動方程式および土砂の保存方程式を噴流軸周りで積分すると、周辺流体の取り込みを表わす質量流束  $\mu$ 、運動量流束  $m$  および砂粒子の沈降性による反浮力流束  $\beta$  が重要な変数であることが知られる。そこで噴流構造を特徴づける変数として、上述の  $\mu$ 、 $m$  および  $\beta$  の各流束を次元解析に使用する。ここにこれらの流束は次のように定義されており、 $r$  は噴流軸からの距離である。

質量流束

$$\mu = 2 \pi \int_0^{\infty} u(r, z) \cdot r \cdot dr$$

運動量流束

$$m = 2 \pi \int_0^{\infty} u(r, z)^2 \cdot r \cdot dr$$

反浮力流束

$$\beta = 2\pi \int_0^\infty (\rho_s/\rho_f - 1) \{u(r, z) - w_0\} g c(r, z) r dr \dots\dots\dots (2)$$

ここで、噴流出口から任意の位置  $(r, z)$  における速度分布  $u(r, z)$  および濃度分布  $c(r, z)$  を、前述したように式 (1) で表わすと、式 (1) を式 (2) の各流束に代入して

$$\begin{aligned} \mu &= (\ln 2)^{-1} \pi u_m(z) R_1(z)^2 \\ m &= (2 \ln 2)^{-1} \pi u_m(z)^2 R_1(z)^2 \\ \beta &= (\ln 2)^{-1} \pi (\rho_s/\rho_f - 1) g c_m(z) \\ &\cdot R_2(z)^2 \left[ \frac{R_1(z)^2}{R_1(z)^2 + R_2(z)^2} u_m(z) - w_0 \right] \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

を得る。ここに  $w_0$  は砂粒子の沈降速度、 $\rho_s/\rho_f$  は砂粒子の比重、 $R_1(z)$  と  $R_2(z)$  は流速と濃度の半値幅および  $g$  は重力の加速度である。

さて、噴流の特性長さを  $L$  および特性速度を  $U$  とすると、式 (3) の各流束を用いて、特性長さ  $L$  と特性速度  $U$  の関数関係は

$$f_1(L, U, \mu, m, \beta) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

である。ここで式 (4) に次元解析手法を用いると、

$$f_2 \left[ \frac{L\beta^{1/2}}{m^{3/4}}, \frac{U\mu^{1/5}}{\beta^{2/5}}, \frac{\mu^2\beta}{m^{5/2}} \right] = 0 \dots\dots\dots (5)$$

を得る。この第1項と第2項の要素はそれぞれ特性長さおよび特性速度の無次元形である。第3項は、 $\sigma(z)$  を流速と濃度の半値幅の2乗の比、つまり

$$\sigma(z) = \left( \frac{\text{流速の半値幅}}{\text{濃度の半値幅}} \right)^2 = \left[ \frac{R_1(z)}{R_2(z)} \right]^2$$

とすると

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2\beta}{m^{5/2}} &= 4 \sqrt{\frac{2\pi}{\ln 2}} \left\{ (\rho_s/\rho_f - 1) g c_m(z) \right. \\ &\cdot R_1(z) [\sigma(z) u_m(z) - \{1 + \sigma(z)\} w_0] \\ &\left. [\sigma(z) \{1 + \sigma(z)\} u_m(z)^2] \right\} \end{aligned}$$

であり、噴流領域では  $\sigma(z) u_m(z) \gg \{1 + \sigma(z)\} \cdot w_0$  であるので、上式右辺は

$$= \frac{4}{1 + \sigma(z)} \sqrt{\frac{2\pi}{\ln 2}} \frac{(\rho_s/\rho_f - 1) g c_m(z) R_1}{u_m(z)^2}$$

と書き直される。この量はいわゆる「全体的リチャードソン数」に相当する変数である。そこで式 (5) の左辺第3項を高さ  $z$  でのリチャードソン数という意味で  $Ri_z$  と記す。さて、リチャードソン数はレイノルズ応力による機械的な乱れのエネルギー生産項と浮力による乱れのエネルギー吸収減衰率の比として定義されている。そこでエネルギー生産項の減少あるいは吸収減衰率が增加すると、リチャードソン数は増加し、成層流は攪乱に対して安定となる。すなわち、リチャードソン数は成層

流の安定・不安定の指標である。

以上でこの種の噴流構造に対しては、特性長さ、特性速度およびリチャードソン数  $Ri_z$  が支配的な量であることがわかった。そこで、まずは噴流領域での軸上流速分布を明らかにして、その後に境界高さを決定する。

(2) 軸上流速分布と境界高さ

砂粒子の沈降性が有為でない領域を噴流領域、沈降性が卓越した領域を逆浮力領域と考える。つまり式 (3) の反浮力流束  $\beta$  より

$\beta > 0$  すなわち  $Ri_z > 0$  のときを噴流領域

$\beta < 0$  すなわち  $Ri_z < 0$  のときを逆浮力領域

と噴流領域区分を行う。

Fig. 4 は出口での流束  $\mu_0, m_0, \beta_0$  を用いた式 (5) の無次元軸上流速  $u_{m*} (= u_m \mu_0^{0.2} / \beta_0^{0.4})$  と噴流出口からの無次元距離  $z_{1*} (= z \beta_0^{0.5} / m_0^{0.75})$  の関係である。同図中では、高さ  $z$  でのリチャードソン数  $Ri_z$  (式 (5) の第3項の各流束  $\mu, m, \beta$  に、噴流出口からの高さ  $z$  での値を使用) が正の場合の記号 (丸印) を右上に、負の場合の記号 (三角印) を左下に記してある。同図より、 $Ri_z > 0$  の場合、つまりあまり砂粒子の沈降性が有意でない場合には、出口リチャードソン数  $Ri_0$  (噴流出口での流束  $\mu_0, m_0, \beta_0$  の値を使用) の関数である  $A_1$  を定数と仮定すると、均一流体での円形噴流の場合と同様に  $u_{m*} = A_1 z_{1*}^{-1}$

が成立している。一方、 $Ri_z < 0$  の場合、つまり砂粒子の沈降性が卓越した場合には、測定値は  $u_{m*} \propto z_{1*}^{-1}$  の関係からずれている。すなわち、 $Ri_z = 0$  となる噴流出口からの距離  $z$  を噴流領域と逆浮力領域とを区分する境界高さ  $z_c$  と考える。

そこで2つの領域を区分する境界高さ  $z_c$  を決定しよう。Fig. 4 から明らかなように、噴流領域では  $u_{m*} \propto z_{1*}^{-1}$  が成立しているので  $u_{m*}$  を出口リチャードン

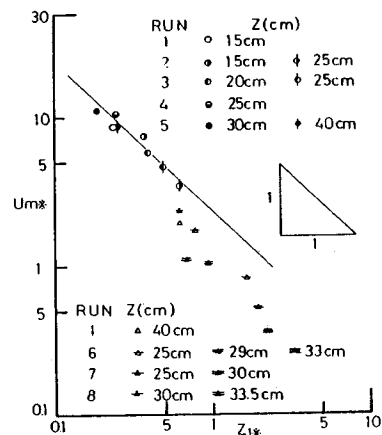


Fig. 4 Axial velocity distribution in the jet region.

数  $Ri_0$  で書き直すと、噴流領域の軸上流速  $u_m$  は

$$u_m(z) \propto z_{1*c}^{-1} Ri_0^{2/5} \frac{m_0}{\mu_0} \dots\dots\dots (6)$$

となる。前述したように噴流領域と逆浮力領域とを区分するリチャードソン数  $Ri_z (= \mu^2 \beta / m^{2.5})$  は  $Ri_z = 0$  である。つまり反浮力流束  $\beta$  の定義からわかるように、式 (6) での軸上流速  $u_m(z)$  が  $u_m(z) = [1 + \sigma(z)] w_0 / \sigma(z)$  に等しいときに  $Ri_z = 0$  となる。したがって無次元境界高さ  $z_{1*c}$  は式 (6) より

$$z_{1*c} = A_2 Ri_0^{2/5} \dots\dots\dots (7)$$

である。ここに定数  $A_2$  は  $A_2 = A_1 [\sigma(z) m_0 / (1 + \sigma(z)) w_0 \mu_0]$  である。Fig. 5 は実験による  $z_{1*c}$  と  $Ri_0$  との関係であり、ほぼ式 (7) を満足している。ここに  $z_{1*c}$  の決定については、実験結果よりリチャードソン数  $Ri_z$  を求め、内挿によって  $Ri_z = 0$  の場合の境界高さ  $z_{1*c}$  を決定している。なお、本論文では限られたデータだけを代表例として示しているが、実際には数多くの実験を行っており、本論文で示す結果と同様の結果を得ている。この図で示す RUN 1 以外の 3 点は他の実験ケースによるものである。

さて、逆浮力領域での軸上流速についても考えてみよう。逆浮力領域ではもはや出口での運動量流束  $m_0$  は有意ではないと考えられる。そこで無次元距離  $z_{1*}$  に出口でのリチャードソン数  $Ri_0$  を用いて  $z_{1*}$  から運動量流束  $m_0$  を除去する。つまり  $z_{2*} = z(\beta_0 / \mu_0^2)^{0.2}$  を逆浮力領域での無次元距離とする。Fig. 6 は逆浮力領域での軸上流速分布であり、同図より逆浮力領域ではもはや  $A_3$  は  $m_0$  の有意な関数ではないので、 $A_3$  を定数として、

$$u_{m*} = A_3 z_{2*}^\alpha$$

を期待したい。

ここで逆浮力領域での軸上流速分布の指数  $\alpha$  を境界高さに関する知見から決定しよう。つまり境界高さで噴流領域と逆浮力領域の無次元流速が接続するという条件を使用すると、無次元境界高さ  $z_{1*c}$  は

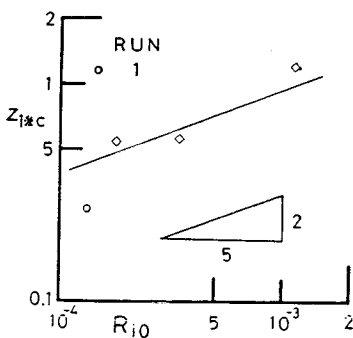


Fig. 5 Relationship between critical height in the jet region and overall Richardson number.

$$z_{1*c} = \left[ \frac{A_2}{A_1} \right]^{1/(\alpha-1)} \cdot Ri_0^{\alpha/10(\alpha-1)} \dots\dots\dots (8)$$

である。そこで式 (7) と式 (8) との対応より、逆浮力領域での軸上流速の指数  $\alpha = 4$  を得る。Fig. 6 には、 $\alpha = 4$  の場合の直線が示してあり、この直線はよく実験値を再現している。つまり逆浮力領域の軸上流速は距離の 4 乗に比例して減少することになる。以上で、各領域における軸上流速の分布型および噴流領域と逆浮力領域とを区分する境界高さの定式が得られた。そこで次に逆浮力領域の大きさを規定するいま 1 つの量、すなわち最大上昇高さを定式化しよう。

(3) 最大上昇高さ

最大上昇高さ  $H_{max}$  では、特性速度  $U$  はもはや有意ではないので、式 (5) より無次元速度を消去し、噴流出口での流束  $\mu_0$ 、 $m_0$ 、 $\beta_0$  を用いて、

$$\frac{H_{max} \cdot \beta_0^{1/2}}{m_0^{3/4}} = f_3 \left\{ \frac{\mu_0^2 \beta_0}{m_0^{5/2}} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

を得る。さらにこの最大上昇高さ  $H_{max}$  の位置では、もはや運動量流束  $m_0$  も有意ではないので、関数  $f_3$  に指数型を期待し、出口での運動量流束  $m_0$  を消却するように指数を決定すると、

$$\frac{H_{max} \cdot \beta_0^{1/2}}{m_0^{3/4}} = A_4 \left\{ \frac{\mu_0^2 \beta_0}{m_0^{5/2}} \right\}^{3/10}$$

すなわち、

$$H_{max*} = A_4 \cdot Ri_0^{0.3} \dots\dots\dots (10)$$

の関数関係を得る。

Fig. 7 は、噴流出口の管径を 3 種類、噴流出口から水槽の自由水面までの高さを 2 種類変えた実験結果である。同図より、式 (10) はよく実験結果を再現している。なお最大上昇高さ  $H_{max}$  の測定については、35 mm カメラで 2 秒間隔に 36 枚逆浮力領域の上昇高さを写し、36 個の平均値より  $H_{max}$  を 1 つ決定している。さらにビデオ解析装置を用いて、100 分の 1 秒でデータ数 2000 個

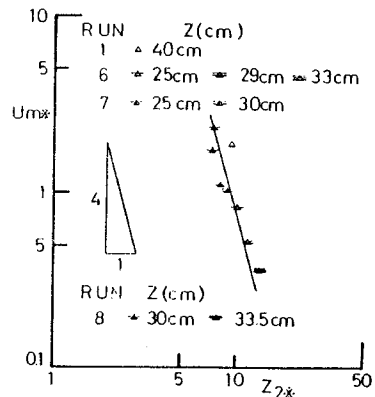


Fig. 6 Axial velocity distribution in the anti-buoyant jet region.

以上をサンプリングし、スペクトル解析を行い、逆浮力領域の最大上昇高さの変動には規則性がないことを確認している。

(4) 可視化による渦の分布

以下に、各領域での渦の分布状況を可視化実験よりみてみよう。

Fig. 8 は、多数の写真から読み取った合計 285 個の渦の位置 (Photo 1 にみられる大きな渦の中心の位置) であり、1 cm 方眼内での渦の個数として示してある。

この可視化実験の場合には、噴流出口での流速と濃度の値だけを求めており、実験から境界高さ  $z_{1*c}$  を求めることができない。そこで後に示す Fig. 12 の境界高さ  $z_{1*c}$  の数値計算と実験による各曲線に、この可視化実験の場合の出口リチャードソン数  $Ri_0 (=0.000671)$  を用いて  $z_{1*c}$  を推定すると、数値計算による曲線からは  $z_c = 28$  cm、実験による曲線からは (式 (7) の係数  $A_2$  を  $A_2 = 13$  として) 約 20 cm である。つまり  $z_c = 25$  cm 前後のところが境界高さと考えられる。そこで Fig. 8 を観察すると、噴流出口から 25 cm 前後のところで渦が噴流軸上にも現われ、この高さを境として渦の個数および分布位置が大きく異なっている。つまり高さが 25 cm

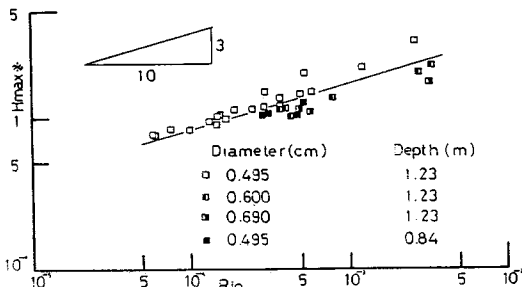


Fig. 7 Dimensionless maximum height of the jet.

| (cm) | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|
| 32   |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |
| 31   |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |
| 30   |    |    |    |    |    |    | 1  | 2 |   |   |   |   |   |   |
| 29   |    |    |    |    |    |    | 1  | 4 | 2 | 1 | 3 |   |   |   |
| 28   |    |    |    |    |    |    |    | 3 | 3 | 1 | 1 |   |   |   |
| 27   |    |    |    |    |    |    |    | 1 | 2 | 4 | 2 | 1 |   |   |
| 26   |    |    |    |    |    |    |    |   | 1 | 2 | 1 | 2 |   |   |
| 25   |    |    |    |    |    |    |    |   | 1 | 2 | 1 | 1 |   |   |
| 24   |    |    |    |    |    |    |    |   | 5 | 1 | 2 | 3 |   |   |
| 23   |    |    |    |    |    |    |    |   | 4 | 7 | 2 |   |   |   |
| 22   |    |    |    |    |    |    |    |   | 2 | 6 | 1 | 2 |   |   |
| 21   |    |    |    |    |    |    |    |   | 1 | 5 | 6 | 1 | 1 |   |
| 20   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 1 | 5 | 2 |   |   |
| 19   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 5 | 8 |   |   |   |
| 18   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 1 | 1 | 3 |   |   |
| 17   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 2 | 5 | 2 |   |   |
| 16   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 1 | 6 | 2 |   |   |
| 15   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 5 | 1 |   |   |   |
| 14   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 5 | 1 |   |   |   |
| 13   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 2 | 1 |   |   |   |
| 12   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 3 | 1 |   |   |   |
| 11   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 1 | 1 |   |   |   |
| 10   |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 1 | 1 |   |   |   |
| 9    |    |    |    |    |    |    |    |   |   | 1 | 1 |   |   |   |

Fig. 8 Distributions of the eddy around the jet axis.

以下の領域 (噴流領域と考えられる) では、渦の分布状況は噴流形状とほぼ相似の形をしている。

一方、Fig. 7 の  $H_{max}$  からこの噴流の最大上昇高さを求めると約  $H_{max} = 30$  cm 程度であり、Fig. 8 では高さが 31 cm 程度のところで渦が消滅している。つまり最大上昇高さは 30 cm 程度であり、高さが 25~30 cm の領域 (逆浮力領域と考えられる) では、渦が軸上にも現われ、また順次渦が消滅していく。

以上、次元解析手法によって各領域での軸上流速分布、噴流領域と逆浮力領域との境界高さおよび逆浮力領域の最大上昇高さの決定方法を示し、それを検討した。

5. 乱流シュミット数

以下では、噴流軸上での流速、濃度および半値幅の方程式を誘導し、噴流領域での運動量拡散係数  $\epsilon_M$  と土砂拡散係数  $\epsilon_c$  との比つまり乱流シュミット数  $S_c (= \epsilon_M / \epsilon_c)$  に考察を加える。

(1) 軸上流速、軸上濃度および半値幅

噴流領域での流速分布と濃度分布を、式 (1) で表示すると、軸上流速や軸上濃度および各半値幅が求めれば、噴流幅方向の流速分布や濃度分布が確定する。そこで著者らは、運動方程式や土砂の保存方程式を軸上での方程式に書き直し、その後、軸上流速、軸上濃度および半値幅の各方程式を誘導して乱流シュミット数  $S_c (= \epsilon_M / \epsilon_c)$  を同定する。

まず運動方程式を、 $u$  を噴流方向、 $v$  を噴流幅方向の流速として円筒座標で表記すると、

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz})$$

である。ここで静水圧分布を仮定し、流体密度  $\rho$  を水と砂粒子の密度  $\rho_f$  と  $\rho_s$  さらに体積濃度  $c$  を用いて、

$$\rho = \rho_f + (\rho_s - \rho_f)c$$

と書き表わすと、運動方程式の右辺第 1 項と第 2 項は、

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho} \right) \doteq -(\rho_s / \rho_f - 1)gc$$

と書き表わされる。また  $\tau_{rz}$  を

$$\tau_{rz} = \rho \epsilon_M \frac{\partial u}{\partial r}$$

と表わし、運動量拡散係数  $\epsilon_M$  を噴流出口からの高さ  $z$  の断面で一定と仮定すると、

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -(\rho_s / \rho_f - 1)gc + \frac{\epsilon_M}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \dots \dots \dots (11)$$

となる。また連続方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

である。同様に土砂の保存方程式は、土砂拡散係数  $\epsilon_c$  を用いて、

$$u \frac{\partial c}{\partial z} + v \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\epsilon_c}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c}{\partial r} \right) + w_0 \frac{\partial c}{\partial z} \dots\dots\dots(13)$$

であり、上の3式が基礎方程式である。

さて以下に式(11)および式(13)を、Fleischhackerら<sup>6)</sup>と同様の手法で噴流軸上での方程式に書き直す。噴流軸上では、

$$v(0, z)=0, u(0, z)=u_m(z), c(0, z)=c_m(z)$$

である。したがって、運動方程式と保存方程式は噴流軸上で

$$u_m \frac{du_m}{dz} = -(\rho_s/\rho_f - 1)g c_m + \lim_{r \rightarrow 0} \epsilon_M \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\} \dots\dots\dots(14)$$

$$u_m \frac{dc_m}{dz} = w_0 \frac{dc_m}{dz} + \lim_{r \rightarrow 0} \epsilon_c \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c}{\partial r} \right) \right\} \dots\dots(15)$$

となる。ここで、流速分布および濃度分布に式(1)と同様な以下の経験式を用いる。

$$\frac{u(r, z)}{u_m(z)} = \exp \left[ (-\ln 2) \frac{r^2}{R_1(z)^2} \right]$$

$$\frac{c(r, z)}{c_m(z)} = \exp \left[ (-\sigma(z) \ln 2) \frac{r^2}{R_1(z)^2} \right] \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 $R_1(z)$ は流速の半値幅であり、 $\sigma(z)$ は流速と濃度の半値幅の2乗の比 $[=|R_1(z)/R_c(z)|^2]$ である。ところでこの $\sigma(z)$ は、式(11)の右辺第1項と式(13)の右辺第2項が無視できるほど小さく、また流速分布と濃度分布にそれぞれ相似型を仮定すると、乱流シュミット数 $s_c (= \epsilon_M/\epsilon_c)$ に等しくなる<sup>7)</sup>が、著者らは式(14)と式(15)を基礎方程式として以下の議論を進める。

さて式(14)、式(15)の取扱いにあたっては式(16)を用いておのおのの右辺第2項の極限值を求め、運動量拡散係数 $\epsilon_M$ と土砂拡散係数 $\epsilon_c$ との比、つまり乱流シュミット数 $s_c$ を持ち込み、さらに運動量拡散係数 $\epsilon_M$ を比例定数 $K$ を用いて、

$$\epsilon_M = K \cdot R_1 \cdot u_m$$

と置くと、土砂拡散係数 $\epsilon_c$ は

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_M}{s_c} = \frac{K \cdot R_1 \cdot u_m}{s_c}$$

となり、結局噴流軸上で、式(14)と式(15)は、

$$u_m \frac{du_m}{dz} = -(\rho_s/\rho_f - 1)g c_m - 4 K (\ln 2) \frac{u_m^2}{R_1} \dots\dots\dots(17)$$

$$u_m \frac{dc_m}{dz} = w_0 \frac{dc_m}{dz} - \frac{4 K (\sigma \ln 2) u_m c_m}{s_c R_1} \dots\dots\dots(18)$$

と整理される。また式(11)の左辺を連続の方程式で書き直すと、式(11)は

$$\frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ruv)}{\partial r} = -(\rho_s/\rho_f - 1)g c + \frac{\epsilon_M}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

と書き表わされる。さらに上式(19)に噴流軸からの距

離 $r$ を掛け、0から $\infty$ まで $r$ で積分すると、

$$\frac{d}{dz} \int_0^\infty (ru^2)dr = -(\rho_s/\rho_f - 1)g \int_0^\infty r c dr \dots\dots\dots(20)$$

が得られる。これは噴流中での逆浮力による運動量の減少を表現する式である。ここで式(20)の両辺に流速分布および濃度分布の経験式を代入し、整理すると式(20)は軸上の諸量についての式

$$\frac{d}{dz} (R_1^2 u_m^2) = -2(\rho_s/\rho_f - 1)g c_m \frac{R_1^2}{\sigma} \dots\dots\dots(21)$$

となる。式(17)、式(18)および式(21)の各式を無次元で以下のように書き表わす。

つまり、次元解析手法で使用した無次元量 $\tilde{z}$ 、 $\tilde{u}_m$ および $\tilde{c}_m$ を出口での各流速で表わし

$$z = \tilde{z} \frac{m_0^{3/4}}{\beta_0^{3/2}}, u_m = \tilde{u}_m \frac{\beta_0^{2/5}}{\mu_0^{1/5}}, c_m = \tilde{c}_m \cdot c_0$$

を用いて無次元式に書き直すと

$$\frac{d\tilde{u}_m}{d\tilde{z}} = -4 K (\ln 2) \frac{\tilde{u}_m}{\tilde{R}_1} - \frac{2 \tilde{c}_m \tilde{u}_0}{\tilde{u}_m (\tilde{u}_0 - 2 \tilde{w}_0)} R i_0^{-3/10} \dots\dots\dots(22)$$

$$\frac{d\tilde{c}_m}{d\tilde{z}} = -\frac{4 K (\sigma \ln 2)}{s_c} \frac{\tilde{u}_m \tilde{c}_m}{\tilde{R}_1 (\tilde{u}_m - \tilde{w}_0)} \dots\dots\dots(23)$$

$$\frac{d\tilde{R}_1}{d\tilde{z}} = 4 K (\ln 2) - \frac{2 \tilde{R}_1 \tilde{c}_m \tilde{u}_0 (1 - \sigma)}{\tilde{u}_m^2 (\tilde{u}_0 - 2 \tilde{w}_0) \sigma} R i_0^{-3/10} \dots\dots\dots(24)$$

であり、ここに $Ri_0$ は出口でのリチャードソン数である。

以上で無次元微分方程式が誘導された。

(2) 比例定数 $K$ 、 $\sigma$ および $s_c$ 数の決定

軸上流速、軸上濃度および半値幅の式に含まれている比例定数 $K$ を決定してから、上に求められた式(22)から式(24)を用いて流速と濃度の半値幅の2乗の比 $\sigma$ および乱流シュミット数 $s_c$ を同定する。

まず比例定数 $K$ については、噴流領域を対象としているから、式(24)で近似的に $\tilde{c}_m/\tilde{u}_m^2 \approx 0$ として、つまり式(24)の右辺第2項を零と置き、リチャードソン数 $Ri_z$ が正の部分(噴流領域)での半値幅 $R_1$ を示すFig.9の両者より

$$\frac{d\tilde{R}_1}{d\tilde{z}} = 4 K (\ln 2) \approx 0.103$$

すなわち、 $K = 0.037$ を得る。これまでの多くの $dR_1/dz$ に関する研究成果によると、等質流体の噴流の場合 $dR_1/dz = 0.114$ 程度の値またプリュームの場合 $dR_1/dz = 0.104$ 程度の値が得られている<sup>8)</sup>。また、半値幅の値は使用する流速分布の関数型によっても変化することを勘案すると、上に求められた値はほぼ妥当な値であると考えられる。

$\sigma$ と $s_c$ 数の同定について、実験による軸上流速およ



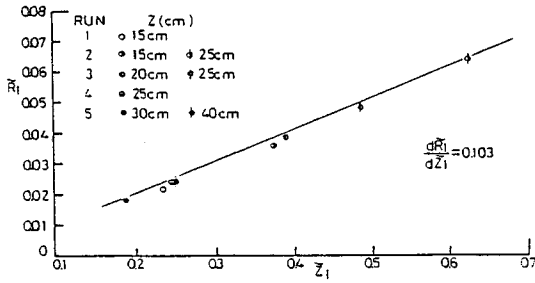


Fig. 9 Half-value width in the jet region.

び軸上濃度と、その実験での噴流出口での断面平均流速  $u_0$ 、出口濃度  $c_0$  および  $Ri_0$  を用いて式 (22), 式 (23) および式 (24) を数値解析した流速および濃度とがよく一致する  $\sigma$  と  $s_c$  数とを各実験について選定した。Fig. 10(a) と Fig. 10(b) とは、 $\sigma$  と  $s_c$  数とを選定した際の軸上流速と軸上濃度の測定値と計算値であり、両者はほぼ一致している。

Fig. 11 は、同定した  $\sigma$  (丸印) と半値幅より決定した  $\sigma$  (四角印) とを、出口リチャードソン数  $Ri_0$  で示してある。同図より、RUN1 と RUN 5 の  $\sigma$  の値は半値幅より決定した  $\sigma$  の値の 3 倍程度大きい値であるが、その他の両者の値はほぼ同程度の値である。

さて、数値計算に使用した各式は厳密には噴流領域でのみ成立し、逆浮力領域に近づくにつれて誤差が多くなるものと考えられるが、使用した式の適用性および同定の確からしさを、数値計算による限界高さ  $z_{1*c}$  からみてみよう。Fig. 12 は、上記のように決定した  $K$ ,  $\sigma$ ,  $s_c$  数および各実験の出口での値を用いて式 (22) から式 (24) で計算した限界高さ  $z_{1*c}$  ( $Ri_z=0$  の場合の無次元高さであり、丸印で表わしている) と  $Ri_0$  との関係である。同図中には Fig. 5 の実験値から決定した  $z_{1*c}$  (四角印で表わしている) も計算結果との比較のために再度記入してある。同図の実験値と計算値を比較すると、 $\sigma$  の場合と同様に RUN 1 の  $z_{1*c}$  は他より小さい値を示しているが、同図中の計算結果による平均的な直線の勾配は式 (7) の勾配 0.4 とほぼ一致している。すなわち、RUN 1 の同定結果には幾分不確かさが入り込んでいるようではあるが、同図から式 (22), 式 (23) および式 (24) が噴流領域を再現しており、さらに選定した  $\sigma$  と  $s_c$  数もほぼ妥当であると考えられる。

さて  $s_c$  数についてみてみよう。Fig. 13 は、 $s_c$  数とリチャードソン数  $Ri_z$  である。これまで数少ない資料で  $s_c$  数を同定する際にはやむを得ず  $z$  に依存しない定数としていたので、同じ実験での  $s_c$  数は同図中で横棒で結んである。同図より、 $s_c$  数は 1 より大きくさらに  $Ri_z$  数とともに増加する傾向を示している。同図と同様な傾向は、開水路浮遊砂流に  $k-\epsilon$  モデルを適用して  $s_c$

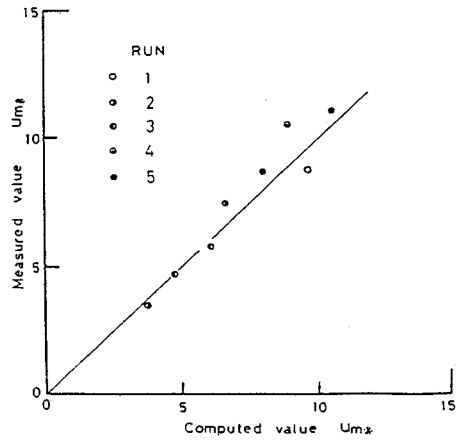


Fig. 10(a) Comparison between measured and calculated velocity on the axis.

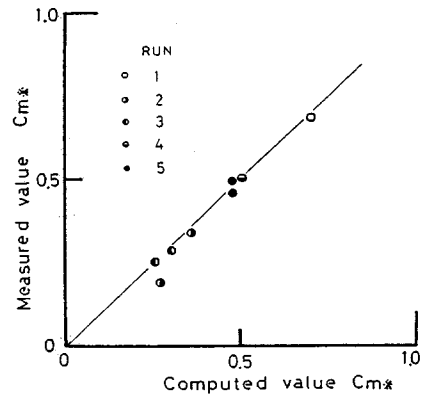


Fig. 10(b) Comparison between measured and calculated concentration on the axis.

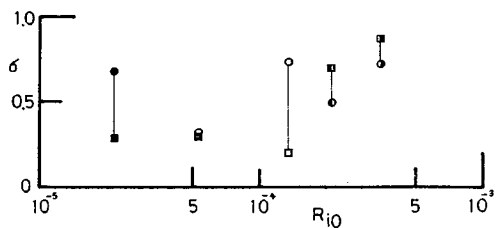


Fig. 11 Relationship between calculated  $\sigma$  and measured  $\sigma$ .

数を同定した福嶋<sup>9)</sup>によっても得られている。

(3) 乱流シュミット数  $s_c$  について

Fig. 13 を検討する前に、まずこれまでに行われた類似の実験をみてみよう。Singamsetti は、砂粒子を含んだ鉛直下方噴流実験で、式 (11) の右辺第 1 項と式 (13) の右辺第 2 項とを省略し (この場合、 $\sigma$  は  $s_c$  数に等しくなる)、 $s_c$  数は砂粒レイノルズ数  $w_0 d / \nu$  の増加とともに 0.83 から 0.71 程度に減少すると報告している。なお彼はこの理由について、砂粒子に作用する遠心力が大

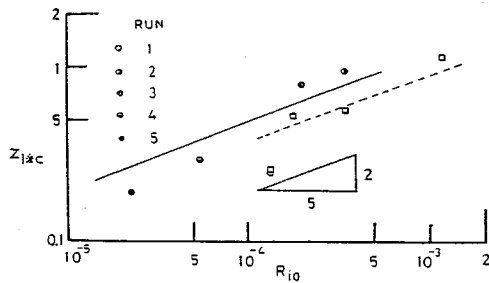


Fig. 12 Relationship between critical height in the jet region and overall Richardson number by means of calculation.

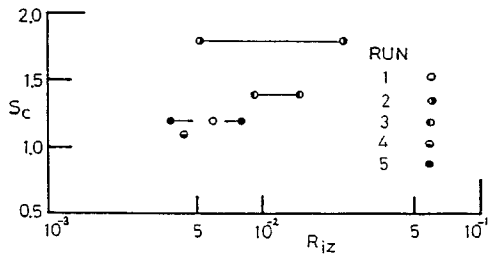


Fig. 13 Relationship between turbulent Schmidt number and local Richardson number.

きいために砂粒子が渦から放出され、 $s_c$  数が減少すると述べている。さて Fig. 13 より、著者らの  $s_c$  数は  $s_c > 1$  であり、Singamsetti の値より大きい。  $s_c$  数の値の大小については、Singamsetti の使用した砂粒子径 (0.068~0.46 mm) は、著者らの砂粒子径 (0.342 mm) をも実験範囲に含んでおり、砂粒子径の大小が直ちに  $s_c$  数が 1 より大きいか否かに関与するのではないと考えられる。

さて噴流現象は、噴流周辺の流体の連行現象と密接に結び付いている。そこで、2 層間の物質輸送速度を表現する連行係数を用いて、Fig. 13 の  $s_c$  数と  $Ri_z$  との関係を検討しよう<sup>10)</sup>。連行係数  $E$  は、 $V_e$  を連行速度とすると、

$$E = \frac{V_e}{u_m} \dots \dots \dots (25)$$

と定義される。ここで連行速度  $V_e$  が乱流流束  $\overline{v}c/c_m$  に比例し、さらに乱流流束  $\overline{v}c \propto \epsilon_c \cdot c_m/R_2$  と仮定すれば、

$$E \propto \frac{\overline{v}c}{u_m c_m} \propto \frac{\epsilon_c}{\epsilon_m} \sigma^{1/2}$$

つまり

$$E = A_s \frac{\sigma^{1/2}}{s_c} \dots \dots \dots (26)$$

であり、ここに  $A_s$  は比例定数である。

また連行速度  $V_e$  は、

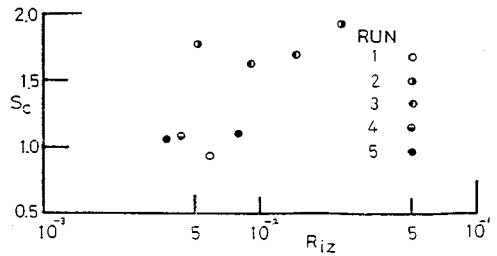


Fig. 14 Relationship between turbulent Schmidt number calculated by equation (29) and local Richardson number.

$$V_e = \frac{1}{2\pi R_1} \frac{d}{dz} \int_0^\infty 2\pi r u dr \dots \dots \dots (27)$$

と定義され、式 (2) の質量流束  $\mu$  を代入した後に、式 (22) および式 (24) を用いて整理すると、

$$V_e = 2Ku_m - \frac{1}{2\ln 2} \frac{2-\sigma}{\sigma} (\rho_s/\rho_f - 1)g \frac{c_m R_1}{u_m} \dots \dots \dots (28)$$

が得られる。したがって  $s_c$  数は

$$s_c = A_s \sigma^{1/2} / \left[ 2K - \frac{1}{8\sqrt{2}\pi \ln 2} \frac{(2-\sigma)(1+\sigma)}{\sigma} Ri_z \right] \dots \dots \dots (29)$$

と記され、Fig. 13 の実験結果を用いるとこの比例定数は、 $A_s = 0.144$  と評価された。Fig. 14 は  $K (=0.037)$  と各実験で同定した  $\sigma$  の値を用いて、式 (29) で計算した  $s_c$  数と  $Ri_z$  であり、ほぼ Fig. 13 を再現していることがわかる。ここで式 (29) は物理的考察によって導かれた式ではなく、連行速度  $V_e$  が乱流流束に比例するとした仮定については今後詳しく検討する必要があるが、式 (29) は、少なくとも  $s_c$  数とリチャードソン数  $Ri_z$  および  $\sigma$  との定性的な関係は表わしている。

## 6. 結 論

砂粒子を含んだ鉛直上方噴流に関する実験結果および考察より以下の事柄が明らかとなった。

- (1) この種の噴流は、噴流領域と逆浮力領域とに区分される。なお、これらの領域区分の境界高さ  $z_c$  はリチャードソン数  $Ri_z = 0$  の高さであると定義した。
- (2) 噴流領域と逆浮力領域とを区分する境界高さは、出口リチャードソン数の 0.4 乗に比例して高くなる。
- (3) 噴流領域での軸上流速は均一流体の場合と同様に高さに逆比例する。一方、逆浮力領域での軸上流速は高さの 4 乗に比例して減少する。
- (4) 逆浮力領域の最大上昇高さは出口リチャードソン数  $Ri_0$  の 0.3 乗に比例して高くなる。
- (5) 乱流シュミット数  $s_c$  は、リチャードソン数  $Ri_z$  および流速と濃度の半値幅の 2 乗の比  $\sigma$  の関数であり、 $Ri_z$  数とともに  $s_c$  数は 1 より大きく増加する。

謝 辞：本研究の一部は文部省科学研究費により行われた。記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Singamsetti, S.R. : Diffusion of sediment in a submerged jet, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 92, No. HY 2, pp. 153~168, 1966.
- 2) van Rijn, L.C. : Sediment transport, Part II, Suspended load transport, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110, No. 11, pp. 1613~1641, 1984.
- 3) 辻本哲郎：乱流による土砂輸送-浮遊砂の拡散係数に対する検討，第30回水理講演会論文集，pp. 637~642, 1986.
- 4) Simons, D.B. and Senturk, F. : Sediment transport technology, pp. 550~554, Water Resources Publications, 1976.
- 5) Karim, M.F. and Kennedy, J.F. : Velocity and sediment-concentration profiles in river flows, Journal of the Hydraulic Engineering, Vol. 113, pp. 159~178, 1987.
- 6) Fleischhacker, G. und Schneider, W. : Experimentelle und theoretische Untersuchungen über den Einfluß der Schwerkraft auf anisotherme turbulente Freistrahlen, Haustechnik-Bauphysik-Umwelttechnik-Gesundheits-Ingenieur 101, Seite 129~160, 1980.
- 7) Hinze, J.O. : Turbulence, pp. 531~534, McGraw-Hill, 1975.
- 8) Lee, J.H., Jirka, G.H. and Harleman, D.R.F. : Stability and mixing of a vertical round buoyant jet in shallow water, Energy Laboratory Report No. MIT-EL-74-014, 1974.
- 9) 福嶋祐介：開水路浮遊砂流の乱流構造の解析，第30回水理講演会論文集，pp. 631~636, 1986.
- 10) 研究代表者，玉井信行：密度流現象における連行係数概念の統一化とその応用，文部省科学研究成果報告書，小松利光“密度噴流と連行現象”，pp. 149~152, 1986.

(1988. 2. 13・受付)