

# 浮体の対称性を利用したグリーン関数計算の効率化

## AN EFFICIENT CALCULATION TECHNIQUE OF THE GREEN'S FUNCTION OF A FLOATING BODY WITH SYMMETRICAL SHAPE

山崎 晶\*

By Akira YAMAZAKI

The singularity distribution method or the Green's function method is considered to be one of the most suitable methods for estimating motions of an arbitrary shape floating body. This is based on the integral of the Green's function and its derivative over the submerged surface of a floating body. For precise calculations of the integral, sophisticated numerical treatments are required, and the corresponding CPU-time may be very long.

This paper deals with an elimination technique of CPU-time to calculate the Green's function of a floating body with a symmetrical shape. Applying it to a biaxial symmetrical floating body, CPU-time can be reduced to be the quarter in comparison with the ordinary calculation.

Keywords: Green's function, CPU-time, symmetrical shape

### 1. はじめに

任意形状浮体の動揺解析手法として、特異点分布法<sup>1),2)</sup>、グリーン関数法<sup>3)</sup>などが提案されている。こうした方法では、浮体の没水表面上でグリーン関数およびその法線微分を積分する必要があり、厳密な計算を浮体分割要素の細長比などに制限を加えずに実行するには、多大な演算時間を要する。このため、こうした方法は実務計算として使用するには問題がある、と指摘されることもある。

中村ら<sup>5)</sup>は、面对称性を有する固定構造物周辺の波高分布推定について、回折波の速度ポテンシャルの性質に基づき効率的な計算手法を示している。

本報文も、浮体の動揺推定について同様な問題を扱っているが、この際波動場の速度ポテンシャルの性質によらず、グリーン関数の特性に基づき簡便な方法で効率化を行った。また、文献<sup>5)</sup>で詳細が示されていない二軸対称性をもつ場合についても、効率化の手法を示した。

本文では特異点分布法を例として議論する。

### 2. 定式化

#### (1) グリーン関数の性質

Garrison<sup>1)</sup>も示しているように、三次元浮体動揺問題のグリーン関数は、積分型・級数型として次のとおりである。

$$G \begin{pmatrix} x, y, z \\ \xi, \eta, \zeta \end{pmatrix} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + 2 P.V. \int_0^\infty \frac{(\mu + \nu) e^{-\mu h} \cosh \mu(\zeta + h)}{\mu \sinh \mu h - \nu \cosh \mu h} \cdot \cosh \mu(z + h) J_0(\mu r) d\mu + i \frac{2\pi(k^2 - \nu^2)}{h(k^2 - \nu^2) + \nu} \cdot \cosh k(\zeta + h) \cosh k(z + h) J_0(kr) \dots \dots \dots (1)$$

$$G \begin{pmatrix} x, y, z \\ \xi, \eta, \zeta \end{pmatrix} = \frac{2\pi(\nu^2 - k^2)}{h(k^2 - \nu^2) + \nu} \cosh k(\zeta + h) \cdot \cosh k(z + h) [Y_0(kr) - iJ_0(kr)] + 4 \sum_{k=1}^\infty \frac{\mu_k^2 + \nu^2}{h(\mu_k^2 + \nu^2) - \nu} \cos \mu_k(\zeta + h) \cdot \cos \mu_k(z + h) K_0(\mu_k r) \dots \dots \dots (2)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} R &\equiv \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\}^{1/2} \\ R' &\equiv \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + 2h + \zeta)^2\}^{1/2} \\ r &\equiv \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

\* 正会員 工修 (株)熊谷組技術研究所水理研究部  
(〒300-22 つくば市鬼ヶ窪下山1043)

$P, V$  : 主値積分,  $\nu = \omega^2/g$ ,  $\omega$  : 入射波角周波数,  $h$  : 水深,  $k$  : 波数, 方程式  $\mu_k \tan \mu_k h + \nu = 0$  の実数正根を  $\mu_k (k=1, 2, \dots)$ ,  $J_0, Y_0, K_0$  は第1種, 第2種, 第2種変形ベッセル関数である。座標軸は静止水面上に原点をとり, 鉛直上向きに  $z$  軸, 水平軸を  $x, y$  軸とする。

式(1)~(3)より, グリーン関数は変数  $z, \zeta, r$  のみを用いて,

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = G^*(z, \zeta, r) \dots \dots \dots (4)$$

と書ける。また, 式(4)の点  $(x, y, z)$  での浮体表面外向き法線微分を行うと,  $n_x, n_y, n_z$  を浮体表面外向き法線ベクトルとして, 次のように書ける。

$$\frac{\partial G}{\partial n} = |n_x(x-\xi) + n_y(y-\eta)| \frac{1}{r} \frac{\partial G^*}{\partial r} + n_z \frac{\partial G^*}{\partial z} \dots \dots \dots (5)$$

(2) 一軸対称性をもつ浮体

Fig. 1 のように浮体が水平軸の1つ(この場合  $y$  軸)に対し対称性をもつとき, 浮体要素分割を  $y$  軸について対称となるように行い, 第  $i$  要素内の点を  $p_i(x, y, z)$ ,  $j$  要素内の点を  $p_j(\xi, \eta, \zeta)$  とし, おおのの  $y$  軸対称要素を  $i^s, j^s$  要素, また対称位置の点を  $p_i^s(x^s, y^s, z^s)$ ,  $p_j^s(\xi^s, \eta^s, \zeta^s)$  とする。さらに, 点  $p_i, p_i^s$  での外向き法線ベクトルを,  $(n_x, n_y, n_z), (n_x^s, n_y^s, n_z^s)$  と書く。このとき

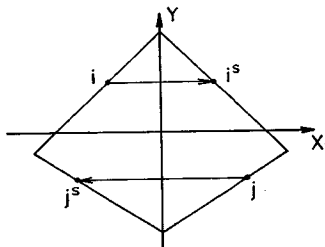


Fig. 1 Uniaxial symmetrical floating body.

$$\left. \begin{aligned} (x, y, z) &= (-x^s, y^s, z^s) \\ (n_x, n_y, n_z) &= (-n_x^s, n_y^s, n_z^s) \\ (\xi, \eta, \zeta) &= (-\xi^s, \eta^s, \zeta^s) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

が成り立ち, さらに

$$r^s = \{(x^s - \xi^s)^2 + (y^s - \eta^s)^2\}^{1/2} \dots \dots \dots (7)$$

と定義すると, 式(6)より次の関係が成り立つ。

$$r^s = \{(-x + \xi)^2 + (y - \eta)^2\}^{1/2} = r \dots \dots \dots (8)$$

点  $p_i, p_j$  間のグリーン関数を  $G_{ij}$ , この法線微分を  $\partial G_{ij}/\partial n$ , 同じく点  $p_i^s, p_j^s$  間で,  $G_{i^s j^s}, \partial G_{i^s j^s}/\partial n$  と書けば, 式(4)~(6), (8)より,

$$\begin{aligned} G_{i^s j^s} &= G^*(z^s, \zeta^s, r^s) \\ &= G^*(z, \zeta, r) = G_{ij} \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{i^s j^s}}{\partial n} &= |n_x^s(x^s - \xi^s) + n_y^s(y^s - \eta^s)| \frac{1}{r^s} \\ &\quad \cdot \frac{\partial G^*}{\partial r^s}(z^s, \zeta^s, r^s) + n_z^s \frac{\partial G^*}{\partial z^s}(z^s, \zeta^s, r^s) \\ &= |-n_x(-x + \xi) + n_y(y - \eta)| \frac{1}{r} \\ &\quad \cdot \frac{\partial G^*}{\partial r}(z, \zeta, r) + n_z \frac{\partial G^*}{\partial z}(z, \zeta, r) = \frac{\partial G_{ij}}{\partial n} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

となり, 特異点分布法でのグリーン関数の計算<sup>1)</sup>

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Delta s_j} \frac{\partial G}{\partial n}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) ds(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Delta s_j} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) ds(\xi, \eta, \zeta)$$

(ただし,  $\Delta s_j$  は第  $j$  要素の表面部分)

についても, 次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij} &= \alpha_{i^s j^s} \\ \beta_{ij} &= \beta_{i^s j^s} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

以上より, Fig. 2 に示す要素番号のふり方をすれば, 全浮体表面について  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  は次のように求まる。

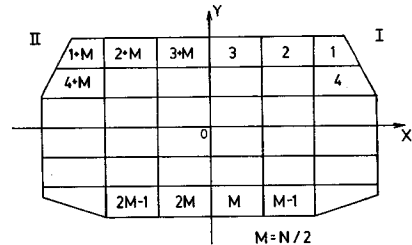


Fig. 2 Numbering for uniaxial symmetric case.

- ①  $i=1 \sim M$  かつ  $j=1 \sim 2M$  の要素間では通常の方法で  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  を計算する。
- ②  $x > 0$  の領域を I,  $x < 0$  の領域を II とすると,  $i \in \text{II}$  かつ  $j \in \text{I}$  の要素間では,  $y$  軸に対称な  $i^s, j^s$  要素 ( $i^s = i - M \in \text{I}, j^s = j + M \in \text{II}$ ) について式(11)が成立するので, ①で計算された  $\alpha_{i^s j^s}, \beta_{i^s j^s}$  をそのまま  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  とする。
- ③  $i \in \text{II}$  かつ  $j \in \text{II}$  の要素間でも, ②と同様に①で計算された  $y$  軸対称位置の  $i^s, j^s$  要素についての値を用いる。

この方法により, 対称面に斜めに波が入射する場合, グリーン関数の計算は本方法を利用しない場合の1/2で済む。

(3) 二軸対称性をもつ浮体

Fig. 3 のように浮体が  $x$  軸かつ  $y$  軸に対して対称性をもつとき, (2)で述べた軸対称位置にある  $p_i, p_j$  点間でのグリーン関数を利用する方法のほかに, 原点对称位置の  $p_i^s, p_j^s$  点間のグリーン関数を利用する。

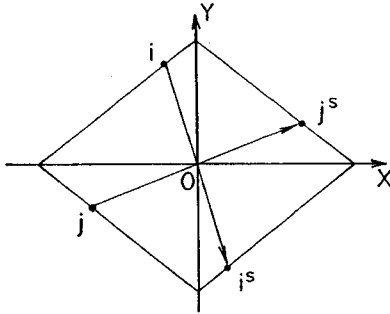


Fig. 3 Biaxial symmetrical floating body.

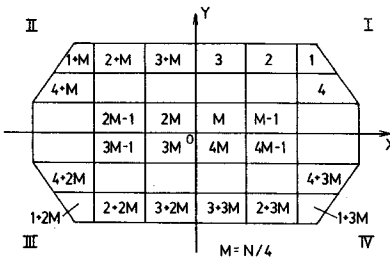


Fig. 4 Numbering for biaxial symmetric case.

この場合、(2)と同様に各諸元間には、

$$\left. \begin{aligned} (x, y, z) &= (-x^s, -y^s, z^s) \\ (n_x, n_y, n_z) &= (-n_x^s, -n_y^s, n_z^s) \\ (\xi, \eta, \zeta) &= (-\xi^s, -\eta^s, \zeta^s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

が成立するので、これより

$$\left. \begin{aligned} r &= r^s \\ n_x(x - \xi) &= n_x^s(x^s - \xi^s) \\ n_y(y - \eta) &= n_y^s(y^s - \eta^s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

が成り立つので、式(4)、(5)から式(11)がこの場合についても成立する。

Fig. 4のように、二軸対称性を考慮した要素分割および要素番号のふり方を行い、領域I~IVを、

I :  $x > 0$  かつ  $y > 0$ , II :  $x < 0$  かつ  $y > 0$

III :  $x < 0$  かつ  $y < 0$ , IV :  $x > 0$  かつ  $y < 0$

と定めるとき、 $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$ は次の方法で求まる。

- ①  $i=1 \sim M$  かつ  $j=1 \sim 4M$  ( $i \in I$  かつ  $j \in I \sim IV$ )  
では、通常の方法で  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  を計算する。
- ②  $i=M+1 \sim 2M$  かつ  $j=1 \sim 4M$  ( $i \in II$  かつ  $j \in I \sim IV$ )  
では、 $y$  軸対称位置の  $i^s, j^s$  要素間で、①で計算されている値を用いて求める。
- ③  $i=2M+1 \sim 3M$  かつ  $j=1 \sim 4M$  ( $i \in III$  かつ  $j \in I \sim IV$ )  
では、原点対称位置にある  $i^s, j^s$  要素間で、①で計算されている値を用いて求める。
- ④  $i=3M+1 \sim 4M$  かつ  $j=1 \sim 4M$  ( $i \in IV$  かつ  $j \in I \sim IV$ )  
では、 $x$  軸対称位置にある  $i^s, j^s$  要素間で、①で計算されている値を用いて求める。

以上により、グリーン関数の計算は構造物全要素間で実施する場合の1/4の時間で実施することができる。

### 3. 計算例

二軸対称性を有する浮体として円柱、箱形浮体を例にとり、既往の計算および今回新たに実施した実験と、本方法による計算結果を比較する。

#### (1) Garrison<sup>1)</sup>の円柱浮体の計算との比較

半径：吃水：水深=2：1：2の条件の円柱浮体において、Fig. 5はヒープ方向の付加質量係数  $A_{22}$  と造波減衰係数  $B_{22}$ 、Fig. 6はサージ方向の波強制力について、Garrisonによる通常の特異点分布法計算と二軸対称性を用いた本方法を比べたものである。ただし、図中の  $a, \sigma$  はおのおの円柱半径、入射波角周波数を示す。Garrisonの計算では要素分割の様子が不明だが、今回の計算では円柱周方向に12分割、深さ方向に3分割し、全体で92要素とした。

図から、両者がよく一致するのがわかる。

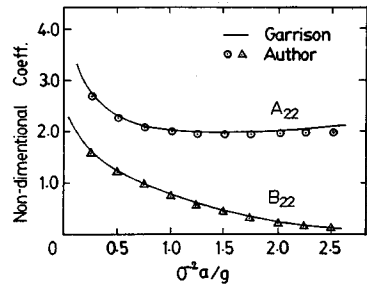


Fig. 5 Hydrodynamic coeff. of a cylinder.

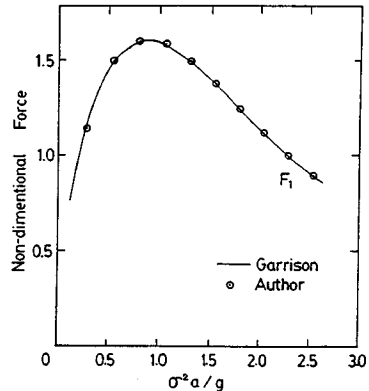


Fig. 6 Wave force on a cylinder.

Table 1 Specifications of model.

Length, L	0.750 m
Breadth, B	0.750 m
Draft, d	0.223 m
Center of gravity from bottom	0.162 m
Radius of gyration for pitch	0.266 m

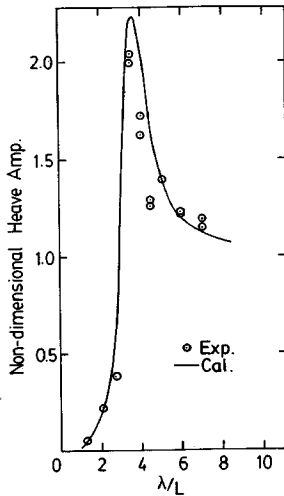


Fig. 7 Heave motion of a caisson.

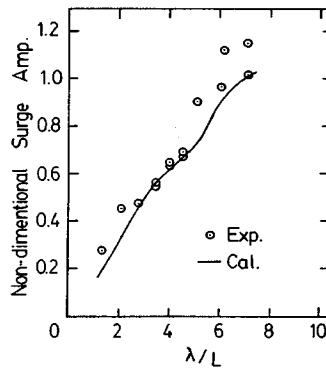


Fig. 8 Surge motion of a caisson.

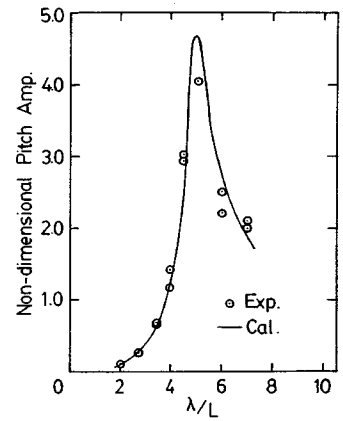


Fig. 9 Pitch motion of a caisson.

## (2) 箱形浮体動揺実験との比較

Fig. 7~9は、Table 1に示す諸元を有する箱形模型を用いた規則波中動揺実験で得られた動揺量との比較である。実験は三次元的条件下で行われ、水深は1.06 m、入射波は波高約3 cmである。模型一辺に斜めに波が入射する実験では浮体にヨー方向のドリフトが生じ、浮体への入射角が変化する場合が多かったので、ここでは模型一辺に直交方向より波を作用させた場合を示した。また、波長 $\lambda$ と模型長さ $L$ の比、 $\lambda/L$ は、1.3~8.1の範囲で変化させた。

今回は浮体動揺の共振点付近でも実験が行われたため、粘性流体力の影響が無視できないので、特異点分布法計算に加えてピッチの動揺については山下<sup>4)</sup>の方法で非線形粘性減衰項を考慮して動揺量を求めた。計算での要素分割数は48とした。Fig. 7~9では動揺量を入射波振幅 $\zeta$ 、または $h\zeta$ で無次元化した値を比較したが、これより、共振点付近では計算と実験にやや差異が生じているが、他の領域では両者はよく一致するのがわかる。

謝 辞：本文で取り上げた箱形浮体動揺実験は、

(株)熊谷組技術研究所水理研究部 井上忠春、新田良典、森田知志の各氏と協力して実施した。最後になりましたが、上記の方々に厚くお礼申し上げます。

## 参考文献

- 1) Garrison, C.J.: Hydrodynamic Loading of Large Offshore Structures: Three-Dimensional Source Distribution Methods, Numerical Methods in Offshore Engineering, Chapter 3, John Wiley & Sons, pp. 87~140, 1978.
- 2) Kioka, W.: Numerical Analysis on the Dynamic Response of Three-Dimensional, Free-Floating Structure, Proc. of JSCE, No. 326, pp. 155~165, 1982.10.
- 3) 清川哲志・大山 巧・小林 浩：グリーン関数法による任意形状浮体の動揺解析，土木学会論文報告集，第 332 号，pp. 55~65, 1983. 4.
- 4) 山下誠也・片桐徳二：浅喫水箱形浮体の横揺れに関する系統的实验結果，西部造船会会報，第 60 号，pp. 77~86, 1980.
- 5) 中村孝幸・小野正順：面対称性を有する 3 次元物体まわりの波浪ポテンシャル問題の解析法，愛媛大学工学部紀要，第 11 卷，第 3 号，pp. 383~394, 1988. 2.

(1988. 9. 8・受付)