

## 傾斜海浜上の波群の伝播変形に関する研究

## EVOLUTION OF WAVE PACKET ON MILDLY VARYING TOPOGRAPHY

間瀬 肇\*

By Hajime MASE

A set of governing equations describing the evolution of a wave packet on a mildly varying topography is derived by the method of multiple scales under the assumption that the bottom slope is the same order as the wave steepness. Some examples of wave packet transformation on a uniformly sloping beach are shown by solving the equations numerically. The results show the followings: (1) A wave packet leans forward and the amplitude becomes large due to shoaling effect. (2) When the nonlinearity of an initial wave packet is large, the propagation velocity of the wave packet is larger than the linear group velocity, and the wave packet shows asymmetrical fission. Experimental results show fairly good agreement with numerical ones in the non-breaking region.

*Keywords: nonlinear Schrödinger equation, multiple scales method, wave packet, wave group, wave shoaling, wave breaking*

## 1. 緒 言

規則波の浅水変形に関しては、数多くの理論的ならびに実験的研究が行われ、その特性がかなりわかってきている。しかし、波群の浅水変形については、現在のところあまりその特性が解明されていない。

波群や波の振幅変調を解析するための基礎式としては、非線形 Schrödinger 方程式 (NLS 方程式) や Zakharov 方程式が挙げられる。Benjamin-Feir<sup>1)</sup>が取り扱った波の変調不安定の問題は、NLS 方程式を用いて解析できる。また Zakharov 方程式を用いると、変調不安定に及ばず波の有限振幅性を検討できる<sup>2)</sup>。Mase-Iwagaki<sup>3)</sup>は、Zakharov 方程式を用いて得られる変調周期の理論値を現地風波の振幅変調の観測値と比較し、無次元水深  $k_m h$  ( $k_m$ : 平均波の波数,  $h$ : 水深) が 2.1 より大きい場合には両者がかなりよく一致することを示した。

一様水深の場合の NLS 方程式は Hasimoto-Ono<sup>4)</sup>, Davey-Stewartson<sup>5)</sup>, ならびに Mei<sup>6)</sup>によって導かれている。著者ら<sup>7), 8)</sup>は、一様水深領域における波群の伝播変形の実験結果を、粘性摩擦を考慮した NLS 方程式の

計算結果と比較し、良好な一致がみられることを示した。水深が波形勾配の 2 次のオーダー  $O(\epsilon^2)$  で変化するという very mild slope を仮定した NLS 方程式は、Djordjević-Redekopp<sup>9)</sup> や Stiassnie<sup>10)</sup> が導いている。Kirby-Dalrymple<sup>11)</sup> は、波の進行方向に  $O(\epsilon^3)$ 、波峰方向には  $O(\epsilon)$  の水深変化を仮定し、定常な場における屈折・回折を表わす NLS 方程式を求めた。一方、水深変化を  $O(\epsilon)$  と仮定した mild slope の場合は、Foda-Mei<sup>12)</sup> が短周期波からなる波群によって引き起こされる長周期波 (long-trapped wave) の振幅変化を表わす理論を導いているが、短周期波で構成される波群そのものの伝播変形を支配する方程式は求められていない。また、Chu-Mei<sup>13)</sup> は mild slope 海浜における Stokes 波理論を導いているが、最終結果はエネルギー保存式と波数の保存式の連立微分方程式で表わされており、波群の変化を表現する式としては不都合である。

本研究は、まず multiple scales 法によって mild slope 海浜に対する波群の支配方程式を誘導し、その数値計算により傾斜海浜上を伝播する単一波群の変形特性を考察する。また、すでに得られている very mild slope 海浜に対する式を用いた計算結果との比較・検討を行う。次に、水理実験によって理論の適用性ならびに振幅変調した波列における砕波について検討する。

\* 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学科  
(〒606 京都市左京区吉田本町)

2. 傾斜海浜上を伝播する波群の支配方程式と数値計算

(1) 支配方程式の誘導

非粘性、非圧縮の流体場における非回転性の波動の基礎方程式および境界条件式は次のとおりである。

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h < z < \eta \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla) |\nabla \phi|^2 = 0, \quad z = \eta \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0, \quad z = \eta \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\nabla_h \phi \cdot \nabla_h h, \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\phi$  は速度ポテンシャル、 $g$  は重力加速度、 $\eta$  は水位変動、 $h$  は水深、 $\nabla$  および  $\nabla_h$  はそれぞれ三次元および二次元の勾配ベクトルである。

波が  $x$  方向に伝播する場合を考える。スケールの異なる時空間変動を考慮するため、波形勾配  $ka$  のオーダーである微小パラメーター  $\varepsilon$  をオーダーリングのために便宜上導入し、次のような独立変数を定義する。

$$\begin{aligned} x, x_1 = \varepsilon x, x_2 = \varepsilon^2 x, \dots; y_1 = \varepsilon y, y_2 = \varepsilon^2 y, \dots; \\ z; t, t_1 = \varepsilon t, t_2 = \varepsilon^2 t, \dots \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

速度ポテンシャルおよび水位変動は次のように摂動展開する。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left[ \sum_{m=-n}^n \phi_{nm} e^{im\psi} \right] \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left[ \sum_{m=-n}^n \eta_{nm} e^{im\psi} \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\phi = \int^x k dx - \omega t \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\phi_{nm}$  および  $\eta_{nm}$  は  $x$  と  $t$  以外の独立変数の関数であり、また次の関係がある。

$$\phi_{n-m} = (\phi_{nm})^*, \quad \eta_{n-m} = (\eta_{nm})^* \quad \dots\dots\dots (9)$$

\* は共役複素数を表わす。水深  $h$  および波数  $k$  は  $x_1$  の関数とし、 $y$  方向には水深変化はないものとする。

式 (1)、式 (2) と (3) を  $z=0$  のまわりで Taylor 展開した式、および式 (4) に、式 (6) と (7) を代入して整理すると、以下の方程式が得られる。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 k^2 \right) \phi_{nm} = F_{nm}, \quad -h < z < 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\left( g \frac{\partial}{\partial z} - m^2 \omega^2 \right) \phi_{nm} = G_{nm}, \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi_{nm} = B_{nm}, \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$-g\eta_{nm} = H_{nm}, \quad z = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

右辺の強制項  $F_{nm}$ 、 $G_{nm}$ 、 $B_{nm}$  および  $H_{nm}$  の具体的な内容については、付録 A に示す。式 (10)~(13) は、 $\varepsilon$  の

次数  $n$  ごとに逐次解を求めていくことができる。

1)  $n=1$  の場合、式 (10)~(12) は斉次方程式となり、解は次のようである。

a)  $m=0$  :

$$\phi_{10} = \phi_{10}(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2, \dots) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\eta_{10} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

b)  $m=1$  :

$$\phi_{11} = -\frac{ig \operatorname{ch} Q}{2 \omega \operatorname{ch} q} A \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\eta_{11} = A/2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} q \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$A = A(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2, \dots) \quad \dots\dots\dots (19)$$

であり、 $Q = k(h+z)$ 、 $q = kh$ 、 $\operatorname{ch} q = \cosh q$ 、 $\operatorname{th} q = \tanh q$  なる省略形を用いた。以下においてはこれらのほかに  $\operatorname{sh} q = \sinh q$  を用いる。式 (16)~(18) は、微小振幅波理論の解となっている。

式 (10)~(12) において、 $n \geq 2$  の  $m=0$  と  $m=1$  の場合には nontrivial な斉次解があり、非斉次解が存在するためには次の solvability condition が満たされなければならない。

$$\frac{1}{g} G_{m0} = \int_{-h}^0 F_{m0} dz + B_{m0} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\frac{1}{g} G_{m1} = \int_{-h}^0 F_{m1} \frac{\operatorname{ch} Q}{\operatorname{ch} q} dz + \frac{B_{m1}}{\operatorname{ch} q} \quad \dots\dots\dots (21)$$

2)  $n=2$  の場合、式 (16) の  $\phi_{11}$  を式 (A.3)~(A.5) に代入することによって強制項が得られ、 $m=0, 1, 2$  に対する解が求められる。

a)  $m=0$  :

$$\phi_{20} = \phi_{20}(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2, \dots) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\eta_{20} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{k}{2 \operatorname{sh} 2q} |A|^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

b)  $m=1$  :

まず、 $F_{21}$ 、 $G_{21}$  および  $B_{21}$  を式 (21) の solvability condition に代入すると、次の関係式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left( \frac{A^2}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( C_g \frac{A^2}{\omega} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで  $C_g$  は群速度であり、この式は wave action の保存式となっている。この式は次のようにも書ける。

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{A}{2} \frac{\partial C_g}{\partial x_1} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

水平床および very mild slope の場合の式には、上式の左辺第 2 項はない。mild slope の取扱いによると、この群速度の空間変化の項により水深変化の影響が考慮される。

式 (10) および (12) を満たす  $\phi_{21}$  は次式で与えられる<sup>11)</sup>。

$$\phi_{21} = -\frac{gA}{2\omega \operatorname{ch} q} (\alpha_1 Q \operatorname{ch} Q + \alpha_2 Q \operatorname{sh} Q + \alpha_3 Q^2 \operatorname{ch} Q) \dots (26)$$

ここで、

$$\alpha_1 = h', \alpha_2 = (A/\operatorname{ch} q)' / k(A/\operatorname{ch} q), \alpha_3 = k'/2k^2 \dots (27)$$

であり、ダッシュ'は  $x_1$  による微分を示す。水平床および very mild slope の場合には、式 (26) の右辺は第 2 項だけとなる。

$$\eta_{21} \text{ は、式 (13), (16), (26) および (A.4) より}$$

$$\eta_{21} = -\frac{1}{2 \operatorname{ch} q} (\alpha_1 q \operatorname{ch} q + \alpha_2 q \operatorname{sh} q + \alpha_3 q^2 \operatorname{ch} q) iA + \frac{i}{2\omega} \frac{\partial A}{\partial t_1} \dots (28)$$

となる。

c)  $m=2$  :

$$\phi_{22} = -\frac{3\omega \operatorname{ch} 2Q}{16 \operatorname{sh}^4 q} iA^2 \dots (29)$$

$$\eta_{22} = \frac{k \operatorname{ch} q (2 \operatorname{ch}^2 q + 1)}{8 \operatorname{sh}^3 q} A^2 \dots (30)$$

3)  $n=3$  の場合、式 (16) の  $\phi_{11}$ 、式 (26) の  $\phi_{21}$  および式 (29) の  $\phi_{22}$  を式 (A.6)~(A.8) に代入することによって強制項が得られ、このオーダーにおいて長周期水位変動を表わす速度ポテンシャル  $\phi_{10}$  および包絡波形  $A$  に対する支配方程式が得られる。

a)  $m=0$  :

式 (20) の solvability condition に  $F_{30}$ 、 $G_{30}$  および  $B_{30}$  を代入すると、 $\phi_{10}$  の支配方程式が求められる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} - gh \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) \phi_{10} - g \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 (C \operatorname{coth}^2 q - C_g) \frac{\partial}{\partial x_1} (AA^*) \\ & - \frac{1}{4} \omega^2 (1 + \operatorname{coth}^2 q) \frac{\partial}{\partial t_1} (AA^*) \\ & + \omega^3 \left\{ \left( \frac{C_g}{C} \operatorname{th} q - \frac{1}{2} \operatorname{coth} q \right) \alpha_1 \right. \\ & \left. + \left( \operatorname{coth}^2 q - q \operatorname{coth} q + \frac{2C_g}{C} q \operatorname{th} q \right) \alpha_3 \right\} (AA^*) \dots (31) \end{aligned}$$

ここに、 $C$  は波速である。

b)  $m=1$  :

式 (21) の solvability condition に  $F_{31}$ 、 $G_{31}$  および  $B_{31}$  を代入すると、 $A$  の支配方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_2} - \frac{i\omega q \operatorname{coth} q}{2k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} - \frac{iC_g}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial y_1^2} \\ & + \frac{i}{2\omega} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} + \frac{i\omega k^2 (\operatorname{ch} 4q + 8 - 2 \operatorname{th}^2 q)}{16 \operatorname{sh}^4 q} |A|^2 A \\ & - \frac{iq \operatorname{th} q}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial x_1} + \left( k \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} - \frac{k^2}{2\omega \operatorname{ch}^2 q} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} \right) iA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - i \left[ q(1 - \operatorname{th}^2 q) \alpha_1 + q^2(1 - 2 \operatorname{th}^2 q) \alpha_3 \right] \frac{\partial A}{\partial t_1} \\ & - i \left[ \frac{1}{2} \{ C(\operatorname{coth} q - q) + 2qC_g \alpha_1 \right. \\ & \left. - \left\{ C(2q^2 - 3q \operatorname{coth} q - \frac{2q^3}{\operatorname{sh} 2q}) \right. \right. \\ & \left. \left. + 3(1 + q^2)C_g \right\} \alpha_3 \right] \frac{\partial A}{\partial x_1} + i(S_1 + S_2)\omega A = 0 \dots (32) \end{aligned}$$

ただし、 $S_1$  と  $S_2$  の内容については付録 B に示す。

式 (32) の  $\partial^2 A / \partial t_1^2$  と  $\partial^2 A / \partial t_1 \partial x_1$  は、式 (25) を用いて時間微分が入らないよう書き換える。式 (25) と式 (32) に  $\varepsilon$  を乗じて加え合わせた式 ( $\phi_{10}$  と  $A$  は  $x_1$  と  $t_1$  だけの関数とみなす) および式 (31) から、座標変換

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon} \int^x \frac{dX}{C_g} - t_1, X = \varepsilon x_1 \dots (33)$$

によって、以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial X} + i\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + i\beta |A|^2 A + i\mu \frac{\partial A}{\partial \xi} + i\nu A \\ & + i\rho \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi} A = 0 \dots (34) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\omega C_g} - \frac{\omega q \operatorname{ch}^2 q}{k^2 C_g^2 \operatorname{sh} 2q} + \frac{q \operatorname{sh} q}{k C_g^2 \operatorname{ch} q} \dots (35)$$

$$\beta = \frac{\omega k^2 (\operatorname{ch} 4q + 8 - 2 \operatorname{th}^2 q)}{16 C_g \operatorname{sh}^4 q} \dots (36)$$

$$\begin{aligned} \mu = & \left[ - \left\{ q \operatorname{th}^2 q + \frac{1}{2} \frac{C}{C_g} (\operatorname{coth} q - q) \right\} \alpha_1 \right. \\ & + \left\{ 4q^2 - 2q^2 \operatorname{th}^2 q + 3 + \frac{C}{C_g} \right. \\ & \left. \cdot \left( 2q^2 - 3q \operatorname{coth} q - \frac{2q^3}{\operatorname{sh} 2q} \right) \right\} \alpha_3 \\ & \left. + \left( \frac{1}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{q \operatorname{th} q}{k C_g} \right) \alpha_6 \right] / C_g \dots (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu = & \left[ \left( \frac{C_g}{4\omega} + \frac{q \operatorname{th} q}{2k} \right) \alpha_7 + \frac{1}{8\omega} \alpha_8^2 + \frac{1}{2} \{ q(1 - \operatorname{th}^2 q) \alpha_1 \right. \\ & \left. + q^2(1 - 2 \operatorname{th}^2 q) \alpha_3 \} \alpha_6 + \omega(S_1 + S_2) - \frac{i}{2} \alpha_6 \right] / C_g \dots (38) \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{k^2 (C_g + 2C \operatorname{ch}^2 q)}{2\omega C_g^2 \operatorname{ch}^2 q} \dots (39)$$

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{gh}{C_g^2} \right) \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial \xi^2} - \frac{g\alpha_1}{C_g} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi} \\ & = \left( \frac{\omega^3}{2k C_g \operatorname{th}^2 q} + \frac{\omega^2}{4 \operatorname{sh}^2 q} \right) \frac{\partial |A|^2}{\partial \xi} \\ & + \left\{ \omega^3 \left( \frac{C_g}{C} \operatorname{th} q - \frac{1}{2} \operatorname{coth} q \right) \alpha_1 \right. \\ & + \omega^3 \left( \frac{2C_g}{C} q \operatorname{th} q - q \operatorname{coth} q + \operatorname{coth}^2 q \right) \alpha_3 \\ & \left. + \frac{\omega^2}{4} (1 + \operatorname{coth}^2 q) \alpha_6 \right\} |A|^2 \dots (40) \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha_6 = C'_g$ ,  $\alpha_7 = C''_g$  である。

2次のオーダーの水位変動は、式(7), (15), (17), (23), (28), (30) および (33) から、次のようになる。

$$\eta = \frac{1}{2} \varepsilon (A e^{i\psi} + *) + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi} - \frac{k}{2 \text{sh} 2q} |A|^2 - \frac{1}{2\omega} \left( i \frac{\partial A}{\partial \xi} e^{i\psi} + * \right) - \frac{1}{2 \text{ch} q} \left\{ i \left( \alpha_1 A q \text{ch} q + \frac{q \text{sh} q}{k C_g} \frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{A g \text{sh} q}{2 k C_g} \alpha_6 - \frac{A q \text{sh}^2 q}{k \text{ch} q} q' + \alpha_3 A q^2 \text{ch} q \right) e^{i\psi} + * \right\} + \frac{k \text{ch} q (2 \text{ch}^2 q + 1)}{8 \text{sh}^2 q} (A^2 e^{2i\psi} + *) \right] \dots \dots \dots (41)$$

ここで、\*は共役複素数を表わす。パラメーター  $\varepsilon$  はオーダリングのために便宜上用いてきたが、この時点で1とおけばよい(文献6)のp.619参照)。一定水深で、かつAが一定の場合、式(41)は wave set-down を含んだ Stokes 波の第2次近似の波形を表わしている。

ここで、Djordjević-Redekopp<sup>9)</sup>の very mild slope の場合の式を示しておく。以下の式は、水深  $h$  と波数  $k$  が  $x_2$  の関数で表示されるものとして、上記と同様の手順で導かれる。式(40)に対応する式は、

$$\frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi} = S(X) - \frac{C_g \omega^2 (2 \omega \text{ch}^2 q + k C_g)}{4 k \text{sh}^2 q (gh - C_g^2)} |A|^2 \dots \dots \dots (42)$$

である。ここで、 $S(X)$  は  $X$  の任意関数であり、静水状態から始まり静水状態に終わる波群の場合  $S(X) = 0$  となる。包絡波形  $A$  については、次のようである。

$$\frac{\partial A}{\partial X} + i \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + i \beta_0 |A|^2 A + \nu_0 A = 0 \dots \dots \dots (43)$$

$$\beta_0 = \frac{\omega k^2 (\text{ch} 4q + 8 - 2 \text{th}^2 q)}{16 C_g \text{sh}^4 q} - \frac{\omega (2 \omega \text{ch}^2 q + k C_g)^2}{2 C_g \text{sh}^2 2q (gh - C_g^2)} \dots \dots \dots (44)$$

$$\nu_0 = \frac{(1 - \text{th}^2 q)(1 - q \text{th} q)}{\text{th} q + q(1 - \text{th}^2 q)} \frac{\partial q}{\partial X} \dots \dots \dots (45)$$

2次のオーダーの水位変動は次式で表わされる。

$$\eta = \frac{1}{2} (A e^{i\psi} + *) + \left\{ \frac{C_g (2 \omega \text{ch}^2 q + k C_g)}{2 \text{sh} 2q (C_g^2 - gh)} - \frac{k}{2 \text{sh} 2q} \right\} |A|^2 - \left( \frac{1}{2\omega} + \frac{q \text{sh} q}{2 k C_g \text{ch} q} \right) \left( i \frac{\partial A}{\partial \xi} e^{i\psi} + * \right) + \frac{k \text{ch} q (2 \text{ch}^2 q + 1)}{8 \text{sh}^2 q} (A^2 e^{2i\psi} + *) \dots \dots \dots (46)$$

上式は、式(41)における  $\partial \phi_{10} / \partial \xi$  の項を式(42)を用いて書き換え、 $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_6$  および  $q'$  を含む項を省略した形になっている。Djordjević-Redekopp<sup>9)</sup>の論文には式(46)は記載されていない。

(2) 傾斜海浜上の単一波群の伝播変形計算

数値計算には、Crank-Nicolson 型の差分式を用いた<sup>6)</sup>。式(34)と(40)の連立微分方程式の計算にあたっては、

まず包絡波形  $A$  を初期条件として与え、式(40)から  $\phi_{10}$  を計算し、その  $\phi_{10}$  を用いて次の地点の  $A$  を式(34)で計算する、という手順を繰り返した。式(43)の場合には、 $A$  は  $\phi_{10}$  と coupling していないので  $\phi_{10}$  を計算する手順が省略できる。

包絡波形の初期条件としては、次のものを用いた。

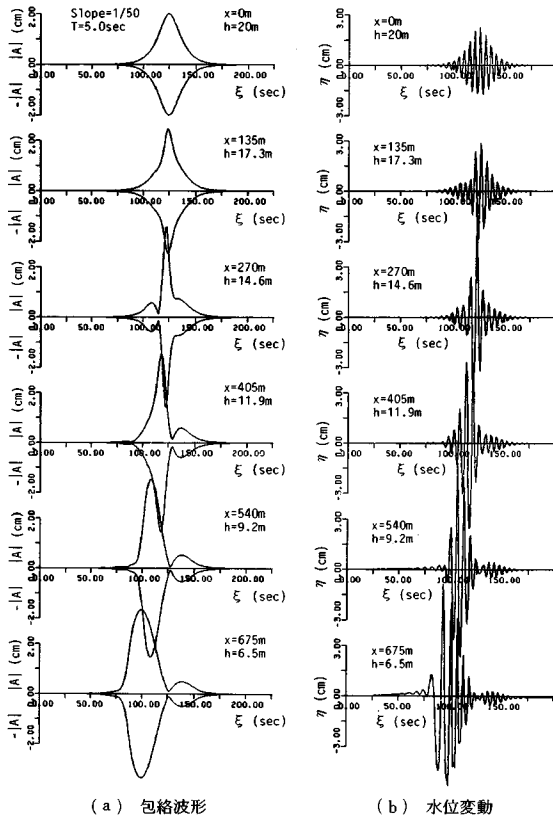
$$A = \gamma a \text{sech} \{ (\beta_0 / 2 a)^{1/2} a \xi \} \exp(i \beta_0 a^2 X / 2) \dots \dots \dots (47)$$

ここで、 $a$  は振幅、 $\gamma$  は振幅増幅係数である。 $\gamma = 1$  のとき、上式は水平床に対する式(式(43)において  $\nu_0 = 0$  の場合)の安定解である包絡ソリトンを表わす。包絡ソリトンは分散性と非線形性がつり合って形成される。

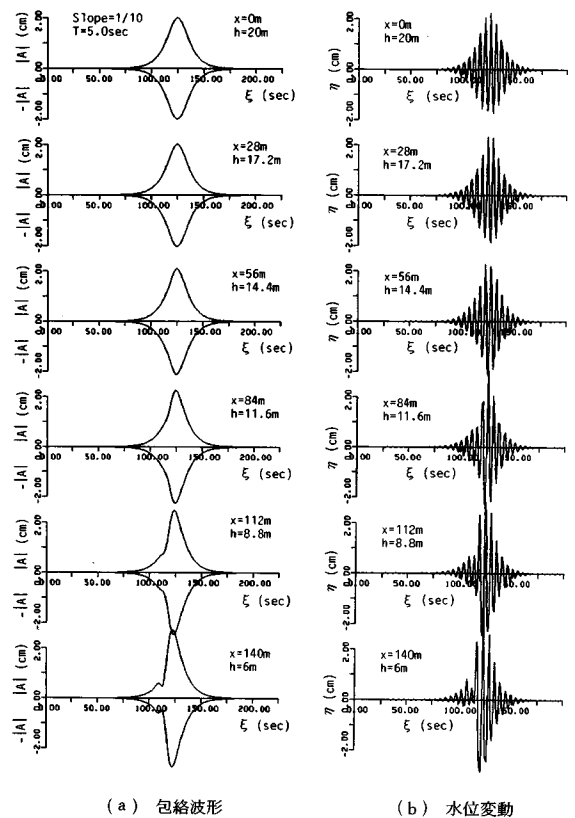
振幅  $a$  は 1 m と一定にし、搬送波の周期は 5 s と 6 s の2通りとした。式(47)の振幅増幅係数  $\gamma$  については 1.0, 2.0, 0.5 の3種類とした。海浜は一樣勾配傾斜海浜を対象とし、その勾配は 1/50 と 1/10 の2種類とした。

図-1は、包絡ソリトンの振幅を2倍にした非線形性の強い初期波群が、海底勾配 1/50 の傾斜海浜を伝播するときの変形過程の計算結果であり、図の(a)は包絡波形、(b)は水位変動を示している。用いた式は、mild slope の式(34), (40) および (41) である。この図において、前後非対称な波群の分裂がみられるのが特徴的である。また、shoaling 効果により包絡波形の振幅は増加している((b)図では縦軸のスケールが(a)図のそれと異なる点に注意する)。図-2は、図-1と同じ初期波群が、1/10の一樣傾斜海浜を伝播する場合の計算結果である。波群は、伝播するにつれ包絡波形が前傾化するとともに、その振幅は増加する。図-1と2に共通していえることは、波群の伝播に伴って、包絡波形の重心位置が  $\xi$  軸上の前方に徐々に移動することである。すなわち、波群の伝播速度は、線形理論による群速度より早くなる。この傾向は、非線形効果の大きい場合に顕著である。水位変動は、式(41)の2倍調和成分のために上下非対称となる。

図-3と4には very mild slope の式(43)および(46)を用いた計算結果を示す。これらは、それぞれ図-1と2に対応するものである。図-3の海底勾配 1/50 の場合、前後対称な波群の分裂と再帰現象がみられる。図-4の海底勾配 1/10 の場合には波群はあまり変形しない。両図においては、包絡波形の重心の位置は変化せず、また包絡波形の計算結果は常に前後対称形である。座標軸  $\xi$  に対する対称性は式(43)の形からも明らかである。図-3と4においては、水位変動の上下非対称性は顕著でない。これは、式(46)の右辺第2項の分母の  $(C_g^2 - gh)$  が小さくなるため wave set-down が大きくなり、2倍調和成分による波の尖り分がキャンセルされること



図一 1/50 傾斜海浜上の波群の伝播変形 (Mild Slope 方程式を用いた場合)



図二 1/10 傾斜海浜上の波群の伝播変形 (Mild Slope 方程式を用いた場合)

による。

図一～四に例示した周期 5 s, 振幅増幅係数 2.0 のケース以外の数値計算結果も併せて吟味した結果, 次のことがまとめられる. mild slope の式を用いると, 1) 波群は伝播に伴って徐々に前傾すること, 2) 水深の減少につれ包絡波形の振幅は増加すること (ただし, 波群の非線形性が相対的に小さく海底勾配が緩やかな場合には, 水深の減少とともに包絡波形の振幅が若干減少することがある), 3) 非線形性が強い場合には前後非対称の波群の分裂がみられること, および 4) 波群の伝播速度は線形理論による群速度よりも大きくなることがわかった. very mild slope の式を用いた計算結果では, 包絡波形の前傾化や振幅の増加といった shoaling 効果は現われない。

水深変化の程度に応じ very mild slope あるいは mild slope と場合分けしているが, 正確には, その差異は「式の誘導に際し, 水深変化の影響を  $\epsilon$  の何次のオーダーとみなすか」という点にある. 水深変化の影響は, very mild slope の場合には  $O(\epsilon^3)$  の時点で, mild slope の場合には  $O(\epsilon^2)$  から考慮される. mild slope の式は比

較的急な海底勾配に対してだけでなく, 緩やかな海底勾配の場合にも適用可能である. すなわち, 海底勾配が非常に緩やかであるという影響は, 式 (34)~(41) の係数に含まれる空間変化に関する微分項が小さくなるという形で考慮できる. 逆に, very mild slope の式は海底勾配が比較的急な場合には適用できない. なぜなら, 海底勾配が急であれば, たとえば式 (25) にみられる群速度の場所的变化といった項が必要となるが, 式の中に含まれていないからである。

(3) 粘性摩擦項の導入

(1) の理論では, 海底面, 実験水槽においては底面および側壁における摩擦の影響は考慮されていない. 実験結果と計算結果を比較する場合, 実験結果から摩擦減衰の影響を除去するか, 理論式に摩擦減衰項を考慮する必要がある. 本研究では, Liu<sup>(4)</sup>および間瀬ら<sup>(8)</sup>に従って, 理論式に粘性摩擦項を導入する。

$$\text{粘性摩擦項} = (1 - i)(1 + 1/\psi_b)\epsilon_b A/L \dots\dots\dots (48)$$

$$\epsilon_b = 4 \pi^2 / \sqrt{\omega/2} \nu_w L \{ \text{sh } 2q + 2q \} \dots\dots\dots (49)$$

$$\psi_b = kB / \text{sh } 2q \dots\dots\dots (50)$$

ここで,  $L$  は搬送波の波長,  $\nu_w$  は動粘性係数,  $B$  は水

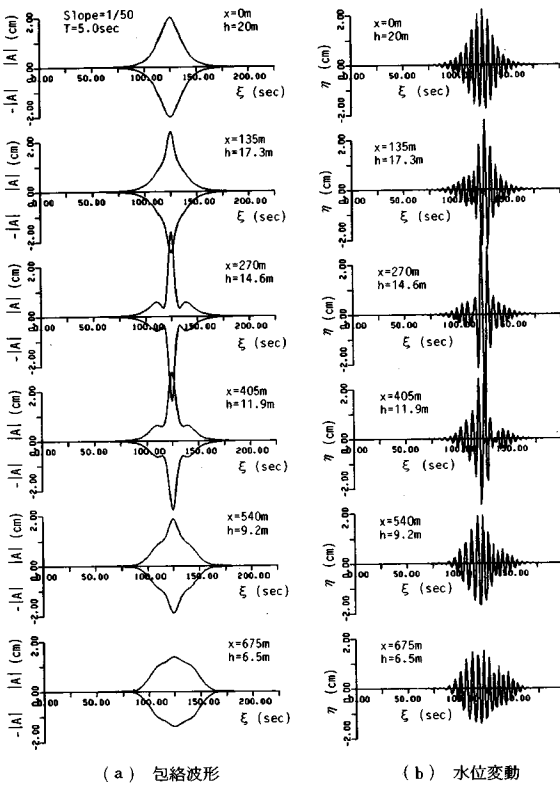


図-3 1/50 傾斜海浜上の波群の伝播変形 (Very Mild Slope 方程式を用いた場合)

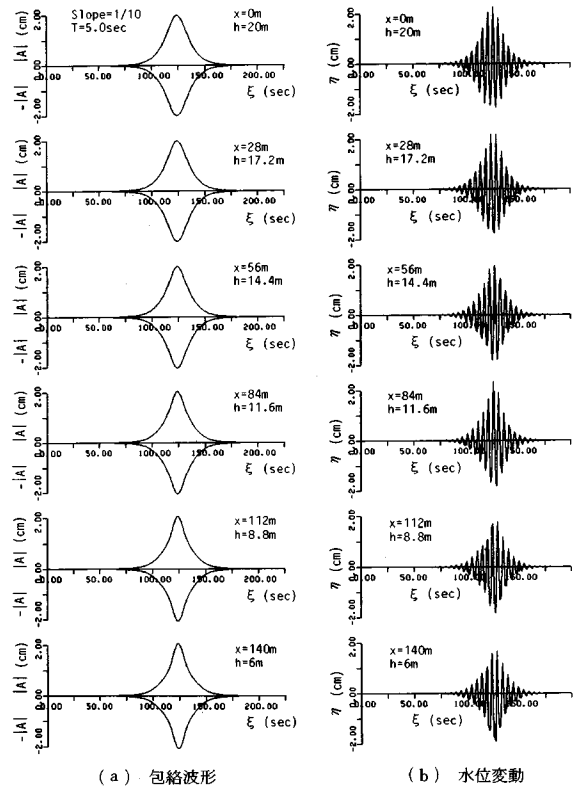


図-4 1/10 傾斜海浜上の波群の伝播変形 (Very Mild Slope 方程式を用いた場合)

槽幅である。この粘性摩擦項を、式 (34) あるいは (43) の左辺に加えることとする。

3. 一様傾斜海浜上の単一波群の伝播変形に関する実験結果と計算結果の比較・検討

(1) 実験装置および実験方法

実験は、長さ 27 m、幅 50 cm および深さ 75 cm の両面ガラス張り水槽で実施した。この水槽の一端には不規則波発生装置が設置されている。模型海浜は造波板から 10 m 離れた地点から設置し、その勾配は 1/20 とした。一様水深部の水深は 50 cm とした。

実験に用いた波群は、式 (47) で表わされる包絡波形をもつようにしたものである。搬送波の周波数、振幅および振幅増幅係数は表-1 のようにし、全部で 20 ケースの実験を行った。

水位変動は、6 台の容量式波高計を用いて測定した。波高計は、斜面のり先部から 50 cm 造波板よりの水深 50 cm の地点と、斜面上の水深 40, 30, 20, 10 および 5 cm の地点に設置した。これらを順に W-1~6 とする。W-6 の地点ではすべての実験ケースで砕波がみられ、W-5 では実験ケースによっては砕波する波があった。

そこで、W-5 前後の地点をビデオ撮影しておき、後に波が砕波しているかどうかを判別した。

(2) 実験結果と計算結果の比較・検討

図-5(a) は実験結果の一例である。測定点 W-5 になると水位変動の上下非対称性が著しくなっており、波高も増大している。その後、W-6 の地点に達する間に波高の大きな波が砕波し、W-6 の水位変動にみられるような 2 つの波高のピークをもつ波群となる。図-5(b) は、mild slope の式を用いた場合の対応する計算結果を示したものである。波が砕波している W-6 の地点を除けば両者の対応は良好である。計算結果における粘性摩擦項の影響は W-4 の地点から有意となってくる。

図-5 のような実験結果と計算結果の比較では、その一致の程度の判定が主観的になるので、波群を構成する波の波高の代表量を取り上げ、両者の比較を行う。比較の対象とする波高の代表量はいくつか考えられるが、こ

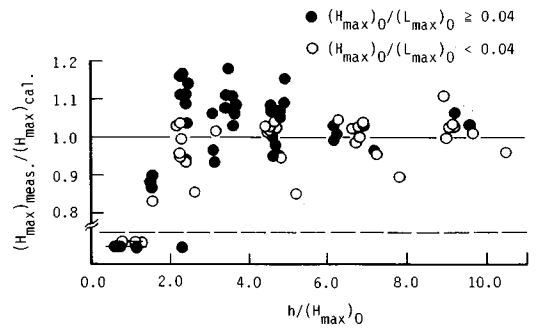
表-1 実験に用いた初期波群の条件

搬送波の周波数 f (Hz)	振幅 a (cm)	振幅増幅係数 γ
0.9, 1.0, 1.1, 1.2	2.0	1.0, 2.0
	3.0	1.0, 4/3, 2/3

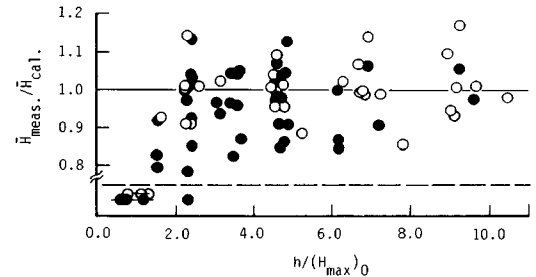
ここでは最大波高  $H_{max}$  と平均波高  $\bar{H}$  を用いる。W-1の地点における波の諸量を用いて換算した沖での値は ( ) のように表わす。

図-6(a), (b) は、それぞれ最大波高と平均波高について、横軸に水深波高比  $h/(H_{max})_0$  をとり、縦軸に実験値と計算値の比を、波形勾配  $(H_{max})_0/(L_{max})_0$  の大小に分けてプロットしたものである。実験値と計算値の比が0.7以下の場合（この場合砕波が生じていた）、図中の破線より下にプロットした。数個の点が重なる場合は横線をいれて  $\ominus \bullet$  としてある。  $2 < h/(H_{max})_0 < 5$  の範囲では、波形勾配が大きいケースの方が最大波高比が大きくなる傾向がみられる。平均波高比については、波形勾配の影響は定かでない。両図から、砕波している場合を除くと、実験値と計算値の差は約20%以内であることがわかる。

図-6においては、波群を構成する波の砕波についての情報はあいまいなので、図-7では、横軸に  $(H_{max})_0/(L_{max})_0$ 、縦軸に  $h/(H_{max})_0$  をとって、砕波が生じていない場合を○印、砕波が生じた場合を●印でプロットした。図中の破線は、合田<sup>15)</sup>による海底勾配が

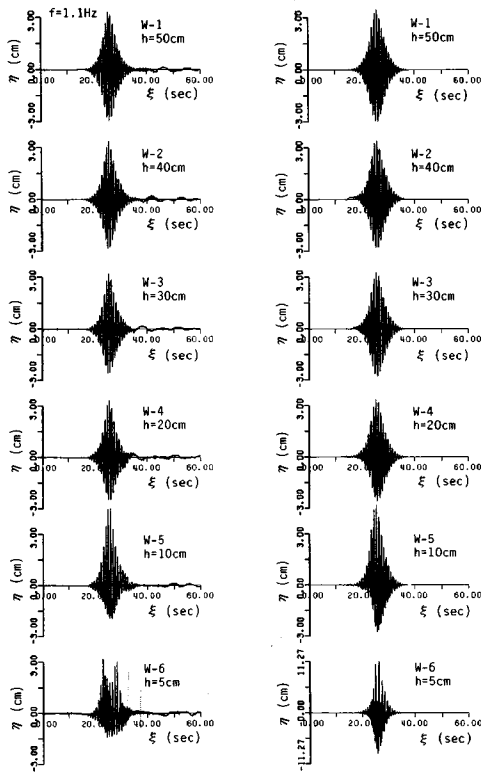


(a) 最大波高



(b) 平均波高

図-6 最大波高および平均波高に関する実験結果と計算結果の比較



(a) 実験結果

(b) 計算結果

図-5 1/20 傾斜海浜を伝播する波群の変形に関する実験結果と計算結果

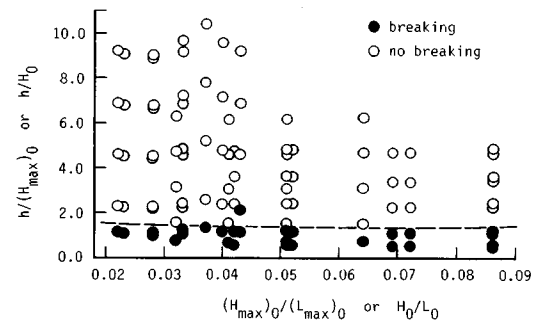


図-7 砕波の有無

1/20の規則波の砕波水深を表わす曲線である。この図をみると、ただ1つのケースを除いて、規則波の砕波限界曲線が振幅変調した波列における砕波の有無を表わしているといえる。

#### 4. 結 言

本研究は、multiple scales法によって mild slope 海浜に対する波群の支配方程式を誘導し、数値計算により単一波群の伝播変形特性を考察した。また、very mild slope 海浜の仮定から得られる式を用いた計算結果との比較を行った。次に、水理実験によって理論の適用性を検討した。

主要な結果として、mild slope の式を用いた計算結果

から、波群は傾斜海浜を岸に向かって伝播するにつれて前傾すること、同時に包絡波形の振幅が増加すること、波群の非線形性が強い場合には前後非対称の波群の分裂がみられること、波群の伝播速度は線形理論による群速度よりも大きくなることがわかった。一方、very mild slope の式では、包絡波形の前傾化、振幅増加、波の上下非対称性を表わせないことがわかった。

実験結果と mild slope 海浜に対する式を用いた計算結果との比較から、砕波が生じない領域では両者の差は約 20 % 以内であること、および波群に含まれる波の砕波の有無の推定には規則波の砕波限界曲線が使えることがわかった。

本研究を行うにあたり、種々のご教示、ご助言を頂いた名城大学理工学部 岩垣雄一教授(京都大学名誉教授)、京都大学防災研究所 土屋義人教授に深く感謝致します。理論式の誘導に際しては当時大学院修士課程の松元和伸君(現・飛鳥建設)、水理実験に際しては当時学部学生坂本真也君(現・川崎製鉄)のご協力を頂き、謝意を表します。また、本研究は文部省科学研究費奨励研究(A)(No.62750493)および総合研究(A)(No.62302045, 代表者:土屋義人教授)による研究の一部であることを付記して謝意を表します。

付録A  $F_{nm}, G_{nm}, B_{nm}, H_{nm}$

1)  $n=1$

a)  $m=0$

$$F_{10}=G_{10}=B_{10}=H_{10}=0 \dots\dots\dots (A.1)$$

b)  $m=1$

$$F_{11}=G_{11}=B_{11}=0, H_{11}=-i\omega\phi_{11} \dots\dots\dots (A.2)$$

2)  $n=2$

a)  $m=0$

$$\left. \begin{aligned} F_{20}=G_{20}=B_{20}=0, \\ H_{20}=\phi_{10,\delta_1}+k^2\phi_{11}\phi_{1,-1}+\phi_{11,z}\phi_{1,-1,z} \\ -\frac{\omega^2}{g}(\phi_{11}\phi_{1,-1,z}+*) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.3)$$

b)  $m=1$

$$\left. \begin{aligned} F_{21}=-i(k\phi_{11})_{x_1}-ik\phi_{11,x_1}, \\ G_{21}=2i\omega\phi_{11,\delta_1}, \\ B_{21}=-ik\phi_{11}h_{x_1}, \\ H_{21}=-i\omega\phi_{21}+\phi_{11,\delta_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.4)$$

c)  $m=2$

$$\left. \begin{aligned} F_{22}=B_{22}=0, \\ G_{22}=-\frac{i\omega}{g}\phi_{11}(g\phi_{11,zz}-\omega^2\phi_{11,z}) \\ +2i\omega k^2\phi_{11}^2+2i\omega\phi_{11,z}^2, \\ H_{22}=-2i\omega\phi_{22}-\frac{1}{2}(k^2\phi_{11}^2-\phi_{11,z}^2)+\frac{\omega^2}{g}\phi_{11}\phi_{11,z} \end{aligned} \right\}$$

..... (A.5)

3)  $n=3$

a)  $m=0$

$$\left. \begin{aligned} F_{30}=-\phi_{10,x_1x_1}-\phi_{10,\delta_1\delta_1}, \\ G_{30}=\left\{ \left( i\omega\phi_{2,-1}\phi_{11,zz}-\frac{i\omega^3}{g}\phi_{2,-1}\phi_{11,z} \right. \right. \\ \left. \left. +\phi_{1,-1,\delta_1}\phi_{11,zz}-\frac{\omega^2}{g}\phi_{1,-1,\delta_1}\phi_{11,z} \right. \right. \\ \left. \left. +i\omega\phi_{1,-1}\phi_{21,zz}-\frac{i\omega^3}{g}\phi_{1,-1}\phi_{21,z} \right. \right. \\ \left. \left. -2\phi_{1,-1,z}\phi_{11,z\delta_1}-2k\omega\phi_{1,-1,x_1}\phi_{11} \right. \right. \\ \left. \left. -2k^2\phi_{1,-1}\phi_{11,\delta_1}+2k\omega\phi_{1,-1}\phi_{11,x_1} \right. \right. \\ \left. \left. +\frac{2\omega^2}{g}\phi_{1,-1}\phi_{11,z\delta_1} \right) +* \right\} -\phi_{10,\delta_1\delta_1}, \\ B_{30}=-\phi_{10,x_1}h_{x_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.6)$$

b)  $m=1$

$$\left. \begin{aligned} F_{31}=-\{\phi_{11,x_1x_1}+\phi_{11,\delta_1\delta_1}+i(k\phi_{21})_{x_1}+ik\phi_{21,x_1} \\ +2ik\phi_{11,x_1}\}, \\ G_{31}=-2i\omega\phi_{22}\phi_{1,-1,zz}+\frac{2i\omega^3}{g}\phi_{22}\phi_{1,-1,z} \\ -\left(\frac{k^2}{2}+\frac{\omega^4}{2g^2}\right)\phi_{11}^2\phi_{1,-1,zz} \\ +\left(k^2+\frac{\omega^4}{g^2}\right)\phi_{11}\phi_{1,-1}\phi_{11,zz}+\frac{k^2\omega^2}{2g}\phi_{11}^2\phi_{1,-1,z} \\ -\frac{5k^2\omega^2}{g}\phi_{11}\phi_{1,-1}\phi_{11,z}-\frac{1}{2}\phi_{11,z}^2\phi_{1,-1,zz} \\ -\phi_{11,z}\phi_{1,-1,z}\phi_{11,zz}-\frac{\omega^2}{g}\phi_{11,z}^2\phi_{1,-1,z} \\ +\frac{3\omega^2}{g}\phi_{1,-1}\phi_{11,z}\phi_{11,zz}+\left(\frac{\omega^4}{g^2}-k^2\right)\phi_{1,-1}\phi_{11,z}^2 \\ -\frac{\omega^2}{g}\phi_{11}\phi_{1,-1,z}\phi_{11,zz}+\frac{\omega^2}{g}\phi_{11}\phi_{11,z}\phi_{1,-1,zz} \\ +i\omega\phi_{1,-1}\phi_{22,zz}-\frac{4i\omega^3}{g}\phi_{1,-1}\phi_{22,z} \\ +\frac{\omega^2}{g}\phi_{11}^2\phi_{1,-1,zzz}+\frac{\omega^2}{g}\phi_{11}\phi_{1,-1}\phi_{11,zzz} \\ +4i\omega k^2\phi_{1,-1}\phi_{22}+2i\omega\phi_{1,-1,z}\phi_{22,z} \\ +k^4\phi_{1,-1}\phi_{11}^2-k^2\phi_{1,-1}\phi_{11,z}^2+\phi_{10,\delta_1}\phi_{11,zz} \\ -\frac{\omega^2}{g}\phi_{10,\delta_1}\phi_{11,z}+2i\omega\phi_{21,\delta_1}+2i\omega\phi_{11,\delta_2} \\ -2k\omega\phi_{10,x_1}\phi_{11}-\phi_{11,\delta_1\delta_1}, \\ B_{31}=-\{ik\phi_{21}+\phi_{11,x_1}\}h_{x_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.7)$$

式中“ $x_1$ ”や“ $z,z$ ”等の表記は、変数  $x_1$  に関する 1 回微分、 $z$  に関する 2 回微分を意味する。



付録 B  $S_1, S_2$

$$\begin{aligned}
 S_1 = & -\frac{3}{4} \left( 1 + \frac{2q}{\text{sh } 2q} \right) \alpha_1^2 \\
 & -\frac{1}{4} \left( \coth 2q - \frac{1}{\text{sh } 2q} \right) (4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_4) \\
 & -\frac{1}{8} \left( 2q - \coth 2q + \frac{1+2q^2}{\text{sh } 2q} \right) (4\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_4) \\
 & -\frac{1}{8} (2q \coth 2q - 1) (2\alpha_1^2 + 2\alpha_3) \\
 & +\frac{1}{8} \left( 2q^2 - 2q \coth 2q + 1 + \frac{4q^3}{3 \text{sh } 2q} \right) (2\alpha_5 + 6\alpha_3^2) \\
 & -\frac{3}{4} \left\{ (1+2q^2) \coth 2q - 2q - \frac{1}{\text{sh } 2q} \right\} \alpha_1\alpha_3 \\
 & -\frac{1}{4} \{ (4q^3 + 6q) \coth 2q - (6q^3 + 3) \} \alpha_3^2 \\
 & \dots\dots\dots (B \cdot 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 = & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2q}{\text{sh } 2q} \right) (1 + q \text{th } q) \alpha_1^2 \\
 & + \{ 2q^2(3 + q \coth q - 2q \text{th } q) \\
 & - 3q(1 + q^2) \text{th } q \left( 1 + \frac{2q}{\text{sh } 2q} \right) + \frac{2q^4 \text{th } q}{\text{sh } 2q} \} \alpha_3^2 \\
 & + \{ q(6 + 2q \coth q - 3q \text{th } q) \\
 & - \frac{1}{2} (3 + q^2) \left( 1 + \frac{2q}{\text{sh } 2q} \right) \text{th } q \\
 & + \frac{2q^3 \text{th } q}{\text{sh } 2q} \} \alpha_1\alpha_3 + \frac{q}{2} \alpha_4 + q^2 \alpha_5 \dots\dots\dots (B \cdot 2)
 \end{aligned}$$

$$\alpha_4 = h''/k, \quad \alpha_5 = k''/2k^3 \dots\dots\dots (B \cdot 3)$$

ここで, " は 2 回微分を表わす.

参 考 文 献

- 1) Benjamin, T.B. and Feir, J.E. : The disintegration of wave trains on deep water, Part. 1 Theory, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 417~430, 1967.
- 2) Crawford, D.R., Lake, B.M., Saffman, P.G. and Yuen, H.C. : Stability of weakly nonlinear deep water waves in two and three dimensions, Jour. Fluid Mech., Vol. 105, pp. 177~191, 1981.

- 3) Mase, H. and Iwagaki, Y. : Wave group analysis of natural wind waves based on modulational instability theory, Coastal Eng., Vol. 10, No. 4, pp. 341~354, 1986.
- 4) Hasimoto, H. and Ono, H. : Nonlinear modulation of gravity waves, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 33, No. 3, pp. 805~811, 1972.
- 5) Davey, A. and Stewartson, K. : On three-dimensional packets of surface waves, Proc. Roy. Soc. Lond. A 338, pp. 101~110, 1974.
- 6) Mei, C.C. : The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, Wiley-Interscience, Chapter 12, 1983.
- 7) 間瀬 肇・古室健史・岩垣雄一 : 単一波群の非線形伝播変形とうねりの波群構造, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp. 189~193, 1985.
- 8) 間瀬 肇・松元和伸・岩垣雄一 : 波群の伝播変形に及ぼす粘性摩擦の効果, 第 34 回海岸工学講演会論文集, pp. 147~151, 1987.
- 9) Djordjević, V.D. and Redekopp, L.G. : On the development of packets of surface gravity waves moving over an uneven bottom, Jour. Appl. Math. Phys. (ZAMP), Vol. 29, pp. 950~962, 1978.
- 10) Stiassnie, M. : Derivation of the nonlinear Schrödinger equation for shoaling wave-groups, Jour. Appl. Math. Phys. (ZAMP), Vol. 34, pp. 534~544, 1983.
- 11) Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. : A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of Stokes waves by mildly varying topography, Jour. Fluid Mech., Vol. 136, pp. 453~466, 1983.
- 12) Foda, M.A. and Mei, C.C. : Nonlinear excitation of long-trapped waves by a group of short swells, Jour. Fluid Mech., Vol. 111, pp. 319~345, 1981.
- 13) Chu, V.H. and Mei, C.C. : On slowly-varying Stokes waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 41, pp. 873~887, 1970.
- 14) Liu, P.L.-F. : Viscous effects on evolution of Stokes waves, Jour. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 112, No. 1, pp. 55~63, 1986.
- 15) 合田良実 : 砕波指標の整理について, 土木学会論文報告集, 第 180 号, pp. 39~49, 1970.

(1988. 6. 6・受付)