

不均質場における降雨時の不圧地下水水位の確率応答特性

STOCHASTIC ANALYSIS OF UNCONFINED GROUNDWATER BEHAVIOR
DUE TO RAINFALL IN HETEROGENEOUS REGION

高木不折*・原田守博**

By Fusetsu TAKAGI and Morihiro HARADA

This study is directed toward stochastic evaluation of the uncertainty of unconfined groundwater behavior in the heterogeneous region due to a heavy rainfall. The evaluation of hydraulic-head variance which expresses statistically the randomness of the head field is made based on physical laws. The statistical characteristics of the recharge flux to aquifer is analyzed with help of the unsaturated flow theory. Through the present paper, it has been clarified how the head variance depends on both flow properties in the unsaturated zone and in the aquifer, and the fact that the head field has greater variance of its spatial distribution in the silty aquifer than in the sandy aquifer is also demonstrated.

Keywords: unconfined groundwater, heterogeneous region, head variance, unsaturated flow

1. 序 論

わが国では、不圧地下水は沖積平野や洪積台地・丘陵地において浅層部に存在し、降水・河川水・灌漑水などによって涵養される、なかでも、降雨による涵養に対して、地下水水位は一雨ごとに明瞭な応答を示す場合が多い^{1),2)}。一方、火山性地質の台地では、地下水は不圧状態のまま深層部に位置することが多く、地中に浸透した雨水は Deep Percolation となって供給されるため、一雨ごとの水位応答はみられない^{3),4)}。しかし、これは全国的にみれば特殊なケースであって、一般的には不圧地下水の水面深度は 10 m 未満であるといえる。

浅層部の不圧地下水について現地観測を行うと、通常、降雨に対する水位の変動は時間的に総じて早く、その遅れ時間は数時間から遅くても 1 日程度であることがわかる。また、多地点での観測データにより、降雨に対する水位変動の様子は観測井によって大きく異なることが知られている。すなわち、同一の降雨に対しても、隣接した地点でありながら大きく上昇する井戸とさほど変動しない井戸とが存在する。こうした水位応答の場所的ばらつきは、

流れの場の不均質性に基づく不確定な現象ととらえることができる。このことは地点観測データから広域の地下水状態を判断しようとする場合きわめて重要な問題となる。広域地下水シミュレーションを例にとれば、モデルパラメーターの同定や解析結果の検証に際して、観測水位データに上述のような不確定な成分が含まれていることは、決定論的解析を進め得るか否かをも左右するといえる。著者らは先に、降雨後の地下水水位の分布が無降雨期間に平準化する過程について統計的な検討を行い、観測水位データの空間的代表性や工学的な価値といった事柄を考察してきた^{5),6)}。本研究は、現象的にはその前段に位置するものであり、降雨により水位分布が乱される過程の統計的特性に焦点を当てている。無降雨期の水位の平準化過程が数週間に及ぶ日単位の現象であるのに対し、ここで問題とする降雨による水位の応答過程は、前述のように数時間から 1 日程度の時間スケールをもった現象である。

さて、降雨に対する地下水応答の場所的ばらつきについて、大きく分けて 2 つの点が注目される。1 つは、水位応答のばらつきの原因はどこにあるのか？ということであり、もう 1 つは、ばらつきの大きさはどの程度か？ということである。前者は、雨水が地中に浸透して地下水涵養が生じ水位が上昇する過程において、どの要素の

* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科
(〒464-01 名古屋市千種区不老町)

** 正会員 工修 名古屋大学助手 工学部土木工学科(同上)

変動が現象のばらつきに効いているかという疑問であって、物理機構に関する分析的な検討を必要とする。一方、後者は、実際に生ずるばらつきが降雨によって、あるいは地質の種類によってどう異なるのか、そしてその大きさは工学的にどのような意味をもつのかといった問題に言い換えることができる。本研究は、実際の帯水層の水理特性と地下水位変動の詳細な観測・調査を踏まえ、不均質な流れ場における地下水涵養とそれによる水位応答の統計的特性について、雨水浸透と地下水流の物理則を基礎とした解析を行い、これらの疑問に答えようとするものである。

2. 現地における不圧地下水挙動の実態

観測の対象地域は、濃尾平野北東部に位置する面積約30 km²の平坦な台地である (図-1 参照)。浅層の地質は小牧礫層を中心とした洪積層からなり、地質学的にはおおむね同じ地質と考えられる。地下水観測井は、図中に示すように67本配置されている。これらの井戸は内径10 cm、深度20 mという同一基準で新設されたもので、日記水位計により不圧地下水位が1時間ごとに計測されている。

(1) 降雨に対する地下水位の応答

当地域では1983年9月末に日雨量が100 mmを越す集中豪雨が観測された。図-2はそのときの地下水位の変動を、5本の井戸 (図-1 参照) について示したものである。図によれば、水位の立ち上がり時刻やピーク時刻は井戸間でほぼ同一であり、降雨に対する水位応答は各井戸で一斉に生じているといえるが、その水位の変動幅は井戸によってかなり異なっていることがわかる。

図-3は、当該降雨の直前における地表から地下水面までの深度と水位の最大上昇量を、すべての井戸についてプロットしたものである。図中の破線は、両者が等しい、すなわち降雨によって地下水位が地表にまで上昇した場合を意味している。同図によると、地下水面深度と水位上昇量はどちらも数十 cmの井戸から数 mに及ぶ井戸まで場所によって大きな開きがあって、両者の間に明瞭な関係はみられない。特に、水面深度が2~5 mの地点では、水位上昇量は水面深度に関係なくまちまちな値となっている。

(2) 流れ場の水理特性の統計的特性

観測井の設置時には、孔内注水による現場透水試験が実施され、地盤の透水係数が測られた。図-4はその結果を対数確率紙にプロットしたものである。この図によれば、地質学的には同一と考えられる領域でも透水係数は場所によって数オーダーの幅をもって変動し、全体としては対数正規分布に近い傾向が認められる。こうした透水性の対数正規分布は Freeze⁷⁾ほか多くの研究者に

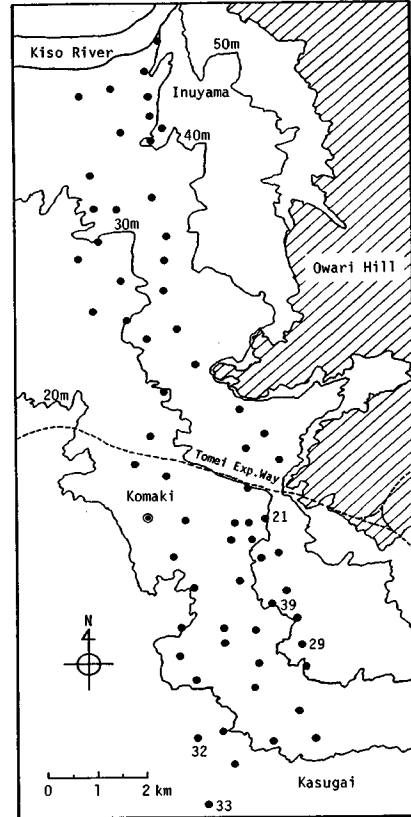


図-1 観測地域
(●観測井, ●雨量観測所)

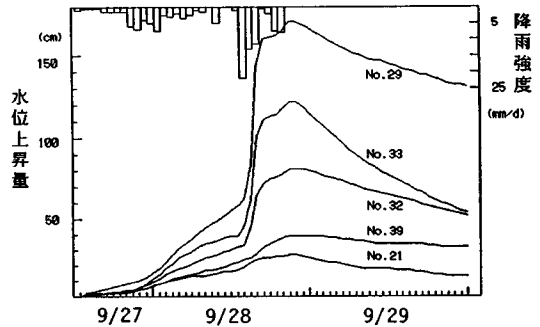


図-2 豪雨時の地下水位応答

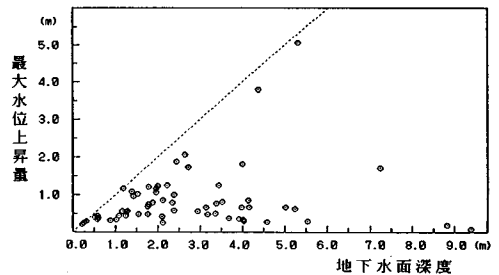
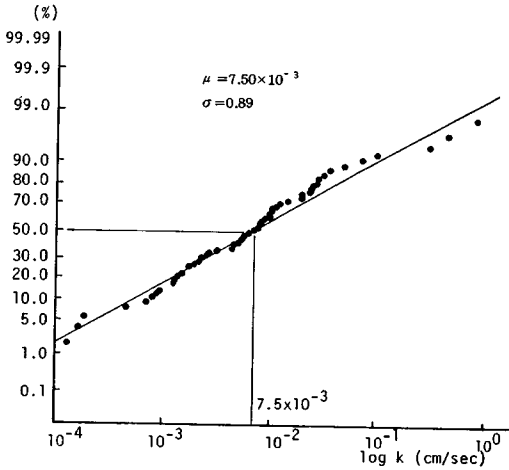
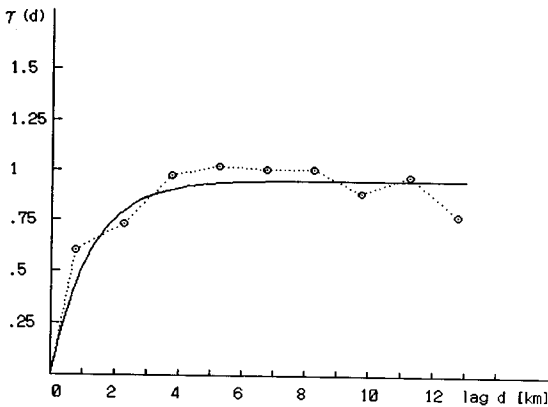


図-3 地下水面深度と最大水位上昇量



図—4 透水係数の対数正規分布性



図—5 透水係数の空間分布構造

よって指摘されているものであり、当地域でも同様な事実が確認された。

水理定数の空間的な分布特性を調べるために、現場透水試験による透水係数の variogram を求めた。variogram は次式で定義される統計関数であり、確率場の空間構造を表わすものである。

$$\gamma(d_{ij}) = \text{Var}[Z(x_i) - Z(x_j)]/2 \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $Z(x)$ ：地点 x における確率変数、 d_{ij} ：2 地点 x_i, x_j 間の距離である。ここでは、図—4 の結果から、透水係数の常用対数変換値について、統計的定常性を仮定して上式を適用した。その結果を図—5 に示す。図中の実線は、variogram の近似式として指数関数型⁸⁾、

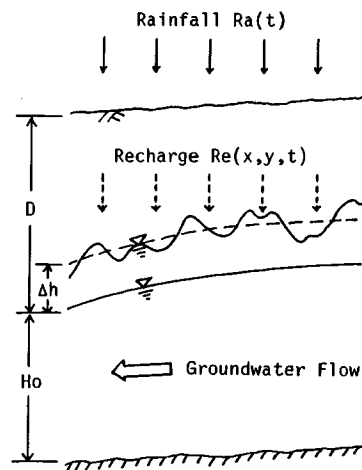
$$\gamma(d) = A [1 - \exp(-d/L)] \dots \dots \dots (2)$$

を用いた場合である（ただし、 $A=0.85, L=1250 \text{ m}$ 、 d ：m 単位）。この図によると、透水係数が相関をもつ距離は 1~2 km 以下であり、広域にひろがった帯水層の水理特性は空間的に互いに比較的独立した形で分布しているといえる。

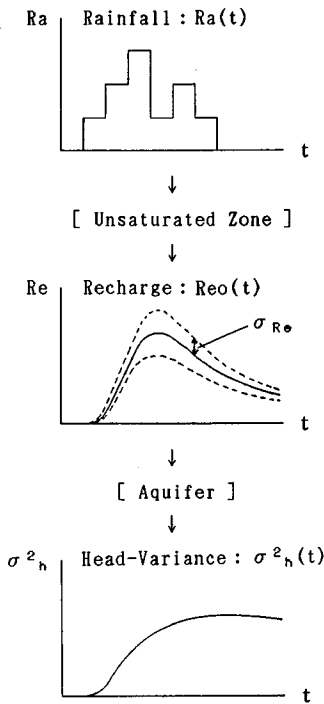
3. 降雨に対する水位応答現象の不確定要因

降雨に対する水位の応答現象は、地中に浸入した雨水が降下浸透し不圧帯水層に供給されることによって、水平方向に流動していた地下水に貯留量変化を生じ、水面の上昇として現われるものである（図—6）。いま簡単のために、地表からの水面深度 D が場所的に一定で、さらに地表や水面・基盤の傾斜が小さい場合を考えよう。このとき D が水位上昇量 Δh に比べ十分に大きい ($D \gg \Delta h$) 場合には、不飽和土壌帯での雨水浸透過程とその結果生ずる飽和地下水帯での水位変動過程とを近似的に別個に扱うことが可能となり、現象は図—7 のように考えることができる。すなわち、地表に与えられた降雨強度 $R_a(t)$ の雨水は土中に鉛直浸透し、不飽和帯において何らかの変換を受けた後、地下水涵養強度 $R_e(t)$ として帯水層に供給される。このとき、流れ場が等方均質であれば $R_e(t)$ は空間的に一様であるが、不均質な場合には場所と時間の関数 $R_e(x, y, t)$ となる。

一般に場の不均質性は“確定的不均質性”と“確率的不均質性”とに分けられる⁹⁾。前者は場の水理特性の空間変動が規則的か少なくとも既知の場合であるが、後者はその変動が不規則で種々のスケールを含み、完全には把握できないランダムな場合である。ここで対象としているのは後者の場合であって、通常の決定論的取扱いはしばしば均質と仮定される領域、たとえば地質学的に同一の領域において、水理定数が平均値のまわりで小さくランダム変動するような場を想定する。そうした不均質性により、前述の $R_e(x, y, t)$ は平均値 $R_{e0}(t)$ と場所的な標準偏差 $\sigma_{R_e}(t)$ をもったランダム変数と考えることができる。変動する $R_e(x, y, t)$ により、帯水層



図—6 降雨による水位上昇の模式図

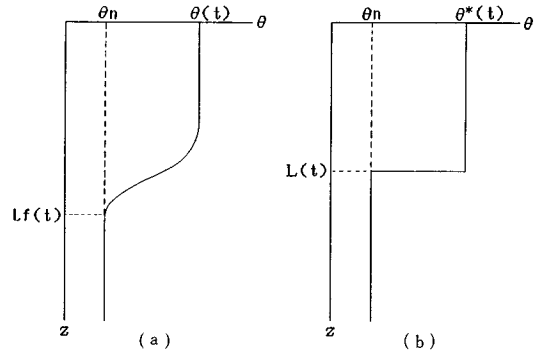


図一七 降雨と涵養強度と水位分散のかかわり

では地下水位が場所的にまちまちに上昇しようとするが、帯水層の水平方向の水頭拡散効果によって、水位分布の凹凸は緩和される。そして、これらの結果として井戸ごとに異なった、すなわち場所的な分散 $\sigma_h^2(t)$ をもった水位応答が観測されているわけである。次章では、まず降雨強度 $R_d(t)$ から涵養強度 $R_{eo}(t)$ への変換過程を理論的に検討するとともに、 $R_e(x, y, t)$ のランダム変動成分について考える。さらに、このような涵養の場所的変動と帯水層特性の不均質性がどのように合成され、水位上昇量の場所的ばらつきを生み出すかを5.において検討する。

4. 不均質な土壤帯における地下水涵養過程

不飽和土壤帯での $R_d(t)$ から $R_e(x, y, t)$ への変換過程は不飽和浸透理論を用いて解析される。同理論は、複雑な土壤中の水分移動を毛管ポテンシャルの概念を用いてモデル化し、リチャーズ方程式に体積含水率・吸引圧水頭・不飽和透水係数の三者の相互関係を組み合わせ解を得るものであるが、方程式の強い非線形性のために、その解析は数値計算によるのが一般的である。確かに数値解析は計算の諸条件やパラメーター値が十分にわかっている場合には威力を発揮するが、いま問題にしているのは広域の不均質地盤における地下水涵養強度の場所的変動の程度を評価することであって、そのためには、



図一八 雨水浸透過程の近似

現象を支配する要因を何らかの形で解析的に表現することが望まれる。そこで本章では、Dagan & Bresler⁽¹⁰⁾の提案する不飽和浸透の近似モデルを基本として地下水涵養強度と不均質場でのその変動成分について検討する。

(1) 均質土柱における地下水涵養過程の近似モデル
土壤水分移動の連続方程式は鉛直一次元の場合、

$$\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial t} = - \frac{\partial q(z, t)}{\partial z} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 θ ：体積含水率、 q ：鉛直方向の土壤水分フラックス、 t ：降雨開始時からの時間、 z ：地表から下方を正とした鉛直座標である。重力排水が十分に行われた後の土壤に雨水が浸透し、図一八(a)のような伝達帯と浸潤前線が形成された状況を考える。

式(3)を z について地表から浸潤前線まで積分するにあたって、浸潤前線の時間的進行をも考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{L(t)} [\theta(z, t) - \theta_n] dz = - \int_0^{L(t)} \frac{\partial q(z, t)}{\partial z} dz = -q(L, t) + q(0, t) \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 $L_f(t)$ ： $\theta(L_f, t) = \theta_n$ となる浸潤前線までの深度、 θ_n ：圃場容水量であり、重力排水がほぼ終了して近似的に一定値とみなされる含水状態をさす。図一八(a)の θ 分布をより単純化して考えるために、図一八(b)のような一定値 θ^* と $L(t)$ をもつ等価水分分布に置き換えよう。 θ^* と $L(t)$ は、地表から前線までの水分増加量 $V(t)$ が等しくなるように定義する(その決定については後述する)。すなわち、

$$V(t) = \int_0^{L(t)} [\theta(z, t) - \theta_n] dz = [\theta^*(t) - \theta_n] L(t) \dots \dots (5)$$

式(4)、(5)をまとめると

$$q(0, t) - q(L, t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [(\theta^*(t) - \theta_n) L(t)] \dots \dots \dots (6)$$

一方、ダルシー則を不飽和流に拡張することにより、

$$q = K(\psi) \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right] \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 ψ ：毛管ポテンシャル(吸引圧水頭の絶対値)、

$K(\psi)$: 不飽和透水係数である。

上式を $z=0$ から $z=L_r(t)$ まで積分すると、

$$\int_0^{L_r(t)} q(z, t) dz = \int_0^{L_r(t)} K(\psi) dz + \int_0^{L_r(t)} K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} dz \quad \dots\dots\dots (8)$$

土壌の物理特性である $K \sim \psi$, $\theta \sim \psi$ 関係は、ヒステリシスを無視し、次の経験式で表わすことにする。

$$\frac{K(\psi)}{K_s} = \left[\frac{\psi_w}{\psi} \right]^\eta \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$S_e = \left[\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right] = \left[\frac{\psi_w}{\psi} \right]^\beta \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 K_s : 飽和透水係数、 ψ_w : 空気侵入値、 S_e : 有効飽和度、 θ_s : 飽和含水率、 θ_r : 最小含水率、 η, β : 定数である。式(9)、(10)より次の $K \sim S_e$ 関係が導かれる。

$$\frac{K(\psi)}{K_s} = S_e^{\eta/\beta} \quad \dots\dots\dots (11)$$

η と β の間には、Brooks & Corey (1966)¹¹⁾によれば $\eta = 2 + 3\beta$ $\dots\dots\dots (12)$

の関係がある。式(9)、(10)を用いて式(8)の右辺第2項を書き直せば、

$$\int_0^{L_r(t)} K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \frac{\psi_w}{\eta - 1} [K(0, t) S_e^{-1/\beta}(0, t) - K(L_r, t) S_e^{-1/\beta}(L_r, t)] \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(13)を式(8)に代入し、等価分布に置き換えれば、

$$q^*(t) = K^* + \frac{\psi_w}{\eta - 1} \cdot \frac{K^* S_e^{*-1/\beta} - K_n S_{en}^{1/\beta}}{L} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 q^* : 0 から L までの範囲における等価水分フラックス、 K^* , S_e^* : θ^* に対応する K , S_e , K_n , S_{en} : θ_n に対応する K , S_e である。なお、 $z=L$ より深い領域でのフラックスは、 θ_n の重力排水状態に相当するので、

$$q(L, t) = K_n \quad \dots\dots\dots (15)$$

である。

a) 降雨強度一定の場合の浸透過程

降雨強度 R_a が時間的に一定で飽和透水係数 K_s よりも小さい場合には、地表で降雨強度に等しい一定フラックス q_0 が浸入する。このとき、 $q^*(t) = q_0$ であり、式(5)は式(6)、(15)により

$$V(t) = (q_0 - K_n) t \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(5)を考慮して、式(16)を式(14)に代入する。通常の場合、 $S_{en} \ll 1$, $K_n/q_0 \ll 1$ であるので微小項を省略すると、式(11)より次式が得られる。

$$q_0 = K^* + \frac{\psi_w(\theta_s - \theta_r)}{(\eta - 1)q_0 t} K^{*1-(1-\beta)/\eta} \cdot K_s^{(1-\beta)/\eta} \quad \dots\dots\dots (17)$$

変形すれば、

$$t = \frac{\psi_w(\theta_s - \theta_r)}{(\eta - 1)q_0(q_0 - K^*)} K^{*1-(1-\beta)/\eta} \cdot K_s^{(1-\beta)/\eta} \quad \dots\dots\dots (18)$$

上式により、任意の時刻 t における等価分布の飽和度に対応した透水係数 K^* を求めることができる。 K^* が求まれば、含水率 θ^* と前線深度 L は式(5)、(11)より次式のようになる。

$$\theta^* = (\theta_s - \theta_r) \cdot (K^*/K_s^{\beta/\eta}) + \theta_r \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$L = V(t)/(\theta^* - \theta_n) \doteq q_0 \cdot t / (\theta^* - \theta_n) \quad \dots\dots\dots (20)$$

b) 降雨後の再配分過程

降雨継続時間 t_r の間に土中に浸入した雨水の体積は $q_0 \cdot t_r$ であるので、降雨終了後の水分体積 $V(t)$ は

$$V(t) = q_0 \cdot t_r - K_n \cdot t \quad \dots\dots\dots (21)$$

連続式(6)において $q(0, t) = 0$ であるから、

$$-L \frac{d\theta^*}{dt} = (\theta^* - \theta_n) \frac{dL}{dt} + K_n \quad \dots\dots\dots (22)$$

上式左辺は地表から浸潤前線までの間での水分減少量、右辺は浸潤前線の進行による下方への浸潤水分量と重力排水量である。したがって、前線の位置で下方への水分フラックスは

$$q^*(t) = -L \frac{d\theta^*}{dt} = \frac{-V(t)}{(\theta^* - \theta_n)} \frac{d\theta^*}{dt} \quad \dots\dots\dots (23)$$

と評価することができる。一方、 $q^*(t)$ はすでに式(14)で与えられているので、式(19)~(21)を考慮し、 $S_{en} \ll 1$, $K_n/K_s \ll 1$ として微小項を省略すれば、

$$dK^*/dt = -\alpha \cdot K^{*2} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

$$\alpha = \frac{\eta}{\beta q_0 \cdot t_r} \left[1 + \frac{\psi_w(\theta_s - \theta_r)}{(\eta - 1)q_0 \cdot t_r} (K^*/K_s)^{\beta-1/\eta} \right] \quad \dots\dots\dots (25)$$

η と β の間に式(12)の関係を仮定すれば、通常の β 値は 0.3~5.0 程度であるので $(\beta-1)/\eta$ は -0.2~0.2 程度の値をとる。したがって、 K^* が大きく変動しようとも、 α の変化は小さく、 α はほぼ定数とみなすことができる。 K^* の初期条件として、

$$K^* = K_0 : t = t_r \quad \dots\dots\dots (26)$$

の下で式(24)を解けば、

$$K^*(t) = K_0 / [1 + \alpha K_0 (t - t_r)] \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 K_0 は式(18)で $t = t_r$ とおくことにより K^* として与えられる。上式により降雨後の任意時刻での K^* が得られ、 θ^* と L は式(19)、(20)から算定される。

c) 地下水帯への涵養強度

上に述べた雨水浸透の近似解を用いて、下方に地下水面がある場合の涵養強度について考える。地下水面上の不飽和帯は毛管水帯と懸垂水帯とに区分され、涵養は上方からの降下浸潤水が毛管水帯の上端に到達したときに開始されることが知られている¹²⁾。したがって、地下水涵養強度は、連続式を地表から深度 $D'(t)$ の毛管水帯上端までの間で積分して、水収支を考えればよい。

$$q(0, t) - q(D', t) \doteq \frac{1}{\Delta t} \int_0^{D'(t+\Delta t)} (\theta(z, t + \Delta t) - \theta_n) dz$$

$$-\int_0^{D'(t)} (\theta(z, t) - \theta_n) dz \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $q(0, t)$ 、 $q(D', t)$ はそれぞれ降雨強度 $R_a(t)$ 、涵養強度 $R_e(t)$ に等しい。今回の場合、地下水面深度に比べ地下水位上昇量が小さい場合を想定しているので、 $D'(t)$ を定数 D' とすれば、上式は等価水分分布に対し次のように簡単化される。

$$R_e(t) = R_a(t) + \frac{D'}{\Delta t} [\theta^*(t) - \theta^*(t + \Delta t)] \dots\dots\dots (29)$$

なお、 $R_a(t) = 0$ の再配分過程では、たとえば、図—9の斜線部分が Δt 間の涵養量に相当する。

(2) 近似モデルの検証

前節で述べた地下水涵養過程の近似解を、リチャーズの方程式を数値解析した結果と比較することによって、近似モデルの有効性を検討しよう。リチャーズ方程式は式(3)、(7)より

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{\partial K}{\partial z} \dots\dots\dots (30)$$

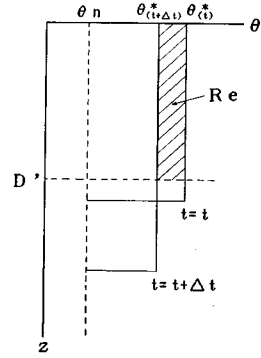
$K \sim \psi$ および $\theta \sim \psi$ 関係は、近似モデルと同様に式(9)~(12)を用い、初期・境界条件は次のようである。

$$\theta(z, 0) = \theta_n$$

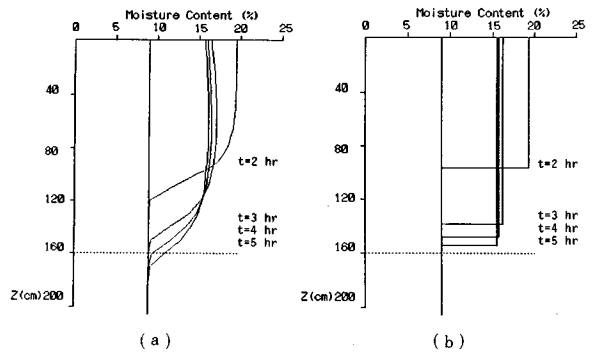
$$q(0, t) = R_a (= \text{const.}) \quad (t > t_r; R_a = 0)$$

計算は差分法(陽解法)で行い、 $\Delta t = 1$ s、 $\Delta z = 5$ cm (一部 10 cm) とした。モデルの諸量の数値は表—1のように設定した。図—10(a) に数値解析の結果得られた含水率分布を示す。同図(b) は上記と同一条件の下で近似モデルから求めた分布であり、 α の値は S_e が 0.23 のときの K^* を用いた。両者の浸潤前線の形状を比較すると、(a) では水分拡散により滑らかな形となっているが、(b) ではステップ状である。その差異は降雨が終了した後の再配分過程で顕著であり、前線の先端は(a)の方が(b)より若干早く降下している。これは、水分拡散による前線の“くずれ”が近似モデルでは表現できていないためと考えられる。しかし全体としては、近似モデルは雨水浸透過程の水分挙動の特徴をうまく表現し得ているといえる。

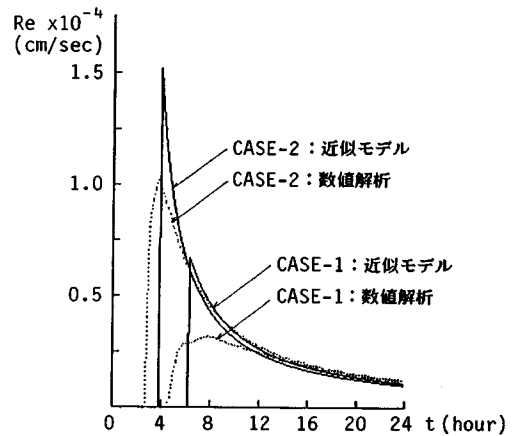
次に、下方に地下水面が存在する場合の地下水涵養量を比較しよう。前述のように、涵養強度 $R_e(t)$ は毛管水帯の上端すなわち深度 D' の水平断面を横切るフラックスとみなされる。図—11は、数値解析と近似モデルから得られる涵養強度の時間変化を示す。両者を比較すると、低減過程はよく一致しており、近似モデルの有効性が認められるが、涵養初期において差異がみられる。すなわち、数値解析(破線)の結果は涵養の開始時刻がかなり早い、ピーク値は低い。これに対し近似モデル(実線)では、遅れてステップ状に急上昇しており、両者のピーク値は大きく異なっている。これは図—10の



図—9 再配分過程の地下水涵養強度



図—10 数値解析結果との比較(含水率分布; CASE-1)



図—11 数値解析結果との比較(涵養強度)

表—1 モデルの諸量

$R_a = 50$ mm/h $\beta = 0.3$	$t_r = 2.0$ h $\psi_w = 40$ cm	$D' = 160$ cm $\theta_s = 0.2$
CASE-1 $K_a = 0.002$ cm/s	$\theta_n = 0.09$	$\theta_r = 0.08$
CASE-2 $K_a = 0.02$ cm/s	$\theta_n = 0.07$	$\theta_r = 0.06$

前線形状の差異を反映したものであるが、その傾向は水理特性の異なる2つのCASEで同様であり、地質の違いによる地下水涵養特性の相対的变化を議論するうえでは問題はないといえる。

(3) 土壌の不均質性による涵養強度の変動成分

3. で述べたような水理定数が空間的に小さく変動する流れ場を考え、その不均質性によって地下水涵養強度 R_e がどのように変動するかを近似モデルによって検討する。 $R_e(t)$ にかかわる水理定数としては、 K_s , θ_s , θ_r , β , η , ψ_w , R_a , t_r , D' 等があるが、ここでは、 K_s の対数変換値 Y と有効間隙率 $P_e = \theta_s - \theta_r$ がそれぞれ平均値のまわりでランダム変動するものとし、 R_a と t_r は一定値、 β その他の量は流れ場の平均的性質に依存する確定値とする。すなわち、 $Y = \ln(K_s)$ とおくと、

$$Y(x, y) = Y_0 + Y_1(x, y), \quad |Y_0| \gg |Y_1| \dots\dots (31 \cdot a)$$

$$P_e(x, y) = P_{e0} + P_{e1}(x, y), \quad |P_{e0}| \gg |P_{e1}| \dots\dots (31 \cdot b)$$

ここに、 Y_0 , P_{e0} はそれぞれ Y , P_e の平均値、 Y_1 , P_{e1} はランダム変動量である。したがって、これらの量に依存する R_e も平均値を中心に空間変動すると考えられ、

$$R_e(x, y, t) = R_{e0}(t) + R_{e1}(x, y, t) \dots\dots (32)$$

近似モデルによる地下水涵養強度は式 (29) で計算される。涵養が再配分過程で行われる場合には、式 (19), (27) を代入することにより、

$$R_e(x, y, t) = \frac{D' P_e(x, y)}{\Delta t \cdot K_s(x, y)^{\beta/\eta}} \cdot \left[\left(\frac{K_0}{1 + \alpha K_0(t - t_r)} \right)^{\beta/\eta} - \left(\frac{K_0}{1 + \alpha K_0(t + \Delta t - t_r)} \right)^{\beta/\eta} \right] \dots\dots (33)$$

上式において K_0 , α はそれぞれ式 (18), (25) から求まるが、どちらの式にも $K_s(x, y)$ の $(\beta - 1)/\eta$ 乗と $P_e(x, y)$ が含まれている。前述のように、式 (12) によれば $(\beta - 1)/\eta$ はゼロに近い値であり、 β/η も同様に小さい。したがって上式の [] 内は一応 $K_s(x, y)$ と $P_e(x, y)$ の関数ではあるが、それらの変動による影響は小さいといえる。そこで、これを $K_s(x, y)$ と $P_e(x, y)$ に関し定数として扱い、 $A(t)$ とおけば

$$R_e(x, y, t) = A(t) \frac{P_e(x, y)}{K_s(x, y)^{\beta/\eta}} \dots\dots (34)$$

式 (31 \cdot a) より

$$K_s(x, y)^{\beta/\eta} = \exp[(\beta/\eta)(Y_0 + Y_1(x, y))] \doteq K_{s0}^{\beta/\eta} \left[1 + \frac{\beta}{\eta} Y_1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\beta}{\eta} Y_1 \right)^2 + \dots \right] \dots\dots (35)$$

式 (34) に式 (31 \cdot b), (32), (35) を代入し微小項を省略すれば、

$$R_{e1}(x, y, t) = A(t) \frac{P_{e0} + P_{e1}(x, y)}{K_{s0}^{\beta/\eta}} - \left[1 + \frac{\beta}{\eta} Y_1 \right] R_{e0}(t) \dots\dots (36)$$

式(34)より

$$R_{e0}(t) = A(t) \frac{P_{e0}}{K_{s0}^{\beta/\eta}} \dots\dots (37)$$

よって、涵養強度の変動成分は、

$$R_{e1}(x, y, t) = C(x, y) R_{e0}(t) \dots\dots (38)$$

ここに、

$$C(x, y) = \frac{P_{e1}(x, y)}{P_{e0}} - \frac{\beta}{\eta} Y_1(x, y) \dots\dots (39)$$

と記され、地下水帯への涵養強度は場所的に次式の形で変動することがわかる。

$$R_e(x, y, t) = (1 + C(x, y)) R_{e0}(t) \dots\dots (40)$$

なお、 $R_e(x, y, t)$ の分散 $\sigma_{R_e}^2$ は、上式により

$$\sigma_{R_e}^2 = E[C(x, y)^2] R_{e0}^2(t) \dots\dots (41)$$

と書くことができる。

5. 不均質な帯水層における地下水水位の確率応答特性

不均質土壌からの涵養強度 $R_e(x, y, t)$ が導かれたので、本章ではそれが不圧帯水層に与えられた場合の地下水水位の挙動について、その確率的性質を考察する。

(1) 地下水水位応答の統計的特性

式 (31) と同様に、帯水層の水理定数は次のような不均質性をもつものとする。

$$Y(x, y) = Y_0 + Y_1(x, y), \quad |Y_0| \gg |Y_1| \dots\dots (42 \cdot a)$$

$$S(x, y) = S_0 + S_1(x, y), \quad |S_0| \gg |S_1| \dots\dots (42 \cdot b)$$

ここに、 $S(x, y)$: 帯水層の貯留係数であり、土壌帯の有効間隙率 $P_e(x, y)$ と物理的には同じであるが、その存在する場所が異なるので、ここでは記号を区別しておく。

水平基盤上の二次元不圧地下水の基礎方程式は、代表水深 $H_0 (= \text{const.})$ を用いて線形化できる場合には、

$$S(x, y) \frac{\partial h(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_s(x, y) H_0 \frac{\partial h(x, y, t)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_s(x, y) H_0 \frac{\partial h(x, y, t)}{\partial y} \right] + R_e(x, y, t) \dots\dots (43)$$

ここに、 $h(x, y, t) = H(x, y, t) - H_0$, $H(x, y, t)$: 不透水基盤上の地下水深で $|H_0| \gg |h(x, y, t)|$. 帯水層の不均質性に起因した水位の乱れ成分を $h_1(x, y, t)$ とおくと、

$$h(x, y, t) = h_0(x, y, t) + h_1(x, y, t), \quad E[h] = h_0 \dots\dots (44)$$

式 (43) に式 (40), (42), (44) を代入し展開する。

均質場では

$$S_0 \frac{\partial h_0}{\partial t} = K_{s0} H_0 \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} + K_{s0} H_0 \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2} + R_{e0}(t) \dots\dots (45)$$

が成立することを考慮し、展開式の微小項を省略すれば、

$$\begin{aligned} & \frac{S_0}{K_{s0}H_0} \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} - \frac{R_{e0}(t)}{K_{s0}H_0} C(x, y) \\ &= -\frac{S_1(x, y)}{S_0} \left[\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2} + \frac{R_{e0}(t)}{K_{s0}H_0} \right] \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[Y_1(x, y) \frac{\partial h_0}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[Y_1(x, y) \frac{\partial h_0}{\partial y} \right] \dots(46) \end{aligned}$$

簡単のために、降雨前の初期水位分布が空間的に一定、すなわち、 $h(x, 0) = \text{const.}$ の場合を考えると、 $R_{e0}(t)$ によって上昇する水位分布も空間的に一定となり、上式は

$$\frac{S_0}{K_{s0}H_0} \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} = \frac{R_{e0}(t)}{K_{s0}H_0} \left[C(x, y) - \frac{S_1}{S_0} \right] \dots(47)$$

流れ場を無限領域として上式を解くと、

$$\begin{aligned} h_1(x, y, t) &= \frac{K_{s0}H_0}{S_0} \int_0^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \\ & \quad \cdot G(x, x', y, y', t-t') U(x', y', t') \dots(48) \end{aligned}$$

ここに、

$$U(x, y, t) = \frac{R_{e0}(t)}{K_{s0}H_0} \left[C(x, y) - \frac{S_1(x, y)}{S_0} \right] \dots(49)$$

$G(x, y, t)$ は二次元拡散方程式のグリーン関数である。水位 $h(x, y, t)$ の分散は、

$$\begin{aligned} \sigma_h^2 &= \text{Var} [h(x, y, t)] = E [h_1(x, y, t)^2] \\ &= \left[\frac{K_{s0}H_0}{S_0} \right]^2 \iint_0^t dt' dt'' \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dx'' dy' dy'' \\ & \quad \cdot G(x, x', y, y', t-t') G(x, x'', y, y'', t-t'') \\ & \quad \cdot E [U(x', y', t') U(x'', y'', t'')] \dots(50) \end{aligned}$$

上式中の $U(x, y, t)$ の共分散は、 U を構成する $C(x, y)$ や $S_1(x, y)$ を空間相関のないランダム変量と考えて white noise 近似すれば、

$$\begin{aligned} & E [U(x', y', t') U(x'', y'', t'')] \\ &= \frac{R_{e0}(t') R_{e0}(t'')}{(K_{s0}H_0)^2} \sigma_{cs}^2 \rho_0^2 \delta(x''-x') \delta(y''-y') \dots(51) \end{aligned}$$

ここに、

$$\sigma_{cs}^2 = \text{Var} \left[C(x, y) - \frac{S_1(x, y)}{S_0} \right] \dots(52)$$

$\delta(\cdot)$: ディラックのデルタ関数、 ρ_0 : U の white noise 近似に伴う定数である。すると式 (50) は、

$$\begin{aligned} \sigma_h^2 &= \frac{\sigma_{cs}^2 \rho_0^2}{S_0^2} \iint_0^t dt' dt'' \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \cdot R_{e0}(t') R_{e0}(t'') \\ & \quad \cdot G(x, x', y, y', t-t') G(x, x'', y, y'', t-t'') \\ &= \frac{\sigma_{cs}^2 \rho_0^2}{4 \pi \cdot K_{s0}H_0 \cdot S_0} \iint_0^t \int_0^t \frac{R_{e0}(t') R_{e0}(t'')}{2 t-t'-t''} dt' dt'' \dots(53) \end{aligned}$$

上式の σ_{cs}^2 は、 $C(x, y)$ に式 (39) の関係を代入し、 $P_{e1} \cdot Y_1 \cdot S_1$ がそれぞれ独立に確率変動するものと考えれ

ば、

$$\sigma_{cs}^2 = \left(\frac{1}{P_{e0}} \right)^2 \sigma_{P_e}^2 + \left(\frac{\beta}{\eta} \right)^2 \sigma_{Y_1}^2 + \left(\frac{1}{S_0} \right)^2 \sigma_{S_1}^2 \dots(54)$$

ここに、 $\sigma_{P_e}^2, \sigma_{Y_1}^2, \sigma_{S_1}^2$ はそれぞれ P_{e1}, Y_1, S_1 の分散である。

以上のように式 (53), (54) として、不飽和土壌帯および地下水帯において水理定数が確率変動する場合の水位応答の分散を表現することができた。上式によれば、仮に $R_e(x, y, t)$ が均一であっても帯水層の不均質さのために水位は乱れることになり、また逆に帯水層が均質であっても $R_e(x, y, t)$ が不均一であれば水位は凹凸をもったものになることがわかる。

図-12 に式 (53) に基づく水位分散の一例を示す。図中に併記した $R_{e0}(t)$ は図-11 の $R_e(t)$ と同一であり、 K_{s0} や S_0 の値はそれぞれ図-11 の $K_s, \theta_s - \theta_n$ を用いた。また、式 (53) 中の σ_{cs}^2 や ρ_0 は現地データが少なく特定しにくいので、ここでは σ_h^2 をそれらで除した値、すなわち、 $(\sigma_h^2 H_0) / (\sigma_{cs}^2 \rho_0^2)$ を求めた。ちなみに $\sigma_{cs}^2 = 0.1, \rho_0 = 500 \text{ m}, H_0 = 10 \text{ m}$ とすれば、図-12 の水位分散の最大値は CASE-1 で $\sigma_{h \max}^2 = 3600 \text{ (cm}^2\text{)}$ 、CASE-2 で $\sigma_{h \max}^2 = 700 \text{ (cm}^2\text{)}$ となる。図-12 で注目されるのは、CASE-1 と CASE-2 の分散値の差異である。 $R_{e0}(t)$ の最大値は CASE-1 よりも CASE-2 の方が大きいにもかかわらず、分散値は CASE-1 の方がはるかに大きく、大小関係が逆になっている。これは水位応答の分散が、不飽和帯における降雨強度 R_a から涵養強度 R_e への変換特性と、帯水層における R_e から水位応答への変換特性の両者によって支配され、一方の特性のみで決まるものではないという重要な事柄を示している。

(2) 種々の地質条件での水位応答の不確定性

ここまでの成果をもとに、地下水位は降雨に対してどのような状況下で乱れやすいかについて考えよう。本研

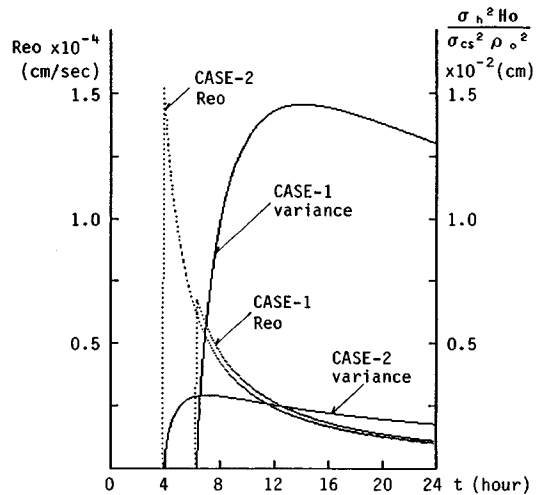


図-12 水位応答の分散の時間変化

究では、降雨の強度や継続時間、地盤の平均的水理定数や地下水面深度など地下水をとりまく条件を確定値として扱ってきた。以下ではこれら諸条件のうち、特に平均的水理定数である K_{s0} (透水係数), P_{e0} (土壌の有効間隙率), S_0 (帯水層の貯留係数) が異なる場合をとりあげ、水位応答の分散がどのような影響を受けるかを検討する。

a) 平均的水理定数と涵養強度

式 (53) からわかるように、水位応答の分散は平均的涵養強度 $R_{e0}(t)$ の 2 乗積分を含んでいる。そこで、まず $R_{e0}(t)$ と K_{s0} , P_{e0} との関係を調べたものが図-13 である。図では K_{s0} と P_{e0} の種々の組合せについて近似モデルにより $R_{e0}(t)$ を求め、その最大値を常用対数値 $\log_{10}[R_{e0 \max}]$ で示している。 K_{s0} , P_{e0} 以外の確定量 (R_a , t_r , β , ϕ_w , D') は、表-2 のように設定した。図-13 の数値の分布から、 K_{s0} が大きく P_{e0} が小さい方が、 $R_{e0}(t)$ は大きいことがわかる。一般に土壌は、 K_{s0} が大きい粗粒土ほど P_{e0} も大きい傾向があるので、この図から粒度のみからは $R_{e0}(t)$ の大きさを議論できないことがわかる。図中の実線は式 (37), すなわち

$$\frac{R_{e0}(t)}{A(t)} = \frac{P_{e0}}{K_{s0}^{0.7}} \dots \dots \dots (55)$$

を示しており、実線と数値の分布はよく一致している。このことは、とりまなおさず $A(t)$ (式 (33), (34) 参照) が K_{s0} , P_{e0} に関し一定で、上式右辺の比が透水性と保

表-2 モデルの諸量

$R_a=50 \text{ mm/h}$	$t_r=2.0 \text{ h}$	$D'=160 \text{ cm}$
$\beta=1.0$	$\phi_w=40 \text{ cm}$	$(\eta=5.0)$

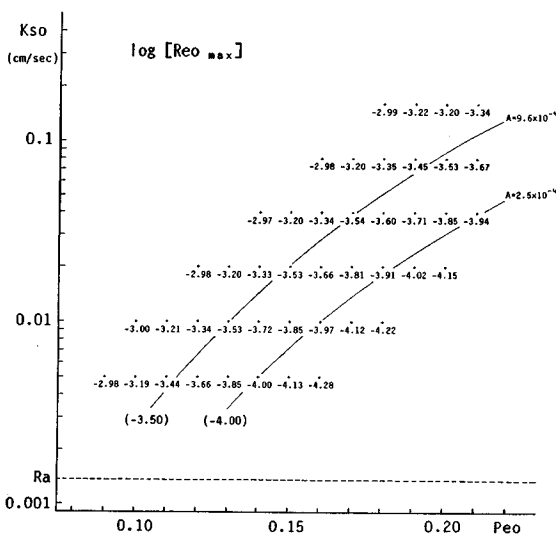


図-13 土壌の平均的水理特性と涵養強度

水性の卓越度を表わす指標となることを意味している。言い換えれば、異なる水理特性をもつ 2 種類の土壌間で、 $P_{e0}/K_{s0}^{0.7}$ が一定であれば、両者の透水性の違いと保水性の違いは相殺されて同じ強度の地下水涵養が生ずることになる。上記の比は、涵養強度の大きさを左右する、透水性と保水性の卓越度を表わす指標となっているのである。

b) 平均的水理定数と水位応答の分散

さて、図-13 と同じように K_{s0} , S_0 の組に対し、式 (53) から水位応答の分散を求めよう。図-12 で一例を示したような水分分散 $(\sigma_n^2 H_0) / (\sigma_{cs}^2 \rho_0^2)$ について、その最大値を図-14 に常用対数値で示す。図からわかるように、水分分散の変化幅は R_{e0} の場合と同様に、2 オーダー以上にわたっている。しかし、その分布形状は図-13 と大きく異なっており、図-14 の等値線は、図-13 のそれよりも傾きが急になっている。 P_{e0} と S_0 とは物理的には同じものであるので、同様な値をとるものと仮定して図-13 と図-14 を重ねて考えれば、2 種類の土壌の間で R_{e0} が等しい (図-13 で等値線上に位置する) 場合でも、水位の分散は両者で大きく異なることになる。すなわち、 K_{s0} および S_0 が小さいほど、つまり細粒土ほど水分分散は大きく、粗粒土では逆に小さい値となる。このことは、現地を想定して考えれば、扇状地のような砂礫質の粗粒土から成る地盤よりも、洪積台地のような細砂やシルトなど細粒土から成る地盤の方が、地下水位は降雨に対し乱れやすいことを意味している。さらに、このような結果は、地下水位の観測方法や水位データの評価の仕方も地質特性に応じておのずから異なってくることを示唆しており、「洪積台地では 1 本の観測井当た

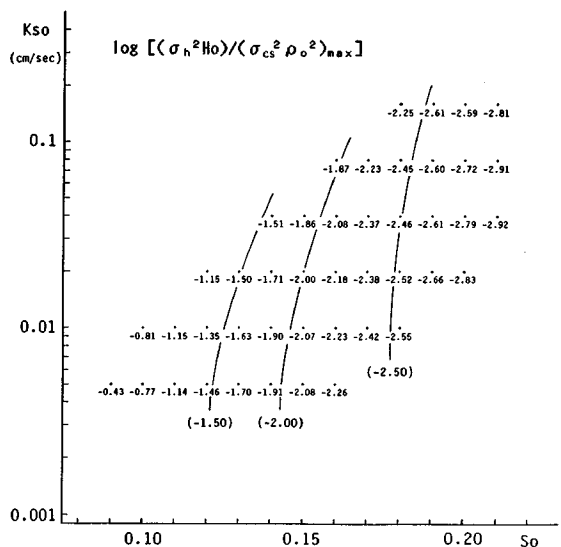


図-14 帯水層の平均的水理特性と水分分散

りのデータの値が扇状地よりも低い」とか、あるいは「細粒土地域ではより多くの観測井を配置し、高い空間密度で観測する必要がある」といった工学的に有用な知見に発展し得るであろう。

6. 結 論

水理特性が平均値のまわりでランダムに変動するような不均質な流れ場を想定し、降雨に伴う地下水涵養過程ならびに地下水位の応答過程の確率変動特性を検討した。本研究で得られた主な知見は以下のとおりである。

(1) 平野域において行われた広域地下水調査の結果によると、豪雨に対する地下水位の最大上昇量は数十 cm の地点から数 m の地点まで観測井によって大きく異なっている。また、現場透水試験による透水係数は対数正規分布することが確かめられ、その空間分布は指数関数型の variogram によって表現できた。

(2) 不均質な土壌帯での地下水帯への涵養強度を、Dagan & Bresler の雨水浸透モデルを基本として定式化した。それによると、場の不均質性による涵養強度の変動成分は、均質土柱の涵養強度に場所的変動係数を乗ずることで表わされることが示された。

(3) 不均質な帯水層における降雨に対する地下水位応答の分散が地下水流れの基礎方程式から理論的に定式化された。その結果、水位応答の分散は、不飽和土壌帯における降雨強度から涵養強度への変換特性と帯水層における涵養強度から水位応答への変換特性の両者によって支配されることが示された。

(4) 地盤の平均的水理定数が異なる種々の地質の間で、涵養強度および水位応答の分散がどのように変化するかを試算した。その結果、涵養強度の大きさを左右するような透水性と保水性の卓越度を表わす指標が見出された。また、降雨に対する水位応答は、透水性が低く貯留性も小さい細粒土の帯水層の方が、粗粒土の帯水層に比べ、きわめて大きな分散をもつことが明らかとなった。

最後に、本研究の成果の一部は、昭和 63 年度文部省科学研究費・奨励研究 (A) 「不均質場における地下水

状態の統計的空間構造の解析と観測情報の評価」(研究代表者：原田守博) の補助を受けたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 高木不折・原田守博・内田光一：小牧東部丘陵地における地下水位の変動特性に関する一考察，日本地下水学会誌，Vol. 27, No. 4, pp. 171~182, 1985.
- 2) 安藤義久：丘陵地の水循環機構と都市化によるその変化に関する研究，東京大学学位論文，254p.，1981.
- 3) 末包昭彦・榎根 勇：熊本平野における降雨に対する地下水位の応答，地理学評論，Vol. 53, No. 10, pp. 666~671, 1980.
- 4) 武藤 勲・中野政詩・雨宮 悠：台地の地下水と湧水，農業土木学会論文集，Vol. 93, pp. 22~30, 1981.
- 5) 高木不折・原田守博：不均質場における降雨後の不圧地下水状態の統計的評価，土木学会論文集，第 387 号/II-8, pp. 85~94, 1987.
- 6) 原田守博・高木不折：地点観測値に基づく地下水位分布の統計的推定と観測網の評価，第 32 回水理講演会論文集，pp. 377~382, 1988.
- 7) Freeze, R. A. : A Stochastic-Conceptual Analysis of One-Dimensional Groundwater Flow in Non-uniform Homogeneous Media, Water Resour. Res., Vol. 11, No. 5, pp. 725~741, 1975.
- 8) Delhomme, J. P. : Kriging in the Hydrosiences, Advances in Water Resources, Vol. 1, No. 5, pp. 251~266, 1978.
- 9) Philip, J. R. : Field Heterogeneity : Some Basic Issues, Water Resour. Res., Vol. 16, No. 2, pp. 443~448, 1980.
- 10) Dagan, G. and Bresler, E. : Unsaturated Flow in Spatially Variable Fields, 1. Derivation of Model of Infiltration and Redistribution, Water Resour. Res., Vol. 19, No. 2, pp. 413~420, 1983.
- 11) Brooks, R. H. and Corey, A. T. : Properties of Porous Media Affecting Fluid Flow, J. Irrigation and Drainage Div., Proc. ASCE, Vol. 92, (IR2), pp. 61~88, 1966.
- 12) たとえば、佐倉保夫・谷口真人：土壌水の移動特性に関するカラムを用いた降雨浸透実験，地理学評論，Vol. 56, No. 2, pp. 81~93, 1983.

(1988. 9. 19・受付)