

k - ϵ 乱流モデルによる平面二次元密度噴流と噴流の相似解析SIMILARITY SOLUTIONS OF PLANE PLUMES AND JETS USING
 k - ϵ TURBULENCE MODEL

福嶋 祐介*

By Yusuke FUKUSHIMA

The vertical plane plume and the plane jets are investigated analytically. The mathematical model used herein consists of the continuity equation of flow, the momentum balance equation in the flow direction, the diffusion equation of concentration, the equation of kinetic energy of turbulence and the equation of viscous dissipation rate of turbulence. It is shown that both flows have similarity solutions by this set of equations. The similarity solutions are independent on the Reynolds number and are the functions of the buoyancy flux for the plume and the momentum flux for the jet. The similarity solution can be obtained numerically. The velocity distributions of the plane plume and jet are explained well by the similarity solution. The predictions of the width of concentration are somewhat smaller than the experimental results.

Keywords: k - ϵ turbulence model, plane plume, plane jet, similarity solution

1. 序 論

半無限領域の静止流体中に運動量束をもった流体が流入すると噴流が形成される。流入流体が周囲流体と異なる密度をもつときには、浮力束が流れに影響を与える密度噴流が形成される。このような流れは自然界で多く観測され、工学的にも重要である。密度噴流の流動特性は、火力あるいは原子力発電の冷却水による温排水の拡散特性を知るうえで重要である。密度噴流はこれまでに数多くの研究者の関心を引いてきた。Morton, Taylor & Turner¹⁾は浮力源が連続的に与えられる場合と瞬間的に与えられる場合に形成される密度流について実験的に検討を行っている。Morton²⁾は浮力束と運動量束の両方が影響する密度噴流について流速分布と相対密度差の分布を仮定し、流れと直交方向に積分する層積分法による解析を行っている。Turner³⁾は、このような密度噴流の研究を概説している。List & Imberger⁴⁾は、軸対称の鉛直密度噴流に対して層積分法の解析を行い、局所リチャードソン数と連行係数との関連を調べている。Kotsovinos^{5)~8)}は、二次元の噴流と密度噴流について詳細な乱流測定を行い、平均流速分布、平均濃度分布と

もに乱流特性を調べている。この結果、噴流 (jet) と密度噴流 (plume) では乱流構造にかなり差があることを明らかにした。福岡・佐藤⁹⁾は二次元噴流の大規模渦の特性を調べ、渦の周囲流体の連行に果たす役割を考察している。また、噴流の乱流特性が流下距離とともに jetlike な特性から plumelike な特性に変化していくと述べている。小松ら¹⁰⁾および室田ら¹¹⁾も密度噴流の乱流特性の詳細な測定から福岡・佐藤と同様の結果を得ている。Yoshida¹²⁾は、塩水による鉛直密度噴流の乱流構造を水素気泡法により調べている。

以上のように密度噴流については、主として実験的な検討がなされ、理論的には流速分布と相対密度差の分布を仮定して、基礎方程式を層積分する層積分法による検討がなされてきた。これに対して、Paullay et al.¹³⁾は、 k - ϵ 乱流モデルを用いて、平面二次元、軸対称の噴流に対して、相似解を求める手法により流速分布を求めている。しかし、彼らの解析では運動量束の保存則が考慮されていないため、完全な解法とはなっていない。Sini & Dekeyser¹⁴⁾は、平面二次元噴流、平面二次元密度噴流について、 k - ϵ 乱流モデルを用いた解析を行っているが、その結果は、種々の運動量束、浮力束に対して汎用性のあるものとはいえない。著者は傾斜壁面密度噴流が乱流モデルを用いても相似解をもつことを示し、流速分

* 正会員 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部建設系
(〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

布，密度分布を求めた¹⁷⁾。

乱流モデルは流れの平均量の解析に加えて，乱流特性量をも未知数として解析を行うもので，乱流特性量として最も重要な渦動粘性係数をその結果として求めることができる。現在数多くの乱流モデルが開発，提案されている¹⁸⁾。このうち最も一般的に用いられているのは乱流運動エネルギー k と乱れの粘性逸散率 ϵ を未知数とする k - ϵ 乱流モデルである。著者ら^{18), 19)}は，浮遊砂を含む開水路流について k - ϵ モデルを適用し実験値との良好な一致を見出している。

本研究の目的は，二次元密度噴流と二次元噴流の流動特性を乱流モデルの解析により明らかにすることである。このため， k - ϵ モデルを用いた場合に密度噴流と噴流のいずれにも対し方程式系が相似解をもつことを示し，その数値解析を行う。

2. 平面二次元密度噴流の基礎方程式

Fig. 1 に示すように半無限領域に密度 ρ_0 の流体が静止しており，これより密度の大きな密度 ρ の流体が流下する場合を考える。流れは，二次元，非圧縮であり，十分に発達した乱流である。流入する流体と周囲流体は，乱流的作用により混合する。二流体の相対密度差は，十分小さくブーシネスク近似が成立する。流れの x 方向の変化は緩やかであり，次のような境界層近似が成立する。

$$u \gg w \quad \frac{\partial}{\partial z} \gg \frac{\partial}{\partial x} \dots\dots\dots (1)$$

ここで， u ， w は，それぞれ，流下方向とこれに直交する方向 (z 方向) の流速成分である。このとき，流れの連続式，流下方向の運動方程式，塩分濃度 c (あるいは温度差等の密度差の原因となるスカラー量) の拡散方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

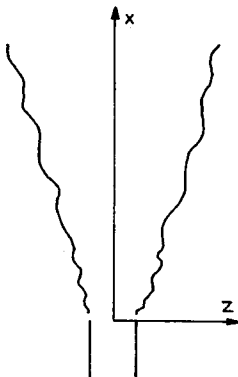


Fig. 1 Definition sketch of vertical plane plume.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = Rcg + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (3)$$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (4)$$

ここで， g は重力加速度， R は濃度と相対密度差との換算係数である (Rc が相対密度差)。渦動粘性係数 ν_t ，および渦動粘性係数と渦拡散係数の比 σ_c は，次のように定義される。

$$\overline{u'w'} = -\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \quad \overline{c'w'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial z} \dots\dots\dots (5, 6)$$

ここで， $-\overline{u'w'}$ ， $-\overline{c'w'}$ は，それぞれレイノルズ応力，濃度速度相関である。乱流運動エネルギー k ，分子粘性逸散率 ϵ の方程式は，次のようになる。

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + w \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \epsilon \dots\dots (7)$$

$$u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + w \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \dots\dots\dots (8)$$

式 (7)，(8) においては浮力項として $g \overline{c'u'}$ が省略されている。この項は境界層近似が成立する範囲で乱れエネルギー生成項に比べて十分小さく無視できる (Appendix 参照)。

k - ϵ モデルでは渦動粘性係数を次のように表わす。

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \dots\dots\dots (9)$$

式 (7)，(8)，(9) に含まれる係数， c_μ ， σ_k ， σ_ϵ ， $c_{1\epsilon}$ ， $c_{2\epsilon}$ は，種々の流れとの比較により次のように同定されている¹⁸⁾。

$$c_\mu = 0.09 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad c_{1\epsilon} = 1.44 \quad c_{2\epsilon} = 1.92$$

著者の解析による傾斜壁面密度噴流では $\sigma_t = 0.8 \sim 1.0$ であった¹⁷⁾。

解析にあたり次のように流関数を導入する。このとき，式 (2) は常に満たされる。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots (10)$$

相似解を求めるため，変数を次のようにおく。

$$\eta = axz^{-l} \dots\dots\dots (11-a)$$

$$\psi = bx^m F(\eta) \dots\dots\dots (11-b)$$

$$c = c_* x^n G(\eta) \dots\dots\dots (11-c)$$

$$k = dx^p K(\eta) \dots\dots\dots (11-d)$$

$$\epsilon = ex^q E(\eta) \dots\dots\dots (11-e)$$

ここで， η は相似変数であり， F ， G ， K ， E は，それぞれ， ψ ， c ， k ， ϵ に対する相似関数である。また， a ， b ， c_* ， d ， e はこれから決定すべき係数であり， x のべき数 l ， m ， n ， p ， q もこれから決定される。 x ， z についての微分は，次のように表わされる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -alzx^{l-1} = -\frac{l}{x} \eta \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = ax^{-l} \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{d}{d\eta} = -\frac{l}{x^\eta} \frac{d}{d\eta} \dots\dots\dots (13\cdot a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{d}{d\eta} = ax^{-l} \frac{d}{d\eta} \dots\dots\dots (13\cdot b)$$

式 (12), (13) の関係を用いると, 流速成分, u, w は式 (10) より次のように表わされる.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} bx^m F(\eta) = bx^m \frac{\partial \eta}{\partial z} F' = abx^{m-l} F' \dots\dots\dots (14)$$

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} bx^m F(\eta) = bmx^{m-1} F - bx^m \frac{\partial \eta}{\partial x} F' = bx^{m-l} (l\eta F' - mF) \dots\dots\dots (15)$$

無次元の渦動粘性係数とその微分を次のようにおく.

$$\nu_{**} = c_\mu \frac{K^2}{E} \dots\dots\dots (16)$$

$$\nu'_{**} = c_\mu \left(\frac{2KK'}{E} - \frac{K^2 E'}{E^2} \right) \dots\dots\dots (17)$$

式 (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17) の関係を用いて式 (3), (4), (7), (8) を整理すると次のようになる.

$$x^{2m-2l-1} \{ (m-l)F'^2 - mFF'' \} = \frac{Rgc}{a^2 b^2} x^\eta G + \frac{ad^2}{be} x^{2p+m-q-3l} \{ \nu'_i F'' + \nu_t F''' \} \dots\dots\dots (18)$$

$$x^{m+n-l-1} (nF'G - mFG') = \frac{ad^2}{be} \frac{1}{\sigma_t} x^{2p-q+n-2l} \{ \nu'_i G' + \nu_t G'' \} \dots\dots\dots (19)$$

$$x^{m+p-l-1} (pKF' - mFK') = \frac{1}{\sigma_k} \frac{ad^2}{be} x^{3p-q-2l} \{ \nu'_i K' + \nu_t K'' \} + \nu_t \frac{a^3 bd}{e} x^{2p-q+2m-4l} F'^2 - \frac{e}{abd} x^q E \dots\dots\dots (20)$$

$$x^{m+q-l-1} (qF'E - mFE') = \frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{ad^2}{be} x^{2p-2l} \{ \nu'_i E' + \nu_t E'' \} + c_{1\epsilon} \frac{a^3 bd}{e} x^{p+2m-4l} \nu_t \frac{E}{K} F'^2 - c_{2\epsilon} \frac{abe}{d} x^{2q-p} \frac{E^2}{K} \dots\dots\dots (21)$$

ただし, 式 (18)~(21) で ν_{**}, ν'_{**} の添え字*は省略している. 密度噴流では, 流下方向の相対密度差のフラックスが保存される. したがって,

$$Q_c = \int_0^\infty ucdz = \int_0^\infty abx^{m-l} F' cx^\eta G \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta = bcx^{m+n} \int_0^\infty F' G d\eta \dots\dots\dots (22)$$

が成立する. 流下方向に変化しない相似解をもつためには, 式 (18)~(21) の x についてのべき数がそれぞれの式の中で等しくなる必要がある. この条件から,

$$2m-2l-1 = n = n+l-1 = 2p+m-q-3l \dots\dots\dots (23\cdot a)$$

$$m+n-l-1 = 2p-q+n-2l \dots\dots\dots (23\cdot b)$$

$$m+p-l-1 = 3p-q-2l = 2p-q+2m-4l = 2p-q+n-l \dots\dots\dots (23\cdot c)$$

$$m+q-l-1 = 2p-2l = p+2m-4l = n-l = 2q-p \dots\dots\dots (23\cdot d)$$

$$m+n=0 \dots\dots\dots (23\cdot e)$$

以上より, x についてのべき数が定まる. すなわち,

$$l=1 \quad m=1 \quad n=-1 \quad p=0 \quad q=-1 \dots\dots\dots (24)$$

である. 次に, 係数 a, b, c, d, e を決定する. 式 (18)~(22) には a, b, c, d, e による次のような係数が含まれている. これらをすべて 1 とおくことにする. すなわち,

$$\frac{Rgc}{a^2 b^2} = 1 \quad \frac{ad^2}{be} = 1 \dots\dots\dots (25\cdot a, b)$$

$$\frac{a^3 bd}{e} = 1 \quad \frac{e}{abd} = 1 \dots\dots\dots (25\cdot c, d)$$

$$\frac{Q_c}{bc} = 1 \dots\dots\dots (25\cdot e)$$

これらの式から, a, b, c, d, e を求めると次のようになる.

$$a=1 \dots\dots\dots (26\cdot a)$$

$$b = (RgQ_c)^{1/3} \dots\dots\dots (26\cdot b)$$

$$c = \frac{(Q_c)^{2/3}}{(Rg)^{1/3}} \dots\dots\dots (26\cdot c)$$

$$d = (RgQ_c)^{2/3} \dots\dots\dots (26\cdot d)$$

$$e = RgQ_c \dots\dots\dots (26\cdot e)$$

式 (24), (26) を式 (18)~(21) に代入すると相似関数の満たすべき微分方程式が次のように求められる.

$$FF'' + G + \nu'_i F'' + \nu_t F''' = 0 \dots\dots\dots (27)$$

$$F'G + FG' + \frac{1}{\sigma_t} (\nu'_i G' + \nu_t G'') = 0 \dots\dots\dots (28)$$

$$FK' + \frac{1}{\sigma_k} (\nu'_i K' + \nu_t K'') + \nu_t F'^2 - E = 0 \dots\dots\dots (29)$$

$$F'E + FE' + \frac{1}{\sigma_\epsilon} (\nu'_i E' + \nu_t E'') + c_{1\epsilon} \frac{E}{K} \nu_t F'^2 - c_{2\epsilon} \frac{E^2}{K} = 0 \dots\dots\dots (30)$$

式 (49)~(52) が相似関数の満たすべき常微分方程式である. ここで, 相似変数 η と相似関数 F, G, K, E と次元量の関係は式 (11), (24), (26) により次のように表わすことができる.

$$\eta = \frac{z}{x} \dots\dots\dots (31\cdot a)$$

$$u = (RgQ_c)^{1/3} F'(\eta) \dots\dots\dots (31\cdot b)$$

$$c = \frac{(Q_c)^{2/3}}{(Rgx)^{1/3}} G(\eta) \dots\dots\dots (31\cdot c)$$

$$k = (RgQ_c)^{2/3} K(\eta) \dots\dots\dots (31\cdot d)$$

$$\epsilon = (RgQ_c) \frac{1}{x} E(\eta) \dots\dots\dots (31\cdot e)$$

3. 二次元噴流の基礎方程式

噴流においては重力項が零となる。そこで式 (18) の右辺第 1 項を零とし、噴流の相似解を求める。噴流においては、浮力束の代わりに運動量束が保存される。運動量束は次のように定義される。

$$M = \int_0^\infty u^2 dz = ab^2 x^{2m-1} \int_0^\infty F'^2 d\eta \dots\dots\dots (32)$$

相似解が得られるためには、式 (18), (20), (21), (32) の各項の x についてのべき乗が等しくなる必要がある。すなわち、

$$2m - 2l - 1 = n + l - 1 = 2p + m - q - 3l \dots\dots\dots (33 \cdot a)$$

$$m + n - l - 1 = 2p - q + n - 2l \dots\dots\dots (33 \cdot b)$$

$$m + p - l - 1 = 3p - q - 2l = 2p - q + 2m - 4l \\ = 2p - q + n - l \dots\dots\dots (33 \cdot c)$$

$$m + q - l - 1 = 2p - 2l = p + 2m - 4l = n - l \\ = 2q - p \dots\dots\dots (33 \cdot d)$$

$$2m - l = 0 \dots\dots\dots (33 \cdot e)$$

である。これを解くと各係数が次のように求められる。

$$l = 1 \quad m = 1/2 \quad n = -1/2 \quad p = -1 \quad q = -5/2 \\ \dots\dots\dots (34)$$

係数 a, b, d, e は式 (18), (20), (21), (32) の各項の係数が 1 となることにより求められる。すなわち、

$$\frac{ad^2}{be} = 1 \quad \frac{a^3 bd}{e} = 1 \dots\dots\dots (35 \cdot a, b)$$

$$\frac{e}{abd} = 1 \quad \frac{M}{ab^2} = 1 \dots\dots\dots (35 \cdot c, d)$$

これらを解くと、

$$a = 1 \quad b = M^{1/2} \quad d = M \quad e = M^{3/2} \dots\dots\dots (36)$$

となる。式 (34), (36) の結果を式 (18)~(21) に代入して整理すると次のようになる。

$$\frac{1}{2} F'^2 + \frac{1}{2} FF'' + \nu_1 F'' + \nu_2 F''' = 0 \dots\dots\dots (37)$$

$$(FG)' + \frac{1}{\sigma_1} (\nu_2 G') = 0 \dots\dots\dots (38)$$

$$FK' + \frac{1}{2} FK'' + \frac{1}{\sigma_2} (\nu_1 K' + \nu_2 K'') + \nu_1 F'' - E = 0 \\ \dots\dots\dots (39)$$

$$\frac{5}{2} F'E + \frac{1}{2} FE' + \frac{1}{\sigma_3} (\nu_1 E' + \nu_2 E'') \\ + c_{1\epsilon} \frac{E}{K} \nu_1 F'' - c_{2\epsilon} \frac{E^2}{K} = 0 \dots\dots\dots (40)$$

式 (34), (36) を式 (11) に代入すると相似変数、相似関数と次元量との関係が次のように求められる。

$$\eta = \frac{z}{x} \dots\dots\dots (41 \cdot a)$$

$$\phi = M^{1/2} x^{1/2} F(\eta) \dots\dots\dots (41 \cdot b)$$

$$u = M^{1/2} x^{-1/2} F'(\eta) \dots\dots\dots (41 \cdot c)$$

$$c = \frac{Q_c}{M^{1/2}} x^{-1/2} G(\eta) \dots\dots\dots (41 \cdot d)$$

$$k = Mx^{-1} K(\eta) \dots\dots\dots (41 \cdot e)$$

$$\epsilon = M^{3/2} x^{-5/2} E(\eta) \dots\dots\dots (41 \cdot f)$$

ただし、式 (41 \cdot d) は、式 (22) から求めたものである。

以上により得られた微分方程式 (37)~(40) は Paulay et al.¹⁵⁾ と同じであるが、彼らの解析では流下方向の運動量束の保存式 (32) を考慮していないために、係数 a, b, c, d, e を合理的に求めることができなかった。

4. 境界条件

式 (27)~(30), 式 (37)~(40) に対して境界条件を次のように設定する。中心軸に直交する流速成分が零となること、中心軸での速度勾配が零になること、中心軸に直交する相対密度差のフラックスが零となること、中心軸では k と ϵ が対称である。以上から中心軸での境界条件は次のようになる。

$$z = 0 \text{ で} \\ w = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial k}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

これらを無次元形で表わせれば次のようになる。

$$\eta = 0 \text{ で} \\ F = F'' = G' = K' = E' = 0 \dots\dots\dots (43)$$

中心軸から無限遠では、軸方向流速 u , 濃度 c , 乱流運動エネルギー k , 粘性逸散率 ϵ が零になる。すなわち、

$$z = \infty \text{ で} \\ u = c = k = \epsilon = 0 \dots\dots\dots (44)$$

これらを無次元形で表わせれば次のようになる。

$$\eta = \infty \text{ で,} \\ F' = G = K = E = 0 \dots\dots\dots (45)$$

以上のように問題は、二次元密度噴流に対しては境界条件式 (43), (45) のもとに常微分方程式 (27)~(30) を解くことに帰着する。同様に二次元噴流に対しては境界条件式 (43), (45) のもとに常微分方程式 (37)~(40) を解くことに帰着する。数値解析では中心差分法を採用し、方程式を離散化した計算領域は流速の半値幅の 3 倍程度とし、差分格子点数を 80 点あるいは 40 点とした。この計算格子点数は 40 点とすれば十分に精度が保証されることがわかったので、本論文での計算はすべて 40 点のものである。

4. 数値計算の結果 (実験値との比較)

以上の数値モデルを実験結果と比較する。まず、二次元密度噴流の結果について説明する。比較に用いた実験は Kotsovinos⁶⁾ および Yoshida¹²⁾ の実験データである。実験値を無次元化するため、浮力フラックスの値として、

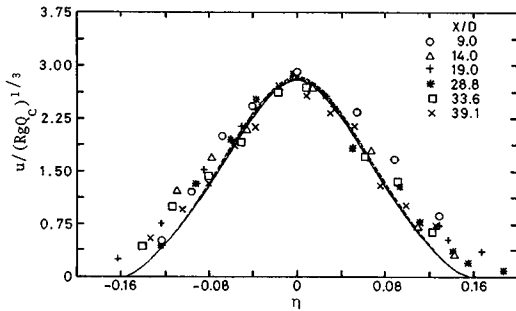


Fig. 2(a) Distribution of non-dimensional velocity of plane plume compared with Kotsovinos's PLVT 1⁶⁾. Solid line $\sigma_t=1.0$, long dash line $\sigma_t=0.8$, dash line $\sigma_t=0.6$.

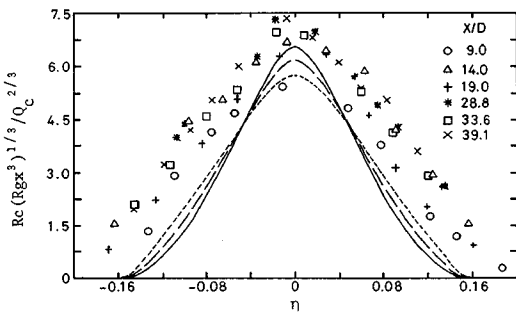


Fig. 2(b) Distribution of relative density of plane plume compared with Kotsovinos's PLVT 1⁶⁾.

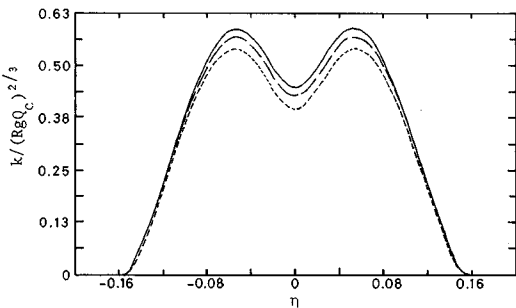


Fig. 2(c) Distribution of non-dimensional kinetic energy of turbulence of plane plume.

Kotsovinos の場合 $Q_c=0.0028 \text{ cm}^2/\text{s}$ を Yoshida の場合 $Q_c=0.0122 \text{ cm}^2/\text{s}$ を用いている。Fig. 2(a) は、Kotsovinos の密度噴流に対する平均流速分布の実験結果と数値解析の結果を無次元形 (式 (31・b)) で比較したものである。ここで、多少のデータのばらつきはあるものの実験結果と計算値との一致はかなり良好である。Fig. 2 (b) は Kotsovinos の密度噴流に対する平均相対密度差分布の実験結果と数値解析結果を無次元形 (式 (31・c)) で比較したものである。測定された相対密度差は、計算

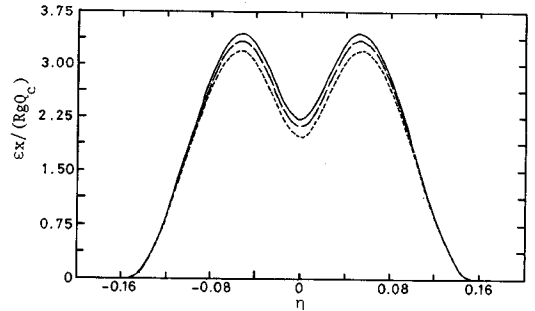


Fig. 2(d) Distribution of non-dimensional viscous dissipation rate of plane plume.

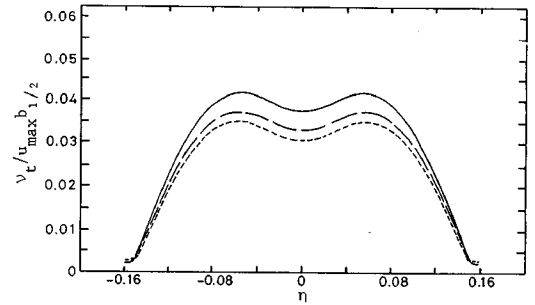


Fig. 2(e) Distribution of non-dimensional eddy viscosity of plane plume.

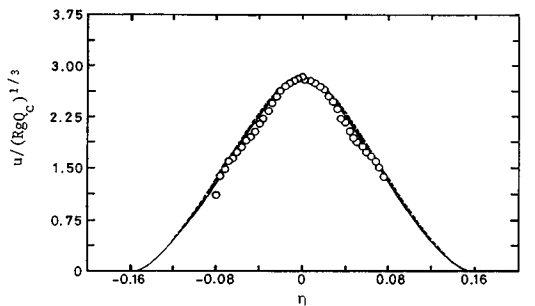


Fig. 3 Distribution of non-dimensional velocity of plane plume compared with Yoshida's experimental data¹²⁾, $x/D=200$.

値に対して噴流の外縁で 2 割程度大きな値を示す。この理由は明らかではないが、Kotsovinos⁶⁾ の実験がかなり小さいレイノルズ数で行われたこともその一因であろう。Fig. 2(c)~(e) には、二次元密度噴流の乱れの運動エネルギー k 、乱れの分子粘性逸散率 ϵ 、渦拡散係数 ν_t が図示されている。これらはいずれの中心軸に対して双頭形の分布形を示している。しかし、渦動粘性係数は、中心軸付近ではほぼ一定値を保っており、古典的な渦動粘性係数一定モデルの妥当性をうかがわせる。Fig. 3 は、Yoshida¹²⁾ の平均流速分布の実験値と計算値との比較である。計算値は実測値をかなりよく再現しているといえ

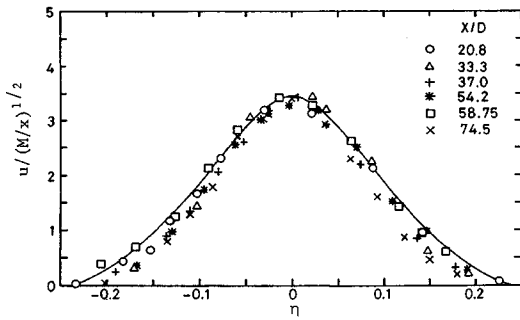


Fig. 4 (a) Distribution of non-dimensional velocity of plane jet compared with Kotsovinos's PLVT 2⁶).

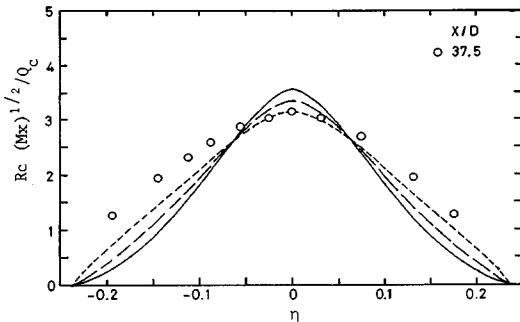


Fig. 4(b) Distribution of relative density difference of plane jet compared with Kotsovinos's PLVT 2⁶). Solid line $\sigma_r=1.0$, long dash line $\sigma_r=0.8$, dash line $\sigma_r=0.6$.

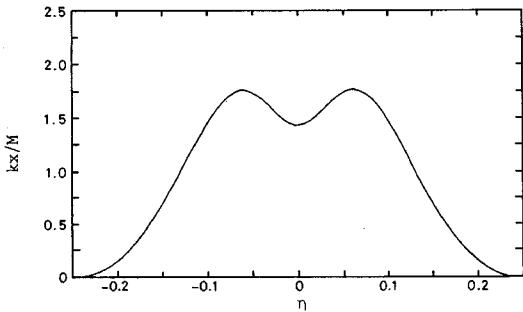


Fig. 4(c) Distribution of non-dimensional kinetic energy of turbulence of plane jet.

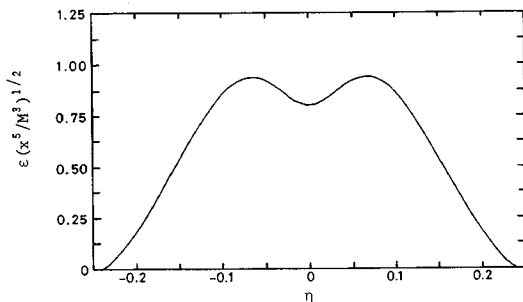


Fig. 4(d) Distribution of non-dimensional viscous dissipation rate of plane jet.

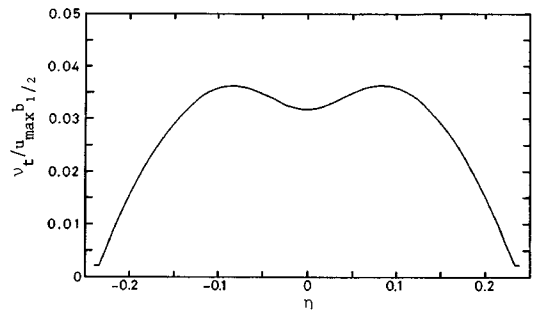


Fig. 4 (e) Distribution of non-dimensional eddy viscosity of plane jet.

る。

Fig. 4(a)~(e) は, Kotsovinos⁶⁾の二次元噴流に対する実験結果を計算値と比較したものである。ここで, 運動量束を $M=410 \text{ cm}^3/\text{s}$ で与えている。式 (37), (39), (40) から明らかなように, 平均流速, 乱れ運動エネルギー, 分子粘性逸散率は, 温度差によっては変化しない。Fig. 4(a) は平均流速分布の実験結果と数値解析の結果を無次元形 (式 (41·c)) で比較したものである。実測値は多少のばらつきはあるものの実験結果と計算値との一致はかなり良好である。Fig. 4(b) は Kotsovinos の二次元噴流に対する平均相対密度差分布の実験結果と数値解析の結果を無次元形 (式 (41·d)) で比較したものである。この場合にも測定された相対密度差は, 計算値に対して噴流の外縁で 2 割程度大きな値を示す。Fig. 4 (c)~(e) には, 二次元密度噴流の乱れの運動エネルギー k , 乱れの分子粘性逸散率 ϵ , 渦動粘性係数 ν_t が図示されている。これらはいずれの中心軸に対しても双頭形の分布形を示している。

Fig. 5 には, 計算で得られた二次元密度噴流と噴流の乱れ運動エネルギーの分布を比較して示している。乱れ運動エネルギーは, 最大流速 u_{max} で無次元化されている。Kotsivinos⁶⁾, 福岡, 佐藤⁹⁾は, 乱れ運動エネルギー

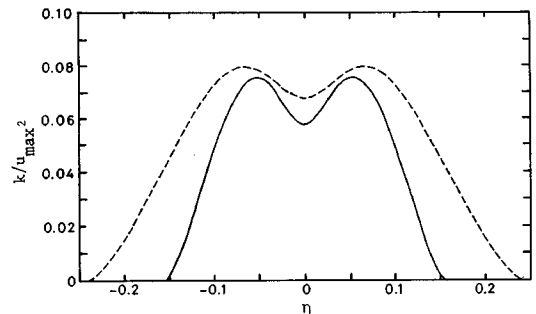


Fig. 5 Comparison of kinetic energy of turbulence between plane plume and plane jet. Solid line indicates plume, dash line indicates jet.

Table 1 Summary of calculational results.

	σ_t	$F(\infty)$ $\times 10$	F'_{max}	G_{max}	$\eta_{1/2}$	I_1	I_2	I_3	I_4	E_w $\times 10$	R_i $\times 10^2$
plume	0.6	2.262	2.84	5.77	0.0893	0.892	0.655	0.924	0.662	1.087	6.93
	0.8	2.228	2.81	6.18	0.0846	0.939	0.686	0.887	0.657	1.085	7.60
	1.0	2.202	2.79	6.55	0.0848	0.933	0.680	0.817	0.623	1.084	7.74
Jet	1.0	3.942	3.44	3.55	0.108	1.060	0.754	1.009	0.730	0.805	-

が噴流の場合には対称軸を挟んで双頭形の分布を示し、密度噴流の場合には対称軸付近で偏平な分布を得ている。今回の数値解析では、このような特性を見出されず、密度噴流と噴流のいずれの分布も中心軸を挟んで双頭形の分布となっている。また、相対的な乱れの強さは、噴流の方が密度噴流より大きい。この結果は、Kotsovinos の結果と反するものである。この理由は必ずしも明確ではないが、Kotsovinos の実験がきわめて低いレイノルズ数で行われていることが原因として考えられる。比較的高いレイノルズ数で行われた Yoshida¹²⁾ の測定では $u'^2/u_{max}^2=0.08$ のオーダーである。乱れ運動エネルギーに関してはさらに詳細な検討が必要である。

密度噴流、噴流の解析では、しばしば層積分法が用いられる。そこで本解析の結果を用いて層積分の値を求める。最大流速を u_{max} 、最大濃度を c_{max} 、最大流速の半値幅を $b_{1/2}$ とするとき、無次元流速分布、無次元濃度分布を次のように表わす。

$$u = u_{max} f(\xi) \quad c = c_{max} g(\xi) \dots\dots\dots (46)$$

ここで、 $\xi = z/b_{1/2}$ である。このとき、平均流に関する層積分は次のように定義される。

$$ub = u_{max} b_{1/2} \int_0^\infty f d\xi = u_{max} b_{1/2} I_1 \dots\dots\dots (47)$$

$$u^2 b = u_{max}^2 b_{1/2} \int_0^\infty f^2 d\xi = u_{max}^2 b_{1/2} I_2 \dots\dots\dots (48)$$

$$cb = c_{max} b_{1/2} \int_0^\infty g d\xi = c_{max} b_{1/2} I_3 \dots\dots\dots (49)$$

$$cub = c_{max} u_{max} b_{1/2} \int_0^\infty fg d\xi = c_{max} u_{max} b_{1/2} I_4 \dots\dots\dots (50)$$

このとき、層平均流速、層平均濃度、層厚が次のように求められる。

$$u = \frac{I_1}{I_1} u_{max} \quad b = \frac{I_1^2}{I_2} b_{1/2} \quad c = \frac{I_1}{I_3} c_{max} \dots\dots\dots (51)$$

式 (14)、(15) から、最大流速に対する連行係数が、次のように求められる。

$$E_0 = \frac{w_e}{u} = \frac{F(\infty)}{F'_{max}} \dots\dots\dots (52)$$

これに対してリチャードソン数は、式 (31・c)、(51) から次のように求められる。

$$R_i = \frac{Rgcb}{u_{max}^2} = \frac{I_1^2 G_{max} \eta_{1/2}}{I_2 F_{max}^2} \dots\dots\dots (53)$$

二次元噴流の連行係数は、次のように定義される。

$$E_0 = -\frac{W_e}{u_{max}} = \frac{1}{2} \frac{F(\infty)}{F'_{max}} \dots\dots\dots (54)$$

Table 1 に本解析で得られた式 (47)~(50) の積分と、式 (52)、(53) で定義される連行係数、層平均リチャードソン数をまとめて示す。噴流の連行係数は、密度噴流の連行係数の約 0.8 倍である。

6. 結 論

平面二次元密度噴流と噴流の特性を k-ε 乱流モデルにより検討した。その結果、いずれの場合も方程式系が相似解をもつことを示した。この相似解により、断面内の流速と濃度の分布形を求めることができるばかりでなく流下方向の発達過程をも知ることができる。相似解の数値解析を行い、実験結果と比較した結果、密度噴流と噴流のそれぞれの流速分布についてかなり良好な一致をみることができた。ただし、相対密度差の分布について、計算値は実測値に比べて広がり幅が小さい傾向がみられた。この点については、実験がかなり低いレイノルズ数で行われており乱流の発達が十分ではないことが理由として推定される。

本論文で比較に用いた実験は比較的小さいレイノルズ数に限定されていること、数値解析と乱流特性量との直接の比較がなされていないこと等、モデルの妥当性をさらに検討する必要がある。特にレイノルズ数の小さい流れに適用できるモデルの開発が必要であると考えられる。

謝 辞：早川典生長岡技術科学大学教授には、適切な論文の紹介を受けるとともに有益な議論をいただいた。また、本学技官 吉原 健氏には図面の清書を手伝っていただいた。ここに記して深甚なる謝意を表します。

APPENDIX

鉛直二次元密度噴流においては、乱れ運動エネルギーの式で浮力フラックスは $\overline{gc'u'}$ で与えられる。この項と乱れエネルギーの生成項の比をとると次のようになる。

$$\frac{\overline{g'c'u'}}{\nu(\partial u/\partial z)^2} = \frac{g\nu(\partial c/\partial x)}{\nu(\partial u/\partial z)^2} = \frac{g(\partial c/\partial x)}{(\partial u/\partial z)^2} \dots\dots (A.1)$$

ここで、流下方向の流れスケールを L 、これと直交方向の長さスケールを b とすると、式 (A.1) は次のようになる。

$$\frac{\overline{g'c'u'}}{\nu(\partial u/\partial z)^2} = \frac{gc/L}{(u_{\max}/b)^2} = \frac{gcb}{u_{\max}^2} \frac{b}{L} = R_i \frac{b}{L} \dots\dots (A.2)$$

ここで層平均リチャードソン数 R_i は 1 に比べて十分に小さく、境界層近似のもとでは $b/L \ll 1$ であるから、 $\overline{g'c'u'}$ は乱れエネルギー生成項に比べて十分に小さく無視できる。

参 考 文 献

- 1) Morton, B. R., Taylor, G. and Turner, J. S. : Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, Proc. Royal Soc. of London, Series A, Vol. 234, pp. 1~23, 1956.
- 2) Morton, B. R. : Forced plume, Jour. Fluid Mech., Vol. 5, pp. 151~163, 1959.
- 3) Turner, J. S. : Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge Univ. Press, pp. 178~187, 1973.
- 4) List, E. J. and Imberger, J. : Turbulent entrainment in buoyant jets and plumes, Jour. Hydraulic Div., Proc. ASCE, Vol. 99, HY 9, pp. 1461~1474, 1973.
- 5) Lee, S. L. and Emmons, H. W. : Jour. Fluid Mech., A study of natural convection above a line fire, Vol. 11, pp. 353, 1961.
- 6) Kotsovinos, N. E. : A study of the entrainment and turbulence in a plane buoyant jet, Ph. D. thesis, California Institute of Technology, 1975.
- 7) Kotsovinos, N. E. and List, E. J. : Plane turbulent jets, Part I Integral properties, J. Fluid Mech., Vol. 81, pp. 25~44, 1977.
- 8) Kotsovinos, N. E. : Plane turbulent jets, Part II Turbulent structure, Jour. Fluid Mech., Vol. 81, pp. 45~62, 1977.
- 9) 福岡捷二・佐藤郁太郎 : 二次元噴流中のオーガナイズドモーションの構造とその水理学的役割, 土木学会論文報告集, 第 277 号, pp. 71~83, 1978.
- 10) 小松利光・浦 勝 : 2次元密度 Plume に於ける組織渦の構造と連行現象, 第 28 回水理講演会論文集, pp. 311~319, 1984.
- 11) 室田 明・中辻啓二・玉井昌弘 : 二次元フォーストルームの大規模渦運動, 第 30 回水理講演会論文集, pp. 649~654, 1986.
- 12) Yoshida, J. : On the velocity fields and their variations in the two-dimensional forced plumes and the behavior of the two-dimensional dual plumes, Doctoral Thesis, Univ. of Tokyo, 1982.
- 13) List, E. J. : Turbulent jets and plumes, Ann. Rev. Fluid Dynamics, Vol. 14, pp. 189~212, 1982.
- 14) Sini, J. F. and Dekeyser, I. : Numerical prediction of turbulent plane jets and forced plumes by use of $k-\epsilon$ model of turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, No. 9, pp. 1787~1801, 1987.
- 15) Paullay, A. J., Melnik, R. E., Rubel, A., Rudman, S. and Siclairi, M. J. : Similarity solutions for plane and radial jets using a $k-\epsilon$ turbulence model, Trans. ASME, J. Fluids Eng., Vol. 107, pp. 79~85, 1985.
- 16) Rodi, W. : Turbulence Models and Their Application in Hydraulics, State of the Arts Paper, IAHR, 1980.
- 17) 福嶋祐介 : 乱流モデルによる傾斜壁面密度噴流の解析, 土木学会論文集, 第 399 号/II-10, pp. 65~74, 1988.
- 18) Fukushima, Y. and Fukuda, M. : Analysis of turbulent structure of open channel flow with suspended sediment, J. Hydrosoci. and Hydraul. Eng., JSCE, Vol. 4, No. 2, pp. 47~54, 1986.
- 19) 福嶋祐介・福田雅晴 : 乱流モデルによる非平衡浮遊砂流の解析, 第 32 回水理講演会論文集, pp. 413~418, 1988.
- 20) Rouse, H., Yih, C. S. and Humphreys, H. W. : Gravitational convection from a boundary source, Tellus, Vol. 4, pp. 201~210, 1952.

(1988. 7. 11・受付)