

## 平衡波数領域における乱れエネルギーのスペクトル特性

SPECTRAL PROPERTIES OF TURBULENT ENERGY  
IN THE EQUILIBRIUM WAVE NUMBER RANGE

小松利光\*・松本泰司\*\*・柴田敏彦\*\*\*・椿東一郎\*\*\*\*

By Toshimitsu KOMATSU, Yasushi MATSUMOTO, Toshihiko SHIBATA  
and Toichiro TSUBAKI

Turbulence measurement is carefully made with some special devices in a grid-turbulent flow with small turbulent Reynolds number in order to investigate the detail of viscous wave number subrange. The velocity fluctuations measured by a small hot film probe are analysed to determine the spectral power laws in the equilibrium wave number range. It is established that there exists  $-7$  power spectrum at higher wave numbers in the viscous subrange which is different from the earlier established  $-13/3$  power spectrum for lower wave numbers. Using the energy dissipation evaluated by the transport equation of turbulent energy, it is possible to determine all spectral constants of power laws for the equilibrium range and evaluation of the spectral properties. The spectra predicted with these spectral constants are consistent with many spectra measured by other investigators.

Keywords: spectrum of turbulence, viscous subrange, spectral constant

## 1. ま え が き

乱れの波数空間においてその中・高波数帯に局所等方性とみなされる平衡領域が存在し、慣性領域では乱れのスペクトルの $-5/3$ 乗則が成立することがよく知られている。一方、粘性域のスペクトルについては井上<sup>1)</sup>の $-3$ 乗則、Heisenberg<sup>2)</sup>の $-7$ 乗則などが提案されてきたが、広範な実験条件のもとでこれらのベキ乗則の成立性が確認されているわけではなく、スペクトル定数などなお不明な点が残されている。その中で、椿・小松<sup>3),4)</sup>は物理的考察と次元解析から粘性域のスペクトルとして $-13/3$ 乗則を提唱したが、その後いくつかの室内実験<sup>5)-8)</sup>と野外観測<sup>9)</sup>で $-13/3$ 乗則が成立することが報告されて

いる。物理的・次元的に推測されたスペクトル関数型の妥当性を確かめるためには、測定された波数スペクトルを両対数でプロットしたとき、スペクトルの勾配と関数型の

波数の指数が一致するだけでは不十分であり、スペクトル定数が広範な条件のもとに一義的に決定されることが必要である。 $-5/3$ 乗則については乱れエネルギー散逸率 $\varepsilon$ の算定の精度上の問題もあって、データに相当のばらつきはあるもののBradshaw<sup>10)</sup>やTownsend<sup>11)</sup>が従来の実験・実測データを整理して、主流方向の乱れに対して慣性域の $-5/3$ 乗則のスペクトル定数 $A_{5/3}=0.50\pm 0.05$ を与えている。粘性域の $-13/3$ 乗則については、著者らが乱流 Reynolds 数 $Re_t(\equiv \sqrt{u'^2} l/\nu, \sqrt{u'^2}$ :流れ方向の乱れ強度,  $l$ :積分長さスケール,  $\nu$ :動粘性係数)の大きい乱れ( $Re_t=1\ 218\sim 4\ 224$ )において $-13/3$ 乗則が成立することを確認し<sup>9)</sup>、続いて中程度の $Re_t$ 数(20.8~218)をもついくつかのタイプの乱流の実験値および従来の他の研究者の測定値から、 $A_{5/3}$ と $-13/3$ 乗則のスペクトル定数 $A_{13/3}$ の間の一義的な関係を求めた<sup>12)</sup>。しかしながら、 $A_{5/3}$ の値に若干の不確かさが残っていることから、 $A_{13/3}$ の正確な値を決定するには至っていない。

本文では、高波数域のスペクトルを精度よく測定し、かつ $\varepsilon$ を直接的に評価するために、小さな $Re_t$ 数の格子乱流の実験を行い、粘性域、特に $-13/3$ 乗則が成立する波数域とさらに高波数域のスペクトルについても測定・検討し、各スペクトルのスペクトル定数を決定する

\* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木学科  
(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)

\*\* 正会員 工修 福岡市土木局道路部街路課  
(〒810 福岡市中央区天神 1-10-1)

\*\*\* 正会員 九州大学技官 工学部水工土木学科

\*\*\*\* 正会員 工博 九州産業大学教授 工学部建築学科  
(〒813 福岡市東区松香台 2-327)

とともに、波数空間における乱れの特性について考察を加えている。

2. 平衡領域のスペクトルについて

(1) 粘性領域のスペクトル-13/3 乗則について  
粘性域の-13/3 乗則は次式で与えられる<sup>3)</sup>。

$$F(k) = A_{13/3} \epsilon^{4/3} \nu^{-2} k^{-13/3} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $k$  は波数である。

従来多くの研究者によって測られた乱れの実験・実測値を改めて調べてみると、粘性域において-13/3の勾配を示すスペクトルが数多くみられる<sup>13)-17)</sup>。例として Grant et al.<sup>13)</sup>が海峡における潮流観測で得たスペクトルと Kistler & Vrebalovich<sup>17)</sup>が格子乱流で得たスペクトルを Fig. 1 に示す。高波数域で-13/3の勾配とよく一致しており、式(1)の妥当性を示唆している。

ところで、波数空間におけるスペクトルに限らず、たとえば  $k$ - $\epsilon$  乱流モデル等にみられるように、乱流においてエネルギー散逸率  $\epsilon$  が乱れ特性量を規定するう

で本質的な役割を果たしていることが明らかとなっている。従来より  $\epsilon$  の算出に際しては、(a) 慣性域のスペクトルの-5/3乗則から逆算する方法、(b) 等方性乱流を前提として散逸スペクトルを波数空間で積分する方法、(c) 積分長さスケール  $l$  を算出し、これを用いて  $\epsilon$  を求める方法等が用いられてきた。この中で (a) の方法がその前提条件や精度、また容易さの点で最も優れていると結論付けられている<sup>18),19)</sup>。-5/3乗則がよい精度で成立しているときは (a) は確かに有力な  $\epsilon$  の算出法であるが、 $Re_t$  数の小さい流れでは-5/3乗則が成立しない場合も多く、また鉛直方向に密度勾配の存在する流れでも低波数側のスペクトルは浮力の影響を受けて変形し、慣性域までその影響を受けることが多い<sup>3),7),20)</sup>。また表面波や内部波の近傍でも波の引き起こす orbital motion によりスペクトル型が変形し、-5/3乗則が成立しない場合が多くみられる<sup>21)</sup>。このような場合は (a) の方法は使えない。(b) の方法も浮力効果を受けると乱れの非等方性が強くなること、また高波数領域における測定 noise の影響を直接受けて  $\epsilon$  を過大評価しやすいなどの難点があり、(c) の方法も高い精度を期待することはできない。一方、粘性域のスペクトルは生成域や慣性域のスペクトルと異なり、高波数で乱れも微小スケールのため、浮力や界面波の影響を受けずに成立する<sup>3),21)</sup> ことから、成層流や界面波の近傍においても  $\epsilon$  の算出に応用することができる。また、噴流のように波数スペクトルが正確に得られにくい流れでも粘性域のスペクトルは高波数であるため、Taylor の凍結乱流の仮定が精度よく成立し<sup>22)</sup>、したがって正確な波数スペクトルが得られやすいなどの利点がある。最近の乱流計測技術の発達によりスペクトルの粘性域の測定自体はそれほど困難ではないため、粘性域のスペクトルは十分有用な  $\epsilon$  の算出法となっており、スペクトル定数  $A_{13/3}$  の正確な決定が望まれている。

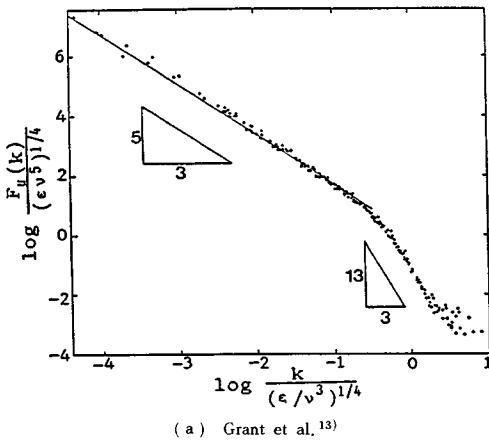
(2)  $A_{5/3}$  と  $A_{13/3}$  の間の関係

慣性域の-5/3乗則に引き続いて粘性域の-13/3乗則が普遍的に成立するならば、両対数で表示されたスペクトルの勾配が-13/3と一致するだけでなく、 $A_{13/3}$  が  $A_{5/3}$  と一義的に関係付けられることになる。著者ら<sup>12)</sup>は慣性域が存在するためには大きな  $Re_t$  数が必要という条件と粘性域のスペクトルを実験的に検出するためには小さな  $Re_t$  数が望ましいという条件の妥協点として中程度の乱流 Reynolds 数 ( $Re_t=20.8\sim 218$ ) をもつ一様格子乱流・開水路せん断流・せん断格子乱流の実験を行い、 $\epsilon$  を直接用いず、 $\epsilon$  に比例する量

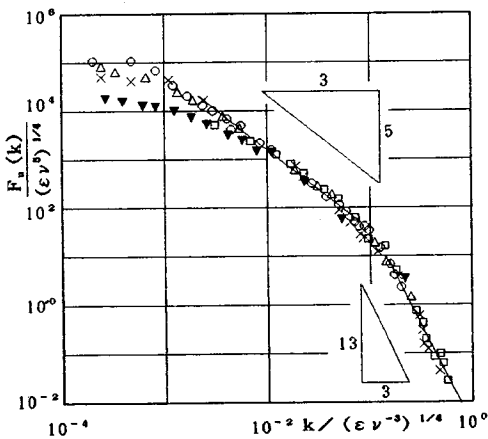
$$\chi = (A_{5/3})^{3/2} \cdot \epsilon = \{k^{5/3} F_u(k)\}^{3/2} \dots\dots\dots (2)$$

を導入して、 $A_{5/3}$  と  $A_{13/3}$  を関係付ける次式を得た。

$$A_{13/3}/(A_{5/3})^2 \equiv a = 0.032 \dots\dots\dots (3)$$



(a) Grant et al.<sup>13)</sup>



(b) Kistler & Vrebalovich<sup>17)</sup>

Fig. 1 Spectra of turbulence.

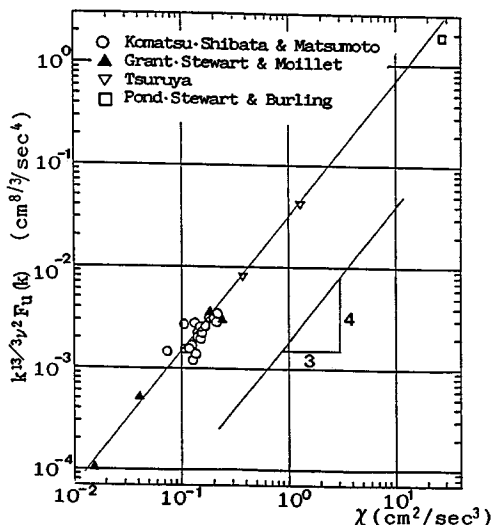


Fig. 2 Verification of applicability of eq. (3).

従来多くの研究者による乱れの実験・実測データのうち、 $\nu$  や粘性域の波数スペクトル  $F(k)$  が与えられているデータ<sup>9), 13)-15)</sup>について  $\chi$  を用いた同様の整理を行って示したのが Fig. 2 である。同図には式 (3) に対応する関係を実線で示しているが、両者はよく一致しており、従来の他の研究者によって得られた条件の異なる多くのスペクトルからも式 (3) の  $a$  値の妥当性が明らかとなっている。なお、Gibson & Schwarz<sup>16)</sup> が格子乱流で得たスペクトルは無次元形で与えられているため  $\chi$  の値が評価できず、上述の整理はできないが  $a$  値は求めることが可能で式 (3) とほぼ同じ値が得られている。

(3) 超高波数域のスペクトルについて

慣性域の  $-5/3$  乗則に引き続いて粘性域の  $-13/3$  乗則が成立することが示されたが、このスペクトル則が無制限の波数域まで成立するわけではない。著者ら<sup>12)</sup>は無次元波数  $k/(\chi\nu^{-3})^{1/4} \approx 0.80$  以上の波数域ではスペクトルは  $-13/3$  乗則からはずれて、より急勾配で低下することを報告したが、詳細は今までのところ不明である。

このような超高波数域のスペクトルを精度よく測定するためには以下に述べるようないくつかの工夫が必要となる。

a) できるだけサイズが小さくて高い周波数応答性をもつ乱流検出プローブを用いる。

b) 測定器の  $S-N$  比の精度的な限界から、粘性域よりも低い波数域の乱れのエネルギーはできるだけ小さいことが望ましい。

c) スペクトルの粘性領域ができるだけ低波数側に生じるような乱れの方が望ましい。

(a) については、周波数応答性に優れた機器として、水流では hot film 流速計、レーザー流速計が挙げられ

るが、レーザー流速計については  $S-N$  比の問題や混入粒子の通過流動の間欠性のため、高波数のスペクトルの測定には不向きであることがわかっている。したがって検出部の極力小さな hot film 流速計が今のところ最適である。(b) の条件に対しては、小さな乱流 Reynolds 数  $Re_\tau$  の流れが必要である。これは  $Re_\tau$  数が大きいと慣性波数領域が長くなり、 $-5/3$  乗則の成立する波数域が広がるため慣性域の内の低波数部の乱れのエネルギーと粘性域の乱れエネルギーの差が大きくなり、測定器のもつ  $S-N$  比の精度的限界から粘性域の小さなエネルギーがノイズに埋もれて検出できなくなるからである。(c) の条件は、流速計の検出部が有限であることから生じる測定可能な波数の物理的限界によるものである。粘性域の波数域は後述のように無次元波数  $k_*$  で示される。

$$k_* \equiv k/(\varepsilon\nu^{-3})^{1/4} \sim \frac{k}{(\sqrt{u^2} l/\nu)^{3/4}} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{Re_\tau^{1/4} l}$$

したがって粘性域における  $k$  を小さくするためには、積分長さスケール  $l$  が大きくて、 $Re_\tau$  数が小さいことが必要である。ただ、 $Re_\tau$  数の中にも  $l$  が含まれているので、 $l$  をあまり大きくはできないが  $\sqrt{u^2}$  を小さくすることにより  $Re_\tau$  数を小さくすることは可能である。

以上 (b), (c) の条件から超高波数域のスペクトルを精度よく測定するためには、慣性域をある程度犠牲にしても積分長さスケール  $l$  はある程度大きい方が、 $Re_\tau$  数のごく小さい乱流場が必要となる。

3. 実験の方法とデータの処理

(1) 一様格子乱流について

今回の乱れの計測は一様格子乱流について行われたが、乱れの場合として一様格子乱流を採用した理由は以下のようである。

a) スペクトル定数の決定には正確に評価されたエネルギー散逸率  $\varepsilon$  の値が必要である。一様格子乱流では  $\varepsilon$  は乱れの空間的な減衰則から直接求めることができる。

b) 積分長さスケールや乱れ強度を格子のサイズや平均流速  $U$  で容易に調整でき、小さな  $Re_\tau$  数の乱れを作りやすい。

c) セン断流と比較して Taylor の凍結乱流の仮定が高い精度で成立する。

d) 等方性に近い乱流場が得られるので、比較的波数域まで局所等方性が成立していることが期待される。

(2) 実験装置と方法

実験は2種類の実験装置と実験条件 (case I, case II) のもとで行われた。case I では長さ 10 m, 幅 15 cm, 高さ 15 cm の透明アクリル製水路を用い、case II では長さ 8 m, 高さ 17 cm, 幅 17.5 cm の透明アクリル製水路

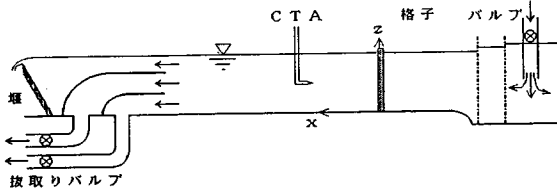


Fig. 3 Schematic diagram of experimental set-up.

を用いた (Fig. 3). 流れは上流側で縮流されており、ほぼ一様な断面流速分布となったところに正方格子を設置した。使用した格子は case I では幅・厚さともに 0.5 cm の角棒を縦横に重ねて中心間隔 2.5 cm で組んだものを、また case II では直径 0.3 cm の丸棒を中心間隔 1.6 cm で縦横に重ねて組んだものを用いた。流れは流下するに従って徐々にせん断流へと移行していくが、その過程を少しでも遅らせるため下流部底面付近に 2 段に分けて流下水の抜取り用バルブを設置し、流れが一樣流を保つように調節した。座標は格子位置水路底面を座標原点として流下方向に  $x$  軸、鉛直上向きに  $z$  軸、奥行き方向に  $y$  軸をとった。

流速の測定は hot film 流速計を用いた。検出部の大きさが 0.5 mm と非常に小さい conical type の 1 方向プローブをスペクトル測定用に使用し、 $y, z$  方向の乱れ、 $v, w$  の測定には V 型 2 方向 hot film プローブを使用した。2 方向プローブについては検出部を鉛直にセットして  $u, w$  を測定し、軸の回りに 90° 回転して  $u, v$  を測定した。V 型 2 方向プローブは 2 個のセンサー部分が互いに 2 mm 程度離れているため、高波数域のスペクトルの測定には適さない。したがって得られたデータの使いは乱れエネルギー  $q^2 = (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})/2$  の算定と慣性域のスペクトルの算出のみに限定した。格子の下流側  $x=3\sim 84$  cm にわたって流水断面中央部で測定を行ったが、格子直後と格子から大きく離れた下流の乱れが非常に弱い領域のデータは除いた。実験条件を Table 1 に示す。得られた乱れの乱流 Reynolds 数は case I で  $Re_t = 32.4\sim 124$ , case II では  $Re_t = 17.5\sim 42.5$  であった。なお、データの収録に際してはデータの S-N 比を高めるために著者ら<sup>9)</sup>が野外観測で用いた手法を採用した。すなわち、平均流速を求めるためのデータ (a) と乱れの成分を精度よく求めるためのデータ (b), そしてエネルギーレベルの低い高周波 (高波数) 成分だけを取り出すデータ (c) とに分けて収録した (Fig. 4). (a) のデータは hot film 流速計 (CTA) からの生のデータで、(b) のデータは平均量を差し引いた乱れの成分だけを取り出し、データレコーダーの許容範囲ぎりぎりまで増幅して (1~11 倍) 収録したものである。また (c) のデータは高周波数の乱れのデータを精度よく得るために、エネ

Table 1 Experimental conditions.

case	RUN	水深 $h$ (cm) at $X=0$	流速 $U$ (cm/s)	水温 ( $^{\circ}C$ )
case I	RUN I	12.9	13.1	27.0
	RUN II	11.8	10.0	27.6
case II	RUN III	17.4	19.4	13.4
	RUN IV	15.4	13.7	12.5
	RUN V	16.3	21.1	12.9

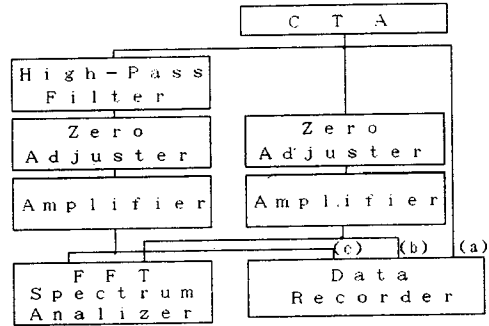


Fig. 4 Block diagram of the measuring equipment.

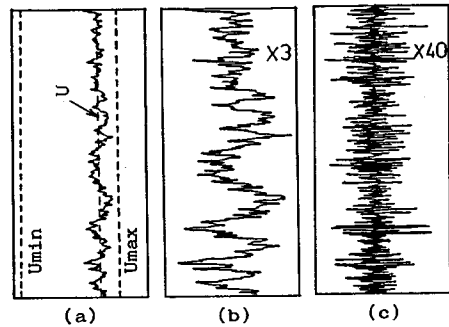


Fig. 5 Measured data of turbulence.

ルギーレベルの高い低周波数域の成分を high-pass filter で除去した後やはりデータレコーダーの入力範囲ぎりぎりまで増幅して (2~200 倍) 収録したものである。(b), (c) のデータについてはモニターとして 2 ch FFT Spectrum Analyzer (小野測器(株)製) に入力させてディスプレイされたスペクトルをみながら high-pass filter の cut の周波数  $f_c$  を測点ごとに決定した。測点によって多少変わるが、多くの測点で  $f_c = 46$  Hz または 93 Hz を採用した。

(3) データ処理

データレコーダーに収録された時系列のデータの一部を Fig. 5 に示す。これらのデータは A-D 変換の後、統計処理された。サンプリング間隔は case I で  $\Delta t = 1/375$  s, データ個数は 1 測点につき  $N = 16384$  個, case II では  $\Delta t = 1/750$  s,  $N = 32768$  個とした。スペク

トルはFFT法で計算し、周波数空間から波数空間へのスペクトルの変換はTaylorの凍結乱流の仮定を用いた。乱れの積分スケール  $l$  は自己相関係数を積分することにより求めた。得られたスペクトルの一例を Fig. 6 に示す。(b), (c) のデータにより高波数のスペクトルが精度よく得られていることがわかる。(b), (c) のデー

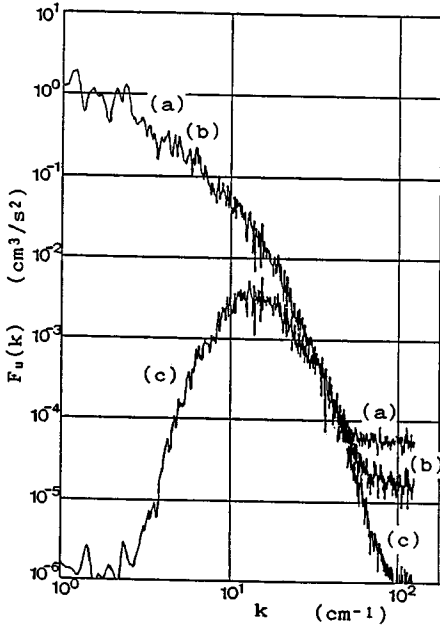


Fig. 6 An example of measured spectrum of  $u$ .

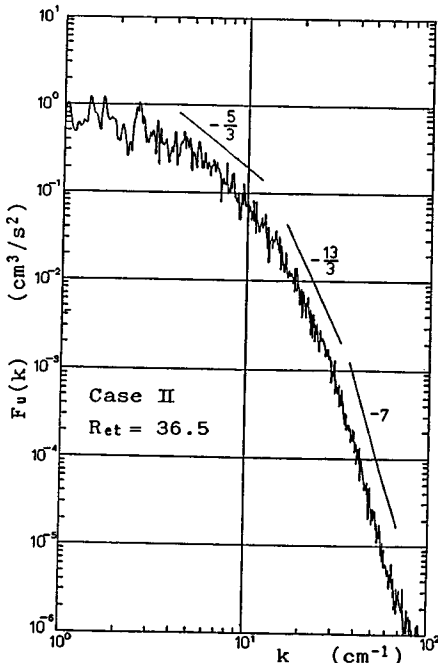


Fig. 7 An example of combined spectrum of  $u$ .

タより得られたスペクトルを  $f_c$  よりやや高波数の両者のスペクトルがよく一致する領域で連結し、低波数側を (b) から計算されたスペクトル、高波数側を (c) から計算されたスペクトルで表わせば低波数域から高波数域にわたる高精度のスペクトルが得られる。

主流方向の乱れ  $u$  のスペクトルの代表的な一例を Fig. 7 に示す。慣性域の  $-5/3$  乗則、粘性域の  $-13/3$  乗則がみられるが、 $Re_\tau$  数が小さな流れのため乱れの生成域と慣性域は接近し、慣性域の  $-5/3$  乗則の成立する波数域はきわめて狭くなっている。

なお、粘性域のスペクトル測定に用いた conical type の hot film probe は現時点で用意できる最小の probe であるが、それでも有限の大きさをもつため検出できる乱れの波数には当然限界がある。probe の大きさは 0.5 mm であるから検出できる渦は最小でも probe の大きさの 2 倍程度のせいぜい 1 mm 程度の渦径の渦であると思われる。したがって検出可能な最大波数  $k_N$  は  $k_N = 2\pi / (\text{検出可能な最小渦径}) = 2\pi / 0.1 \approx 63 (\text{cm}^{-1})$  となることから、本論文におけるスペクトルの解析・考察の対象はすべておよそ  $60 (\text{cm}^{-1})$  以下の波数領域に限ることとする。また特に添字を付けてないスペクトルやスペクトル定数は以後は  $u$ -変動に関する量とする。

#### 4. 実験結果の解析とその考察

##### (1) エネルギー散逸率 $\epsilon$ の算出

本論文は慣性域から粘性域にわたるスペクトルのスペクトル定数を正確に決定することを目的の一つとしているため、エネルギー散逸率  $\epsilon$  をスペクトルを使わずに精度よく算出することが必要である。

ここでは、乱れエネルギー  $\overline{q^2} (\equiv (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})/2)$  の輸送方程式を定常な一樣格子乱流に適用して  $\epsilon$  を求めることにする。圧力動揺の寄与を無視すると次式が得られる。

$$U \frac{d}{dx} (\overline{q^2}) = -\frac{d}{dx} (\overline{uq^2}) - \epsilon \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $U$  は断面一様平均流速、 $v$ ,  $w$  は  $y$ ,  $z$  方向の流速変動である。乱れエネルギー  $\overline{q^2}$  の評価は

$$\overline{q^2} = \frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) = \frac{1}{2} \overline{u^2} \left( 1 + \frac{\overline{v^2}}{\overline{u^2}} + \frac{\overline{w^2}}{\overline{u^2}} \right) \dots \dots \dots (5)$$

を用い、 $1/2 \cdot \overline{u^2}$  は各測点ごとに conical type の hot film probe のデータから求め、 $\overline{v^2}/\overline{u^2}$ ,  $\overline{w^2}/\overline{u^2}$  は同じ測点で測定された V 型 2 方向 hot film probe のデータから求めた。また乱れエネルギーの拡散 flux 量  $\overline{uq^2}$  の評価は

$$\overline{uq^2} = \frac{1}{2} (\overline{u^3} + \overline{uv^2} + \overline{uw^2}) = \frac{1}{2} \overline{u^3} \left( 1 + \frac{\overline{uv^2}}{\overline{u^3}} + \frac{\overline{uw^2}}{\overline{u^3}} \right) \dots \dots \dots (6)$$

を用いて、各測定点ごとに評価した。式 (5), (6) を式 (4) に代入し、変形すると

$$\epsilon = -\frac{d}{dx} (U \cdot \overline{q^2} + uq^2) \dots \dots \dots (7)$$

となり、 $\overline{q^2}$  の total energy flux の流れの方向の勾配から  $\epsilon$  を各測定点について算出することができる。

(2) スペクトル定数  $A_{13/3}$ ,  $A_{5/3}$  の決定

従来の研究で  $A_{5/3}$  と  $A_{13/3}$  の間の一義的な関係式 (3) が明らかになったことから、 $-13/3$  乗則が普遍的に成立することが示されたが、 $\epsilon$  が与えられていなかったため  $A_{13/3}$  の正確な値の決定には至らなかった。

式 (1) の  $-13/3$  乗則を変形すると、

$$k^{13/3} F(k) \nu^2 = A_{13/3} \cdot \epsilon^{4/3} \dots \dots \dots (8)$$

となる。今回の測定から得られた多くのスペクトル図の  $-13/3$  乗則の成り立つ領域から 1 つのスペクトルにつき 1 点の  $k$  と  $F(k)$  を読み取り、式 (8) の左辺を計算し、各測点ごとの  $\epsilon$  に対してプロットしたのが Fig. 8 である。

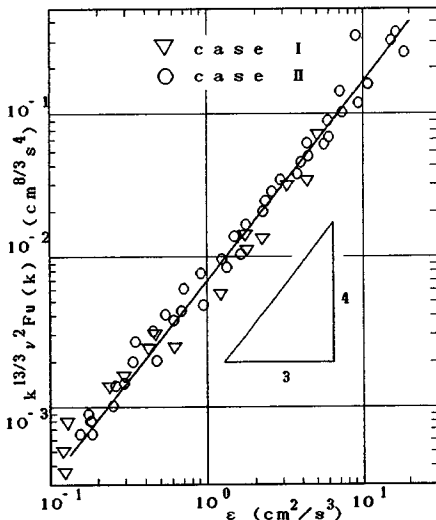


Fig. 8 Verification of validity of eq. (1), (9).

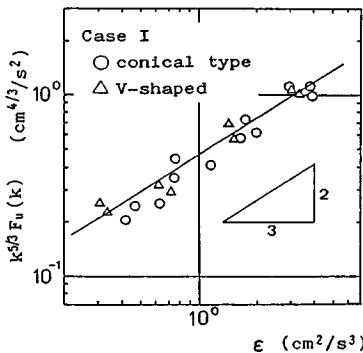


Fig. 9 Verification of validity of the spectral constant  $A_{5/3}$ .

両対数グラフにおいて勾配  $4/3$  の直線を示しており、式 (1) の  $-13/3$  乗則の妥当性が改めて確かめられた。 $\epsilon=1$  のときの Fig. 8 の値からスペクトル定数  $A_{13/3}$  が求められ次のようになる。

$$A_{13/3} = 0.0072 \dots \dots \dots (9)$$

慣性域の  $-5/3$  乗則は次式

$$F(k) = A_{5/3} \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \dots \dots \dots (10)$$

で与えられるが、式 (3) に  $A_{13/3} = 0.0072$  を代入するとスペクトル定数  $A_{5/3} = 0.47$  が得られる。

Fig. 9 は  $Re_\tau$  数の比較的大きい case I のスペクトルにおいて  $-5/3$  乗則が成り立つ波数域の  $k$  と  $F(k)$  を 1 点読み取り  $k^{5/3} F(k)$  を計算し、 $\epsilon$  に対してプロットしたものである。同図には  $\epsilon=1$  で  $0.47$  となる勾配  $2/3$  の直線も記入しているが実験値との一致は良好であり、

$$A_{5/3} = 0.47 \dots \dots \dots (11)$$

が妥当な値であることを示している。またこの  $A_{5/3}$  値は従来の研究をまとめた Bradshaw<sup>10)</sup> や Townsend<sup>11)</sup> の値ともよく一致している。

(3) 粘性域の第 2 スペクトル

今回の実験から  $-13/3$  乗則の成立する波数域よりもさらに高波数側のスペクトルを調べることができた。これは低い乱流 Reynolds 数の流れを作ることにより、粘性波数領域を低波数側に移行させることができたからである。Fig. 7 から明らかなように、またその他今回得られた多くのスペクトル図から、 $-13/3$  乗則に引き続いて Heisenberg の提唱した  $-7$  乗則<sup>2)</sup> が成立することが示唆されている。Heisenberg の  $-7$  乗則は次式で与えられる。

$$F(k) = A_7 \epsilon^2 \nu^{-4} k^{-7} \dots \dots \dots (12)$$

何故に粘性領域が 2 つのべき乗則に分割されて  $-13/3$  乗則と  $-7$  乗則になるのかは今のところ明らかではないが、もし、本当に式 (12) が  $-13/3$  乗則に引き続いて普遍的に成り立つのであれば両者のスペクトル定数  $A_{13/3}$  と  $A_7$  の間に一義的な関係がなければならない。

いま、式 (1) を用いて  $\epsilon$  に比例する量  $\chi_1$  を次のように定義する。

$$\chi_1 \equiv (A_{13/3})^{3/4} \epsilon = |k^{13/3} \nu^2 F(k)|^{3/4} \dots \dots \dots (13)$$

$\chi_1$  の値はスペクトル図の  $-13/3$  乗則が成立している波数領域から 1 点の  $k$  と  $F(k)$  を読み取ることにより式 (13) から各測点ごとに求められる。

一方、式 (12) の  $-7$  乗則を変形し、 $\epsilon$  の代わりに  $\chi_1$  を用いて表わすと

$$k^7 \nu^4 F(k) = A_7 \cdot \epsilon^2 = \{A_7 / (A_{13/3})^{3/2}\} \chi_1^2 \dots \dots \dots (14)$$

となる。各スペクトル図において  $-7$  乗則が成り立っている波数域から 1 点の  $k$  と  $F(k)$  を読み取り、式 (14) の左辺を計算し、式 (13) から求めた同一測点の  $\chi_1$  に対してプロットしたのが Fig. 10 である。

両対数グラフにおいてプロットされた点は勾配2の直線によく一致しており式(14), すなわち式(12)の-7乗則が普遍的に成立していることを示している。 $\chi_1=1$ のときのFig. 10の値から

$$A_7 = b(A_{13/3})^{3/2} = 2.5(A_{13/3})^{3/2} \dots\dots\dots (15)$$

が得られ,  $A_{13/3}$  と  $A_7$  の間の一義的な関係が求まった。

-13/3乗則に引き続いて-7乗則が成り立つことが示されたので, 次にスペクトル定数  $A_7$  を直接求めることにする。各スペクトル図の粘性域で-7乗則の成立して

いる波数域から1点の  $k$  と  $F(k)$  を読み取り  $k^7 \nu^4 F(k)$  を計算し, 各測点ごとの  $\varepsilon$  に対してプロットしたのがFig. 11である。 $\chi_1$  に比べ乱れの輸送方程式から求めた  $\varepsilon$  の精度が若干落ちるため Fig. 11は Fig. 10と比べるとやや散らばりがみられるが, 勾配2の直線を示している。

$\varepsilon=1$  のときの値からスペクトル定数  $A_7$  が得られ,

$$A_7 = 0.0015 \dots\dots\dots (16)$$

となる。この  $A_7$  値を式(15)に代入して  $A_{13/3}$  を逆算すると  $A_{13/3} = 0.0071$  となり, 前に求めた  $A_{13/3}$  値とよく一致する。

(4) スペクトルの無次元表示と内挿式

乱れのスペクトルは慣性域で-5/3乗則, 粘性域の第1スペクトルとして-13/3乗則, それに続く第2スペクトルとして-7乗則が成立することを示し, おのおののスペクトル定数を一義的に決定することができた。これらの平衡波数領域のスペクトルはいずれも  $k, \varepsilon, \nu$  によって規定されているため,  $F(k)$  および  $k$  を  $\varepsilon$  と  $\nu$  で無次元化して表わすことができる。 $Re_\tau$  数の異なる乱れ  $u$  の9個のスペクトルを無次元化してプロットしたのがFig. 12である。 $Re_\tau$  数が小さいため, 慣性域の低

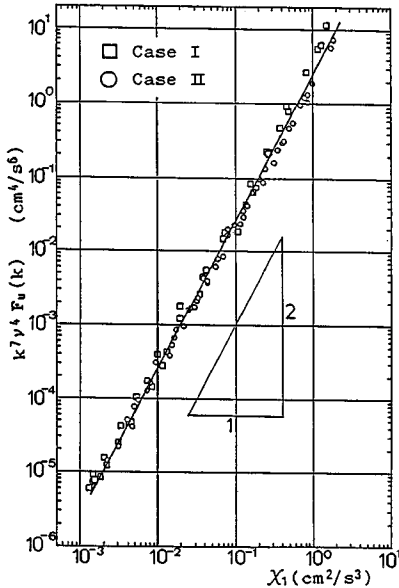


Fig. 10 Verification of validity of -7 power spectrum law.

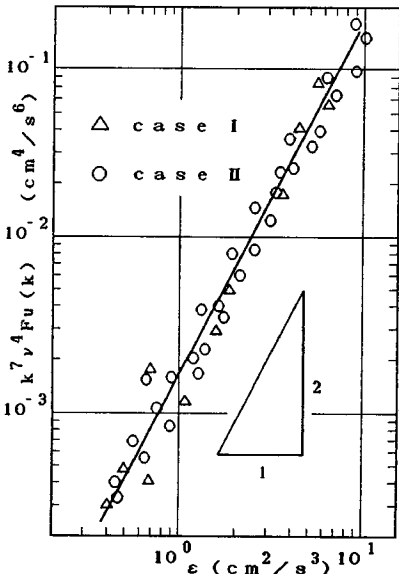


Fig. 11 Derivation of spectral constant  $A_7$ .

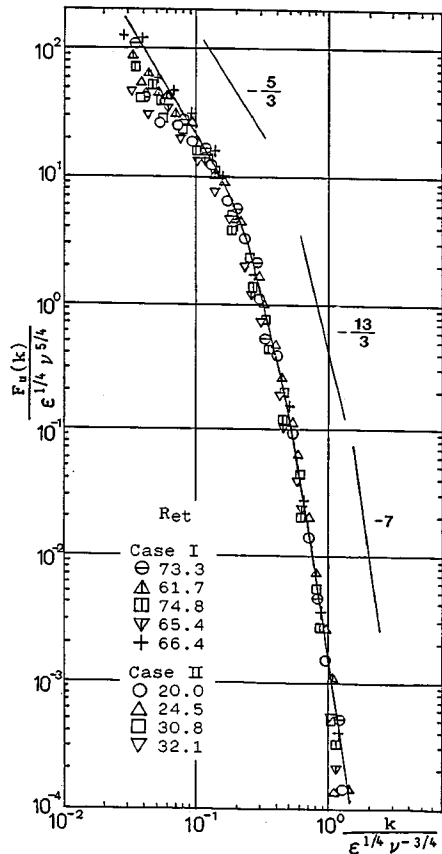


Fig. 12 Normalized form of  $F(k)$ .

波数側で若干散らばりがみられるが、1本の曲線で普遍表示できることがわかる。スペクトルの勾配は慣性域で $-5/3$ 、粘性域で $-13/3$ 、 $-7$ によく一致している。Fig. 12にみられるように慣性域と粘性域の間の遷移領域ではかなりシャープに $-5/3$ 乗則から $-13/3$ 乗則に移行しているが著者ら<sup>12)</sup>は両波数域にわたる内挿式を今回の実験より大きな  $Re_\tau$  数の実験から次のように求めている。

$$F_*(k) \equiv \frac{F(k)}{\varepsilon^{1/4} \nu^{5/4}} = A_{5/3} k_*^{5/3} \left[ 1 + \left( \frac{A_{13/3}}{A_{5/3}} \right)^{-5/3} k_*^{40/3} \right]^{-3/5} \dots\dots\dots (17)$$

ここで  $k_* = k/(\varepsilon\nu^{-3})^{1/4}$  である。上式が  $k_* \rightarrow 0$  で式 (10) の $-5/3$ 乗則に、 $k_* \rightarrow \infty$  で式 (1) の $-13/3$ 乗則に漸近するのはもちろんである。

また粘性域の第1スペクトルの $-13/3$ 乗則と第2スペクトルの $-7$ 乗則の間の遷移領域を内挿するスペクトル式も同様に求めると

$$F_*(k) = A_{13/3} k_*^{13/3} \left[ 1 + \left( \frac{A_7}{A_{13/3}} \right)^{-13/3} k_*^{88/3} \right]^{-3/11} \dots\dots (18)$$

が得られる。上式は  $k_* \rightarrow 0$  で式 (1) の $-13/3$ 乗則、 $k_* \rightarrow \infty$  で式 (12) の $-7$ 乗則に漸近する。

それぞれのスペクトル定数、式 (9), (11), (16) を内挿式 (17), (18) に代入して、両式の交点の波数  $k_{*a} = 0.375$  より低波数側に式 (17)、高波数側に式 (18) を用いて Fig. 12 に実線で示す。慣性域の低波数部を除く全域で実験値とよく一致している。

慣性域と粘性域の無次元境界波数  $k_{*a}$ 、および第1粘性域と第2粘性域の無次元境界波数  $k_{*b}$  をそれぞれベキ乗則式 (10) と式 (1) および式 (1) と式 (12) の交点の波数で定義すると

$$k_{*a} = \left( \frac{A_{13/3}}{A_{5/3}} \right)^{3/8} = 0.209, \quad k_{*b} = \left( \frac{A_7}{A_{13/3}} \right)^{3/8} = 0.555 \dots\dots\dots (19)$$

となり、Kolmogoroff の局所スケール  $l_\nu = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$  を用いて表わすと渦径はそれぞれ  $30 l_\nu$ 、 $11 l_\nu$  となる。

(5) 散逸スペクトルとエネルギー散逸

乱れエネルギーの散逸スペクトルは  $k^2 F(k)$  で与えられる。平衡領域におけるスペクトルを式 (17), (18) で表わすと無次元散逸スペクトルは Fig. 13 のように表わされる。

等方性近似によるとエネルギー散逸率  $\varepsilon$  は

$$\varepsilon = 15 \nu \int_0^\infty k^2 F(k) dk \dots\dots\dots (20)$$

で与えられる。 $\varepsilon$ 、 $\nu$  で無次元化すると式 (20) は

$$1 = 15 \int_0^\infty k_*^2 F_*(k_*) dk_* \dots\dots\dots (21)$$

となるが、Fig. 13 の散逸スペクトルを数値積分して、式 (21) の右辺を求めると 1.03 となり、式 (21) をよ

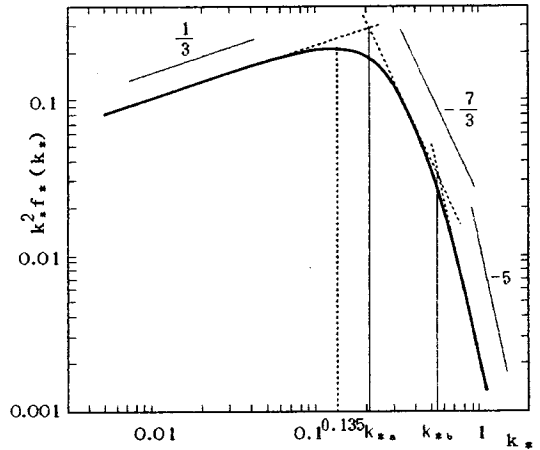


Fig. 13 Normalized spectrum of dissipation.

い精度で満足している。このことから式 (17), (18) の内挿式がほぼ妥当であることがわかる。Fig. 13 の散逸スペクトルは慣性域と粘性域の遷移領域である  $k_* = 0.135$  でピークをもち、この波数の渦の大きさ  $L_p$  は Kolmogoroff の局所スケールを用いて表わすと、 $L_p = 46.5 l_\nu$  となる。この散逸スペクトルのピーク波数よりも小さい波数域における散逸量の全体に占める割合は 35% で、ピーク波数よりも大きい波数域での散逸率は 65% である。

各波数小領域での乱れエネルギーの散逸量を調べてみると意外にも慣性域 ( $k_* < k_{*a}$ ) 58%、第1粘性域 ( $k_{*a} < k_* < k_{*b}$ ) 38%、第2粘性域 ( $k_{*b} < k_*$ ) 4% となり、慣性域と粘性域の間の遷移領域で多くの乱れが散逸されている。第2粘性域は当然波数は大きい乱れエネルギーが極端に小さいため、エネルギー散逸の占める割合も小さくなっている。

波数空間を cascade down するエネルギー量  $\varepsilon_i(k)$  は次のように求められる。

$$\varepsilon_i(k) = 15 \nu \int_k^\infty k'^2 F(k') dk' \dots\dots\dots (22)$$

得られた  $\varepsilon_i(k)$  を  $\varepsilon$  で無次元化して Fig. 14 に示す。 $k_{*a}$  で  $\varepsilon_i/\varepsilon = 0.42$ 、 $k_{*b}$  で  $\varepsilon_i/\varepsilon = 0.047$  となり、高波数に行くに従い  $\varepsilon_i$  は急激に減少する。散逸スペクトルがピークになる  $k_* = 0.135$  でも  $\varepsilon_i/\varepsilon = 0.65$  であり、予想外に低い。特にスペクトルの勾配から判断すると完全に慣性域に属する  $k_* \approx 0.1$  の領域で cascade down するエネルギーがすでに 2 割強も減少しているのは意外ですらある。

(6)  $v$ 、 $w$  のスペクトルと局所等方性

局所等方性の概念は乱流理論の重要な根幹をなすものとして今日まで広く受け入れられてきた。しかしながら実験による局所等方性の直接的な検証は少ないようであ



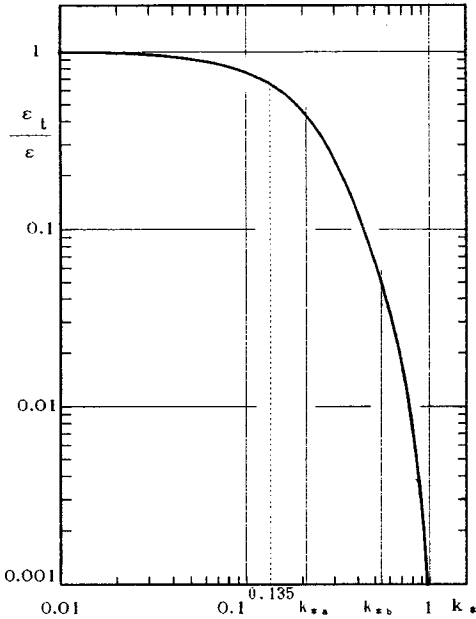


Fig. 14 Turbulent energy  $\epsilon_l$  which is transferred through the spectrum of turbulence.

る。Grant et al.<sup>13)</sup>は潮流の乱れの測定からまた Kistler & Vrebalovich<sup>17)</sup>は格子乱流の乱れの測定からスペクトルを求め局所等方性について再検討し、Gibson<sup>23)</sup>は round jet の乱れの測定から各方向の乱れのスペクトルを比較検討して慣性域で等方性が成立することを示した。一方粘性域については著者らが  $Re_\epsilon$  数の大きい乱れの野外実測<sup>9)</sup>および中程度の  $Re_\epsilon$  数の室内実験<sup>12)</sup>からスペクトルを求め、慣性域と  $-13/3$  乗則の成り立つ第 1 粘性域で局所等方性が成り立つことを示した。今回の超高波数域のスペクトルの測定では V 型 2 方向 hot film probe がその大きさゆえに用をなさないため、conical type による主流方向の乱れしか得られていないが、慣性域や第 1 粘性域でも局所等方性が成立していることから  $-7$  乗則の第 2 粘性域でも等方性が成立することが大いに期待される。

第方性乱流の場合、主流方向の乱れのスペクトル  $F_u(k)$  とそれに直角な方向の乱れのスペクトル  $F_v(k)$ ,  $F_w(k)$  は次式で関係付けられる。

$$\frac{d}{dk} F_v(k) = \frac{d}{dk} F_w(k) = -\frac{k}{2} \frac{d^2}{dk^2} F_u(k) \dots\dots\dots (23)$$

したがって慣性域のスペクトル式 (10) を式 (23) に代入し、式 (11) を用いると

$$(A_{5/3})_v = (A_{5/3})_w = \frac{4}{3} (A_{5/3})_u = 0.627 \dots\dots\dots (24)$$

が得られ、 $v$ ,  $w$  方向のスペクトル定数の方が  $u$  方向より大きくなる。

第 1 粘性域については  $-13/3$  乗則の式 (1) を式 (23) に代入して

$$(A_{13/3})_v = (A_{13/3})_w = \frac{8}{3} (A_{13/3})_u = 0.0192 \dots\dots\dots (25)$$

が得られ、第 2 粘性域については  $-7$  乗則の式 (12) を式 (23) に代入して

$$(A_7)_v = (A_7)_w = 4 (A_7)_u = 0.0060 \dots\dots\dots (26)$$

が得られる。これで平衡領域の  $u$ ,  $v$ ,  $w$  各方向のスペクトル定数がすべて決定されたことになる。

### 5. むすび

高波数域の乱れのスペクトルを精度よく測定し、かつエネルギー散逸率  $\epsilon$  を直接的に評価するために、小さな乱流 Reynolds 数の格子乱流の実験を行った。いくつかの工夫を用いることによりスペクトルの慣性域から粘性域にかけて多くのデータが得られ、特に  $-13/3$  乗則が成立する波数域およびさらに高波数域のスペクトルについても詳細に検討することができた。

本研究で得られた主要な結論は以下のようである。

(1) スペクトルの粘性波数域で  $-13/3$  乗則が成立することを改めて確認し、スペクトル定数を  $A_{13/3} = 0.0072$  と確定した。

(2) 慣性域では  $-5/3$  乗則が成立し、スペクトル定数は  $A_{5/3} = 0.47$  となる。これは従来より与えられている  $A_{5/3}$  値とよく一致する。

(3) 粘性域の  $-13/3$  乗則が成立する波数域よりさらに高波数側で Heisenberg の  $-7$  乗則が成立し、スペクトル定数は  $A_7 = 0.0015$  となることがわかった。

(4) 平衡領域のスペクトル  $-5/3$  乗則、 $-13/3$  乗則、 $-7$  乗則を内挿するスペクトル式 (17), (18) を求め、実測スペクトルとよく一致することを示した。

(5) これらの内挿スペクトルにより乱れエネルギーの散逸スペクトルが得られ、おのおのの波数領域のエネルギー散逸への寄与率が求められた。その結果、慣性域は 58%,  $-13/3$  乗則の成立する第 1 粘性域は 38%,  $-7$  乗則の第 2 粘性域は 4% となり、慣性域と粘性域の遷移領域でかなりの乱れエネルギーが散逸されていることが明らかとなった。

(6) 慣性域と第 1 粘性域で局所等方性が成立することから、より高波数である第 2 粘性域でも局所等方性乱流となることが大いに期待される。この局所等方性の仮定よりこれら平衡領域のスペクトル則のスペクトル定数はおのおのの方向の乱れに対してすべて決定された。

最後に九州大学教授 粟谷陽一先生には数々の貴重なご助言をいただいた。ここに記して深甚なる謝意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 井上栄一：乱れの最小乱子について，東京大学理工学研究所報告，4，1950.
- 2) Heisenberg, W. : Zur statistischen theorie der turbulenz, Zeit Phys, 124, 1948.
- 3) 椿東一郎・小松利光：成層密度噴流における乱れおよび密度変動のスペクトル特性，土木学会論文報告集，No.268, 1977.
- 4) 小松利光・椿東一郎：平衡領域における乱れおよび Reynolds 応力のスペクトルについて，九大工学集報，第 50 巻，第 4 号，1977.
- 5) 椿東一郎・小松利光・下田五郎：2 層境界面における内部波と乱れに関する実験的研究，第 25 回水理講演会論文集，1981.
- 6) 加藤 始・中野 晋・池田高則：下層 2 層流の実験(2)，第 29 回海岸工学講演会論文集，1982.
- 7) 鶴谷広一・中野 晋・一戸秀久：吹送流による密度界面の混合と乱れ特性，第 31 回海岸工学講演会論文集，1984.
- 8) 瀬良昌憲・神田 徹：超音波流速計による河川流の測定，第 32 回水理講演会論文集，1988.
- 9) Komatsu, T., Shibata, T. and Matsumoto, Y. : The Universal Equilibrium Spectra of Turbulent Velocity at Large Reynolds Number, Proc. of Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Meas., Iowa City, U. S. A., 1985., Turbulence Measurements and Flow Modeling (edited by C. J. Chen, L. D. Chen, F. M. Holly), Hemisphere Publishing Corporation, pp. 79~87, 1986.
- 10) Bradshaw, P. : Conditions for the Existence of an Inertial Subrange in Turbulent Flow, N. P. L. Aero Rep., 1220, 1967.
- 11) Townsend, A. A. : The Structure of Turbulent Shear Flow, 2nd Edition, Cambridge University Press, pp. 93~99, 1976.
- 12) 小松利光・柴田敏彦・松本泰司：粘性域における乱れエネルギーのスペクトルについて，第 30 回水理講演会論文集，1986.
- 13) Grant, H. L., Stewart, R. W. and Moilliet, A. : Turbulence Spectra from a Tidal Channel, J. Fluid Mech., Vol. 12, 1962.
- 14) Tsuruya, H. : Turbulent Structure of Currents under the Action of Wind Shear, Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol. 3, No. 1, 1985.
- 15) Pond, S., Stewart, R. W. and Burling, R. W. : Turbulence Spectra in the Wind over Waves, J. Atmos. Sci., Vol. 20, 1963.
- 16) Gibson, C. H. and Schwarz, W. H. : The universal equilibrium spectra of turbulent velocity and scalar fields, J. Fluid Mech., Vol. 16, 1963.
- 17) Kistler, A. L. and Vrebalovich, T. : Grid turbulence at large Reynolds numbers, J. Fluid Mech., Vol. 26, 1966.
- 18) 柁津家久：開水路流の乱流構造に関する基礎的研究，京都大学学位論文，pp. 50~51, 1977.
- 19) Lawn, C. J. : The Determination of the Rate of Dissipation in Turbulent Pipe Flow, J. Fluid Mech., Vol. 48, 1971.
- 20) 椿東一郎・小松利光・八尋明彦：成層せん断流における乱流構造，第 26 回水理講演会論文集，1982.
- 21) 中野 晋・鶴谷広一：二成層海域での吹送流の乱流特性と界面での混合について，第 30 回水理講演会論文集，1986.
- 22) Favre, A., Gaviglio, J. and Dumas, R. : Structure of Velocity Space-Time Correlation in a Boundary Layer, Boundary Layers and Turbulence, Proc. IUGG/IUTAM Symp. Kyoto, 1966. Phys. Fluids Supplement, 1967.
- 23) Gibson, M. M. : Spectra of Turbulence in a round jet, J. Fluid Mech., Vol. 15, 1963.

(1988. 6. 7・受付)