

宝 馨 共著 “水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準”  
高樟 琢馬 への討議・回答

(土木学会論文集, 第393号/II-9 1988年5月掲載)

▶討議者 (Discussion)

合 田 良 実 (横浜国立大学)

By Yoshimi GODA

極値統計の問題では、与えられた極値資料に対してどのような確率分布関数をあてはめるべきかが常に問題となる。今までの研究では特定の分布関数が適用できるとの前提の下に母数の推定理論を吟味するケースが多く、ものたりない思いをすることが多かった。今回発表された貴論文はある評価規準を定め、きわめて客観的に分布関数のあてはめを行う方法を提示されており、極値統計理論の発展のうえで貴重なものと拝察する。討議者も分布関数のあてはめ問題に関心をもつ一人として、若干異なる評価規準を提案している<sup>23)</sup>ので、紙面をお借りして私見を述べさせて頂くとともに、二、三の質問ならびに追加検討のお願いをさせて頂きたい。

(1) 極値資料は唯一の資料かまたは1つの標本資料か

討議を進めさせて頂くにあたり、当然のことと考えられるけれども、解析対象の極値資料の意味づけについて確認しておきたい。討議者は、与えられた極値資料は母集団からランダムに抽出された1つのサンプルであるとの立場をとる。Fig. 3はこの立場を図で表現したもので



Fig. 3 Population and Samples.

ある。すなわち、母集団から抽出された標本はAであるかもしれないし、Bであるかもしれない。しかも、われわれはそのいずれであるかを知ることができず、そうした状況の下で分布関数のあてはめを行わなくてはならない。この解釈にご賛同頂ければ幸いである。

(2) あてはめ分布関数の候補の選択について

ご発表の論文では、水文統計で使用されているほとん

どすべての分布関数を対象とされている。このうち、3母数の分布関数はどちらかといえば採択しない方がよいと結論されていると解釈させて頂く。討議者もその結論に賛成であるが、理由はやや異なる。それは、Pearson III型および対数Pearson III型分布などは形状母数が異なれば確率密度関数の形状が異なるので、名称は同一であっても別の分布関数とみなすべきであるとの立場をとるからである。分布関数のあてはめに際しては、候補とする各分布関数の形状を固定したうえで適合度を比較すべきであると考ええる。具体的には、形状母数を代表的ないくつかの値に固定し、それぞれ別個の関数として扱うべきであろう。たとえば、討議者は分布関数のあてはめ方法として、積率法に次いで計算が簡単な最小2乗法を用いているが、この方法では分布関数の形状に応じて最適なプロット式を選ぶ必要がある。このため、形状母数を4通りに固定したワイブル分布をあてはめ分布関数候補として使用している。

また、候補とする分布関数は、その形状が幅の広いものから狭いものまで系統的に変化するように選ぶのがよいと思われるがいかがであろうか。なお、波浪の極値統計解析ではPetruaskasとAagaardの提案<sup>24)</sup>に従って、ここで述べたような方式を採用している。

(3) 確率水文学の推定誤差について

貴論文の中で提唱されているjackknife法あるいはbootstrap法を用いると、確率水文学の推定誤差の目安が得られるとのことであり、これは従来の方式に比べて大きな進歩である。今までの極値統計に関する諸研究では、確率水文学の推定誤差を吟味したものがきわめて少ない。討議者が若干調べた中では、ガンベルの書物<sup>8)</sup>が1つの公式(6.2.3節)を挙げているのみである。貴論文の中では、ガンベル分布を対象として確率水文学の推定誤差を計算した結果をTable 9に示しておられる。この数値をガンベルの公式と比較してその結果をお示し頂ければ幸いである。

このことをお願いする理由は、母集団から抽出された極値資料の統計的変動性のために、たとえ jackknife 法や bootstrap 法を用いても、正しい推定誤差を見積ることが難しいのではないかとこの疑問が残るからである。Fig. 4 は、モンテカルロ法を用いて標本資料の統計的変動性を調べた例である<sup>23)</sup>。ここでは母集団としてガンベル分布（尺度母数  $A=1.0$ 、位置母数  $B=0$ ）を仮定し、データ数  $N=10$  の標本を 100 組作成している。そして、各標本の中の最大値  $x_{(10)}$  およびそれらが母集団において占める非超過確率  $F_{(10)}$  の値の頻度分布を作成した。

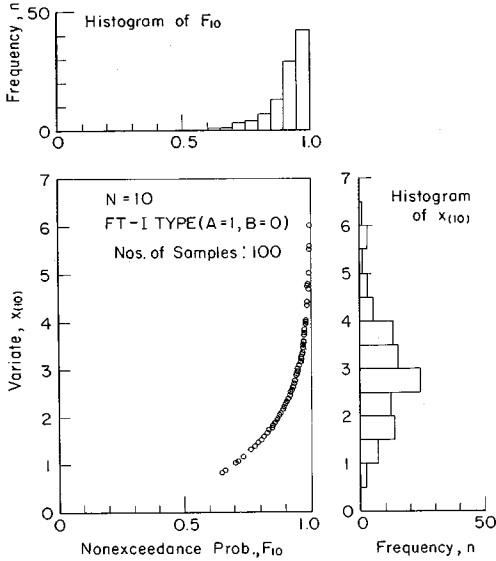


Fig. 4 Example of variability of random samples from the FT-I distribution<sup>23)</sup>.

この結果によると、 $x_{(10)}$  は小さいものでは 0.84、大きいものでは 6.04 まで変化している。前者の標本は平均値が  $-0.003$ 、標準偏差が 0.536 であり、後者は平均値が 1.390、標準偏差が 1.817 であって、2つの標本の特性は大きく異なる。このように特性の異なる標本に対して jackknife 法あるいは bootstrap 法を適用すれば、確率水文学の推定誤差もそれぞれ別個の値となり、母集団に対する推定誤差とも異なる結果となるのではないかとと思われる。

この疑問に答える 1つの方法は、あらかじめ 1つの分布関数を仮定し、そこから同一のデータ個数の標本を数多く抽出し、それぞれの標本に対して jackknife 法あるいは bootstrap 法を適用して確率水文学の推定誤差を比較することである。これは本来、討議者が行うべき作業かもしれないが、関連する解析プログラムを持ち合わせていないので、ご検討頂ければ大変に有難い。

(4) 標本の統計的変動性が最適分布関数の評価に及ぼす影響

討議者の数値計算の結果<sup>23)</sup>では、標本中のデータ個数が少ないときは母分布関数と異なる関数を最適と判定してしまう場合が少なくない。Fig. 5 はその例示である。図の横軸はあてはめの候補とした分布関数の略記号であり、 $k=0.75\sim 2.0$  はワイブル分布、FT-I は極値 I 型分布 (=ガンベル分布)、L-N は 2 母数対数正規分布を表わす。図の上段は母集団として極値 I 型分布、中段と下段はそれぞれワイブル分布の内の形状母数が  $k=2.0$  および 1.0 の場合を仮定したものである。各母集団からデータ個数 10 および 100 の標本を 10 000 組抽出し、最小 2 乗法で母数を推定し、相関係数が最大のものを最適適合分布とみなした。図の縦軸は、以上の操作によって最適適合関数と判定された分布関数の出現率を示している。

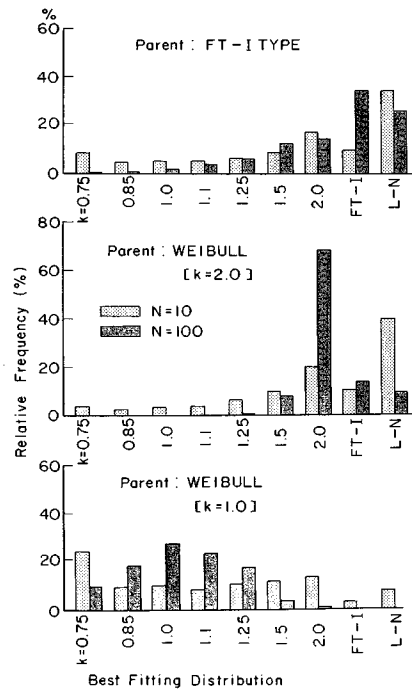


Fig. 5 Degree of fitting of random samples to various distribution functions<sup>23)</sup>.

Fig. 5 によると、標本が小さいときは母集団の分布関数が最適と判定される割合がきわめて低い。N=10 の小標本では、極値 I 型および  $k=2.0$  のワイブル分布ともに対数正規分布と見誤られる可能性が非常に大きい。このように母集団の分布関数への復帰率が低い理由として、ここで採択した分布関数のあてはめ方法および最適の判定方法が適切でなかったという見方もあり得る。しかし、討議者としては母集団からのランダム抽出

による標本の統計的変動性が主原因であり、どのような方法を用いても同程度のあてはめ誤差が生じるという見方をとっている。すなわち、Fig. 4 の  $x_{100}=0.84$  の標本の場合はデータの分布幅が狭いため、ガンベル分布よりも分布の裾が広がらない対数正規分布あるいは形状母数の大きなワイブル分布 ( $k=2$  など) によく適合する。

このような見方からすると、貴論文の中で提案されている jackknife 法あるいは bootstrap 法を適用した際の確率水文学の変動性を評価規準とする方式によって、母集団の分布関数にどの程度一致する判定結果をもたらすのか興味のあるところである。この疑問もおそらく数値実験によらなくては答えが得られないであろうが、前項と併せてテストして頂けるならば極値統計解析の発展の

ためにまことに喜ばしく存ずる次第である。

以上、貴論文のご主旨の理解が不十分であって討議として不適切な部分があったかもしれないが、斯道発展のためご容赦頂くようお願いする次第である。

参 考 文 献

- 23) 合田良実：極値統計におけるプロットング公式ならびに推定値の信頼区間に関する数値的検討，港湾技術研究所報告，第27巻，第1号，pp.31-92，1988.
- 24) Petruaskas, C. and Aagaard, P.M. : Extrapolation of historical storm data for estimating design wave heights, Prepr. 2nd Offshore Tech. Conf., OTC 1190, 1970.

(1988.8.22・受付)

▶回答者 (Closure)

宝 馨・高棹琢馬 (京都大学)

By Kaoru TAKARA and Takuma TAKASAO

波浪統計の分野での長年のご経験に基づく示唆に富んだご討議を頂戴し、厚く御礼申し上げます。以下順に (1) から (4) のご質問にお答えしていく。

(1) に対する回答

討議者の解釈に全面的に賛同するものである。与えられた1組の極値資料は母集団からランダムに抽出された1つの標本である。現時点で手元に与えられた標本を Fig. 3 の「標本A」とすれば、この「標本A」から母集団の推定 (すなわち、分布関数のあてはめと選択) を行わなければならないわけである。ただし、時間の経過とともに観測データが蓄積される。将来のある時点までの間に新たに追加されたデータが Fig. 3 の「標本B」に対応するとすれば、将来のその時点で手元にあるのは、「標本A+B」である。著者らの論文の要点は、端的に言えば、「標本A」に基づく母集団の推定が、「標本A+B」に基づく母集団の推定と大きく異なることが実用上望ましい、というものである。

現時点で「標本A」がすべての情報であるとするならば、この「標本A」を有効利用しようというのが jackknife や bootstrap などのリサンプリング手法である。この新しい統計技法を用いて、「標本A」にある程度よく適合し、かつ、データの組合せが変わっても形状 (特に、分布の右すその方) のあまり変化しない分布型を選ぶのが実用上よい、とするのが著者らの提案したモデル評価の手順なのである。

(2) に対する回答

討議者と著者らの共通の認識は「所与のデータに対する overfitting は回避しなければならない」ということである。3母数の分布関数は、2母数の分布関数に比して母数の個数が多い分だけデータに適合しやすい。すな

わち overfitting に陥りやすい。なぜ overfitting が困るかといえば、データの組合せが変わると確率水文学や母数の推定値が大きく変動することになるからである。

さて、討議者のご提案は、形状が幅の広いものから狭いものまで系統的に変化するような分布関数を選び、形状母数を代表的ないくつかの値に固定することにより overfitting を回避するとともに、多種の似通った分布関数間の微妙な適合度の選別というあまり本質的でない問題をも回避しようというものである。

この考え方にはほぼ賛同できる。「形状が幅の広いものから狭いものまで系統的に変化するような分布関数」としては、Pearson III 型分布 (ガンマ分布)、Weibull 分布、一般化極値分布 (GEV 分布; Gumbel 分布を含んでいる)<sup>23)</sup> がその候補となろう。討議者は、次式で与えられる Weibull 分布を採用し、「形状母数の代表的ないくつかの値」として、 $k=0.75, 1.0, 1.4, 2.0$  を用いている (Fig. 6, 文献23) の p.38 より抜粋)。こうして、これらの4つの  $k$  の値をもつ、討議者いうところの「別個の」分布と Gumbel 分布 (FT-I 型あるいは極値 I 型分布) の合計5つを候補として、その中から、適合度の良いものを相関係数を評価規準として選択しようというのである。

分布関数：

$$F(x) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x-B}{A} \right)^k \right] \dots \dots \dots (18)$$

確率密度関数：

$$f(x) = \frac{k}{A} \left( \frac{x-B}{A} \right)^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{x-B}{A} \right)^k \right] \dots \dots \dots (19)$$

ここに、 $A, B, k$  はそれぞれ尺度母数、位置母数、形状母数である。

ここで、代表値として選ばれている  $k$  の値について考察してみよう。Weibull 分布のひずみ係数  $\beta$  は、 $k$  のみの関数であり、

$$\beta = \frac{G_3 - 3G_2 \cdot G_1 + 2G_1^3}{(G_2 - G_1^2)^{3/2}} \dots\dots\dots (20)$$

で与えられる。ここに、 $G_i = \Gamma(1 + i/k)$  で、 $\Gamma(\cdot)$

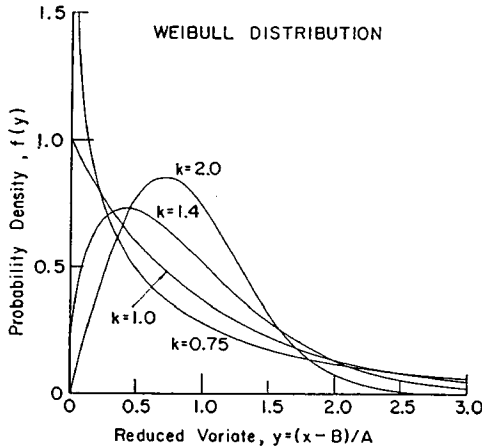


Fig. 6 Weibull distribution with various shape parameters<sup>23)</sup>.

Table 10 Basic statistics of the Weibull and Gumbel distributions ( $A=1.0, B=0.0$ ).

Distribution	$\mu$	$\sigma$	$\beta$	
Weibull	k=0.75	1.19	1.61	3.12
	k=1.0	1.00	1.00	2.00
	k=1.4	0.91	0.66	1.20
	k=2.0	0.89	0.46	0.63
Gumbel	0.58	1.28	1.14	

はガンマ関数である。4つの Weibull 分布と Gumbel 分布のひずみ係数を平均値  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma$  とともに Table 10 に示す。ひずみ係数  $\beta$  に着目すると、Gumbel 分布は  $k=2.0$  の Weibull 分布と  $k=1.4$  の Weibull 分布の中間に位置することになる。極値水量のとり標本ひずみ係数の値は多くの場合この表に示された範囲でカバーされる。しかし、 $k$  の値を離散的に固定することにより、満足すべき適合度が得られないことはないであろうか。たとえば、ひずみ係数が 1.5 程度の標本に対して  $k=1.0, k=1.4$  どちらかの分布が満足すべき適合度(後述)を得ることができるのであろうか。 $k=0.75, 1.0, 1.4, 2.0$  のそれぞれの値の根拠は何かという素朴な疑問が生じる(この経緯については討議者の文献 23) に述べられている)。ひずみ係数がほぼ等間隔になるような  $k$  の値をいくつか選ぶとか、 $k=0.8 \sim 2.0$  まで 0.2 おきに選ぶとか、代替案はいくつでもあるわけである。

結局、対象とする水文量の発生過程が、Pearson III 型なり、GEV なり、Weibull 分布なりで説明できることがわかっているのであれば、多種多様な分布すべてを候補モデルとする必要はない。説明力のある分布を唯一選択し、overfitting にならないように母数を定めるのがよい。そのとき、討議者のご提案のように、形状母数をいくつかの代表値に固定するのが有力な 1 つの方法となろう。著者らが多種多様な分布を取り扱ったのは、それら取り扱った分布の適合性、確率水文量の変動性をシステムティックに調べたかったのと、対象としたデータに対して「説明力のある分布」が確定できなかったことの両方の理由による。

なお、適合度規準として討議者らが用いている相関係数と著者らの適合度規準 SLSC とを比較検討した結果をこの機会に紹介させて戴く。Table 11 は、St. Marys

Table 11 Comparison of eleven distributions by SLSC, MLL, AIC and COR for the annual maxima of daily discharge of the St. Marys river, for the period 1916-1974 (59 years), fitted by the maximum likelihood method.

Prob. distribution	SLSC	MLL	AIC	COR
Normal (2p)	0.06806	-588.313	1180.627	0.9492
Ln-normal (3p)	0.02189	-580.535②	1167.069	0.9948
Ln-normal (2p)	0.02416	-580.808	1165.615①	0.9937
Pearson III (3p)	0.03045	-580.510①	1167.019	0.9905
Pearson III (2p)	0.04734	-582.138	1168.275	0.9804
Ln-Pearson III (3p)	0.02117②	-580.549③	1167.098	0.9952②
SQRT-ET-max (2p)	0.02173③	-580.829	1165.659②	0.9950③
G.E.V. (3p)	0.02211	-580.597	1167.195	0.9945
Gumbel (2p)	0.04001	-580.850	1165.700③	0.9914
Ln-Gumbel (3p)	0.01955①	-583.629	1170.258	0.9954①
Ln-Gumbel (2p)	0.04821	-583.187	1170.375	0.9813

① denotes the best distribution for each criterion;  
② and ③ the second and the third, respectively.

川の年最大日流量<sup>4)</sup>に11種の確率分布モデル<sup>26)</sup>をあてはめた結果である。表の意味は Tables 1, 3, 5, 7 に準ずるが、一般化極値分布 (GEV) と相関係数 (COR と記した) が追加されている。SLSC と相関係数が適合度評価規準として同等の性能をもつことがこの表から窺われ

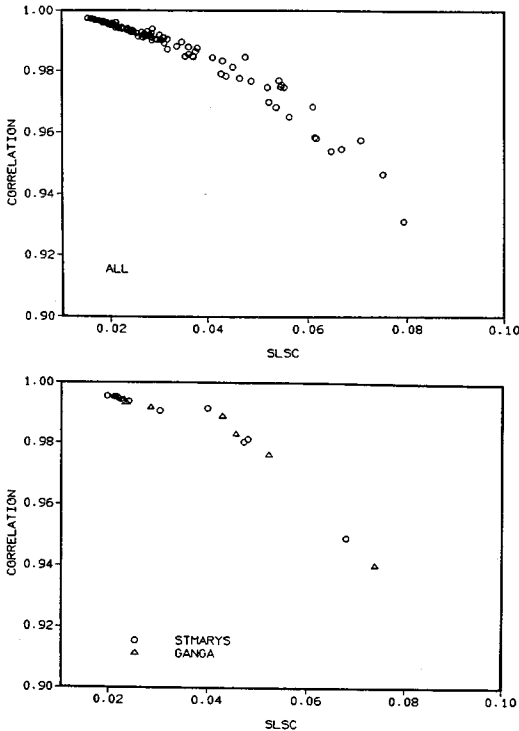


Fig.7 Relation between the standard least-square criterion (SLSC) and the correlation coefficient (COR) for the precipitation (upper panel) and discharge (lower panel) data.

Table 12 Comparison of the standard errors obtained by Gumbel's formula and the bootstrap-type resampling (Table 9), for the daily precipitation (in mm) in the Lake Biwa.

N (M)	T=50 ( $\bar{X}_{50}=172.83$ )		T=100 ( $\bar{X}_{100}=189.73$ )		T=200 ( $\bar{X}_{200}=206.56$ )	
	Gumbel's	Table 9	Gumbel's	Table 9	Gumbel's	Table 9
20	25.3	20.9	29.4	23.9	33.5	27.0
30	20.7	16.6	24.0	19.0	27.3	21.4
40	17.9	14.4	20.8	16.4	23.7	18.5
50	16.0	13.2	18.6	15.2	21.1	17.1
60	14.6	11.9	17.0	13.6	19.3	15.3
70	13.5	10.9	15.7	12.5	17.9	14.1
80	12.7	10.5	14.7	12.0	16.7	13.5
90	11.9	9.5	13.9	10.8	15.8	12.2
100	11.3	9.1	13.1	10.5	15.0	11.8
110	10.8	8.7	12.5	9.9	14.3	11.2
120	9.9	8.1	12.0	9.3	13.7	10.5
130	9.6	7.9	11.5	9.0	13.1	10.2
140	9.2	7.7	11.1	8.8	12.7	9.9

る。著者らの論文で取り扱った降水量データについても、あてはめたすべての分布モデルについて相関係数を求めてみた。流量データ<sup>26)</sup>の場合とともに、SLSC と相関係数をプロットしたのが Fig. 7 である。両者はほぼ一意的な関係を示している。この図から、十分な適合度と判断される基準値 SLSC = 0.02 に対応するのは COR = 0.995 であり、SLSC < 0.03 に対応するのは COR > 0.990 であるといえる。分布によっては、SLSC を求めるのが煩雑な場合がある。一方、相関係数はどの分布についても比較的簡便に求められるので、SLSC の代用とすることができる。上記の値が満足すべき適合度の判定基準となろう。

(3) に対する回答

ここで討議者がいわれている Gumbel の公式とは、T 年確率水流量  $\hat{x}_T$  の分散  $\sigma^2(\hat{x}_T)$  を与えるもので、次のように書くことができる。

$$\sigma^2(\hat{x}_T) = \frac{\sigma^2}{N} \left[ 1 + 1.1396 (s_T - \gamma) \frac{\sqrt{6}}{\pi} + 1.1 (s_T - \gamma)^2 \frac{6}{\pi^2} \right] \dots \dots \dots (21)$$

ここに、 $\sigma^2$  は元の変量 X の (母) 分散、N は標本の大きさ (データ数)、 $s_T$  は T 年確率水流量  $\hat{x}_T$  に対応する標準変量、 $\gamma$  はオイラーの定数 (0.5772...) である。ある 1 組のデータに対しては、 $\sigma^2$  の代わりに標本分散  $\hat{\sigma}_x^2$  を用いることにし、両辺の平方根をとると、

$$\sigma(\hat{x}_T) = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}} \left[ 1 + 0.8885 (s_T - \gamma) + 0.6687 (s_T - \gamma)^2 \right]^{1/2} \dots \dots \dots (22)$$

となり、これが T 年確率水流量  $\hat{x}_T$  の推定誤差に相当する。討議者のご希望は、著者らが取り扱ったデータに対するこの値を示し jackknife 法や bootstrap 法の結果と比べよ、ということである。

ご指摘の著者らの論文中の Table 9 は、琵琶湖流域の年最大日雨量 (N=70, 平均値  $\bar{x}=92.51$ , 標本標準偏差  $\hat{\sigma}_x=32.66$ , 標本ひずみ係数  $\hat{\beta}=1.0714$ ) に対するものである。 $\hat{\sigma}_x=32.66$  と M=20~140 を式(22) に代入した結果と Table 9 で与えられた推定誤差 (これは bootstrap 型のリサンプリングによって得られたものである) を Table 12 に示す。この表に示されるとおり、bootstrap 法によって得られた推定誤差は、Gumbel の式で与えられる推定誤差よりも小さめではあるが近い値となっている。

Table 13 は、jackknife 法と Gumbel の式を、著者らが取り扱った 12 種のデータについて比較したものである。Table 12 の結果と同様、jackknife 法によって得られる推定誤差は Gumbel の式で与えられる推定誤差よりも小さめではあるが近い値となっている。

**Table 13** Comparison of the standard errors obtained by Gumbel's formula and the jackknife method (Tables 2, 4, 6 and 8 and Ref. 26)).

Data	N	T=50		T=100		T=200	
		Gumbel's	Jackknife	Gumbel's	Jackknife	Gumbel's	Jackknife
Osaka	92	11.4	9.1	13.3	10.5	15.2	11.9
Ohtsu (k=1)	74	13.2	10.7	15.4	12.3	17.6	13.8
Ohtsu (k=2)	74	17.1	12.8	19.9	14.8	22.8	16.8
Ohtsu (k=3)	74	19.0	14.1	22.2	16.3	25.3	18.6
Hikone(k=1)	74	13.0	10.2	15.1	11.7	17.2	13.2
Hikone(k=2)	74	17.2	13.0	20.1	14.9	22.9	16.8
Hikone(k=3)	74	18.6	14.3	21.7	16.5	24.8	18.7
Biwako(k=1)	70	13.1	11.1	15.3	12.7	17.5	14.3
Biwako(k=2)	70	17.9	13.8	20.9	15.8	23.8	17.9
Biwako(k=3)	70	20.3	15.8	23.7	18.1	27.0	20.5
St. Marys R.	59	2291	1819	2669	2086	3048	2354
Ganga R.	87	1131	937	1317	1071	1504	1208

この Gumbel の式は Kite にも引用されており (文献 4) の p. 86), Lettenmaier and Burges<sup>27)</sup> はこの式が数値実験の結果よりも大きめの値を与えると指摘している。このことから考えて, jackknife 法や bootstrap 法は良好な推定誤差の値を見積っているといえよう。

さらに, 討議者は, Fig. 4 において, Gumbel 分布を母集団とする標本の最大値の変動の大きさを例に取り上げている。こうした標本中の最大値 (および第  $i$  位の値) の変動特性については石原<sup>28)</sup> が解析的に論じている。討議者のご懸念は, このような極値資料の統計的変動性が jackknife 法や bootstrap 法による推定誤差の推定にどのような影響を与えるか, ということである。ご提案の趣旨に沿って数値的な検討を行ったので, その結果を紹介する。検討方法は次のようである。

- ① 母数  $A=1.0$ ,  $B=0.0$  の Gumbel 分布を母分布とする。
- ② この分布に従うデータを  $N$  個発生させる。
- ③ 発生させた大きさ  $N$  の標本に対して Gumbel 分布の母数推定を行う。jackknife 法により  $T$  年確率統計量の推定値  $\hat{x}_T$  とその標準偏差  $\hat{\sigma}_{xT}$  を求める。すなわち, 母数推定 (最尤法) を合計  $N+1$  回実行する。
- ④ ②, ③ の手順を 1000 回繰り返し  $\hat{x}_T$  の平均値 Mean ( $\hat{x}_T$ ) と標準偏差 Sd ( $\hat{x}_T$ ),  $\hat{\sigma}_{xT}$  の平均値 Mean ( $\hat{\sigma}_{xT}$ ) と標準偏差 Sd ( $\hat{\sigma}_{xT}$ ) を求める。
- ⑤ Gumbel の式によって与えられる  $T$  年確率統計量の推定誤差と Mean ( $\hat{\sigma}_{xT}$ ) とを, Sd ( $\hat{\sigma}_{xT}$ ) を参考としながら比較する。

この実験の結果を  $T=100$ ,  $N=10\sim 200$  の場合について Table 14 に示す。Mean ( $\hat{\sigma}_{x100}$ ) は, Gumbel の式によって与えられる 100 年確率統計量の推定誤差より小さめではあるが近い値を与える。これは, 実データに基

**Table 14** Comparison of the standard errors obtained by Gumbel's formula and the jackknife method based on a numerical simulation.

N	$\hat{x}_{100}$		$\hat{\sigma}_{x100}$		Gumbel's
	Mean	Sd	Mean	Sd	
10	4.5543	(1.3100)	1.4019	(0.4767)	1.5915
20	4.6136	(0.9140)	0.9630	(0.2452)	1.1253
40	4.6025	(0.6407)	0.6582	(0.1267)	0.7957
60	4.6064	(0.5225)	0.5184	(0.0833)	0.6497
100	4.5868	(0.4036)	0.4015	(0.0511)	0.5033
200	4.5951	(0.2859)	0.2802	(0.0256)	0.3559

づく前述の結果と同じである。したがって, 全体としてみれば, jackknife 法により再現確率統計量の推定誤差が適切に見積れるといえる。ただし, その推定誤差のばらつきは, Sd ( $\hat{\sigma}_{x100}$ ) として同表中に与えられているように, 小標本では大きくならつきをもつことになる。つまり, 討議者のご指摘のように,  $N=10$  で最大値が極端に小さい (あるいは大きい) ような標本に対しては母集団に対するものとは大きく異なる推定誤差が得られるのであり, これはどうしようもないことである。(4) において討議者もご指摘のように, そのような標本に対して適合する分布は母分布とはかなり異なるものとなるであろう。次節で少し触れるが, 小標本に対して分布関数をあてはめるのがはたして良いのかどうか, 基本的な考え方を整理する必要がある。なお, Table 14 には,  $x_{100}$  (=4.6001 が真値) の jackknife 推定値  $\hat{x}_{100}$  の平均値 Mean ( $\hat{x}_{100}$ ) と標準偏差 Sd ( $\hat{x}_{100}$ ) も示しておいた。標本サイズ  $N$  と jackknife 推定値のばらつき (推定誤差) の関係の概略がみて取れる。

以上の検討の結果, jackknife 法と bootstrap 法は確率水文学量の推定誤差を適切に見積ることのできる有用な

手法であることが確認された。

#### (4) に対する回答

Fig. 5 に図示されたような分布関数あてはめの錯誤が生じるのは、討議者のご指摘のとおり、母集団からのランダム抽出による標本の統計的変動性によるものである。最適と判定された分布の適合度がどの程度満足すべきものであったかどうか（前述のように相関係数が 0.995 に近い値であったのかどうかの絶対的な評価）が明らかでないが、どのような適合度規準を用いても Fig. 5 のような錯誤は避けられないと思われる。

与えられたデータ数  $N=100$  の標本に対してこれらの分布をあてはめ、最適分布が Weibull 分布 ( $k=2.0$ ) と判定されたとき、母分布が Gumbel 分布 (FT-I 分布) である可能性が約 15%、母分布が Weibull 分布 ( $k=2.0$ ) である（すなわち、母分布をいい当てる）可能性が約 70% である、ということを示す Fig. 5 は意味する。  $N=10$  の場合はもっと悲惨な状況であり、母分布をいい当てる可能性が 20% 弱になってしまう。このとき、母分布のひずみ係数  $\beta=0.63$  であるにもかかわらず、 $\beta > 2$  の分布 ( $k \geq 1.0$ ) であると誤って判断する可能性が 1 割近くにもなる。すなわち、 $N=10$  や 20 というような小標本に対して分布関数をあてはめることの意義が問われるわけである。また、 $N=100$  に対して母分布を当てることが上の例で約 70% であるが、この 70% という値がはたして満足すべきものなのかどうか、当てる可能性をさらに上げるにはデータ数  $N$  がどの程度必要なのか、など分布関数のあてはめには諸々の問題がある。

では、jackknife 法や bootstrap 法をこうした判定に用いた場合はどうかというと、結果は似たようなものになると思う。討議者は数値実験をご希望であるが、前節の検討をはるかにこえる膨大な量の計算を必要とするので、数値実験の代わりに、jackknife 法等を用いてきた著者らの経験に基づく予想を述べるにとどめさせて戴きたい。

いま 3 母数の分布を母分布に仮定して、著者らの論文で取り扱った分布をすべて候補とする状況を考えてみよう。jackknife 法を適用し、再現確率統計量の変動の最も小さいものを最適分布として選ぶとすると、母分布に仮定した 3 母数の分布が最適分布に選ばれることはきわめてまれで、ほとんどの場合 2 母数の分布が最適分布となることが予想される。2 母数の分布を母分布と仮定した場合においては、Gumbel 分布、2 母数対数正規分布、2 母数 Pearson III 型分布は、それぞれ似た形状を示すのでこれら 3 つの分布のうちどれかが選ばれる可能性がきわめて高く、Tables 4, 6, 8 の結果を参考にすれば、おそらくこの 3 つの中では Gumbel 分布が選ばれる可能性が最も高くなるのではないかと思う。

Fig. 5 と同じ状況設定を考えてみよう。討議者らは、本来 3 母数である Weibull 分布の母数  $k$  を固定しているので、Fig. 5 で取り扱われている分布はすべて 2 母数ということになる。したがって、どういう選別の割合になるかははっきりいえないが、Weibull 分布と Gumbel 分布にそれぞれ固有の再現確率統計量の変動特性に応じて、それぞれが選ばれる割合が決まることになると思われる。

結局のところ、標本の統計的変動性の影響を受けることは避けられないのであって、モデル選択のどのような手順 (jackknife 法等も含めて) を用いたとしても、おそらく Fig. 5 と同様の結果が得られるものと思われる。

終わりに、1 変数の水文頻度解析に対する著者らの基本的考え方を述べておきたい。

簡単のため豪雨データを例にとると、近年、その地域でそれまでに経験したことのないようなきわめて大きな豪雨が各地で生起している<sup>29), 30)</sup>。年最大降水量の系列を極値 (Gumbel) 確率紙にプロットするとその時点まではほぼ一直線上に並んでいたのに、その豪雨時のデータはその直線から大きく外れてプロットされることになり、元の直線から再現期間を推定すると、何千年、何万年という値になる。このようなデータは、異常値とみなされ、解析の対象外とされたり、何か特別な処理がなされることが多い。しかしながら、そのような値の生起は十分あり得ることであり<sup>26)</sup>、明らかに異常値であるという根拠がない限り、棄却されるべきでない。また、計画規模を安全側に見積る便宜的な方法として、大きい方からいくつか (たとえば、10 個程度) を取り出して確率評価することがあるが、せっかく蓄積されたデータの大半を棄却するこのようなやり方は、統計学的観点からは不合理な取り扱いであるといわざるを得ない。

データがさらに蓄積されると、異常値とみなされていた値の周りに次々と同様の値が観測されるという事態も生じてきている。ある地点ではそれまで経験したこともないといび抜けて大きな値が、実は、その周辺地域ではごく頻繁に生じていたりということも多い<sup>29)</sup>。すなわち、異常値とみなす錯誤が生じる大きな理由の 1 つは、データの少なさにあるといえる。こうしたデータ不足の問題を解決する手段として、地域解析 (regional analysis) や近代的観測開始以前の歴史的資料や事象生起の痕跡を利用する方法 (Paleohydrologic analysis, 古水文学的解析) の適用が最近の水文頻度解析の 1 つの大きな流れとなっている<sup>31)</sup>。

さて、データが十分に蓄積された場合においても、今度は別の問題が持ち上がってくる。それは、データが一直線上に並ばず、ある値を境に大きく屈曲することがあ

るという問題である。この場合、その値より上側のデータと下側のデータは現象として異なる母集団に属するのではないかという疑問が生じてくる。すなわち、降水の場合であれば、降水の発生過程に立ち帰って、水文気象学的・気象力学的観点からの厳密なデータの吟味が重要となる。こうした発生過程の解析に基づく新たな極値理論の展開が望まれるのである。

こうした解析に基づいて、対象とする水水量に適する分布関数（それは Weibull 分布、Pearson III 型分布や一般化極値分布であるかもしれない）をただ 1 つ決めることができるならば、それを迷うことなく用いればよいわけである。その際、(2) に対する回答で述べたように、所与のデータへの overfitting を避ける工夫が必要となる。

データの吟味の結果、2 つ以上の異なる母集団の存在が明らかになったときには、それらの母集団の性質とその組合せによってどのような取り扱いをするかが異なることになる。たとえば、高潮の生起原因別の取り扱い<sup>23), 32), 33)</sup>などが参考になろう。余談であるが、台風性豪雨による洪水であろうが、前線性豪雨による洪水であろうが、同じ堤防によってそれを防がなければならないことも確かである。データを細分化すると、データ数がまた少なくなるというジレンマに陥る。

このように、データの吟味が基本的に最も重要であることは疑いない。しかし、データの吟味が十分なされたとしても、結局、所与の一群のデータが 2 つ以上の異なる母集団からのものと言明できない、あるいは、前述したような母集団の発生過程に基づく分布が確定できない、といった状況が当面ほとんどであろう。

著者らの論文は、このようなデータの独立性・等質性が仮定できる（仮定せざるを得ない）状況のもとで、実用的な観点からのモデル評価の手順を提示したものにほかならない。

以上、ご討議に対し、追加実験も含めてある程度明確

にお答えしたつもりである。この回答の作成作業は、著者らの考え方を再整理するよい機会となり、また、論文では紙数の都合などでいい尽くせなかった点を補足する機会ともなった。討議者に重ねて厚く御礼申し上げたい。なお、数値計算には、清水 章君（当時・京都大学大学院学生、現・大阪府職員）の手を煩わした。記して謝意を表する次第である。

#### 参 考 文 献

- 25) Jenkinson, A.F.: The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 81, pp.158~171, 1955.
- 26) 高棹琢馬・宝 馨・清水 章: T 年確率洪水流量の変動性について, 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, II-81, 1988.
- 27) Lettenmaier, J.F. and Burges, S.J.: Gumbel's Extreme Value I Distribution—A New Look, *J. Hydr. Div., Proc. ASCE*, Vol.108, No.HY 4, pp.502~514, 1982.
- 28) 石原安雄: 年最大水水量の生起確率評価について, *水利科学*, 第 31 卷, 第 5 号, pp.1~18, 1987.
- 29) 岸原信義・武蔵哲夫: 異常豪雨は予測できるか (I)—確率雨量に関する諸問題について一, *水利科学*, No.141, pp.1~17, 1981.
- 30) 高棹琢馬: 気象災害に関する極値・集中豪雨, *土木学会誌*, Vol.68, No.10 (9月号), pp.7~11, 1983.
- 31) Singh, V.P. (Ed.): *Regional Flood Frequency Analysis, Proc. of the International Symposium on Flood Frequency and Risk Analysis*, 14-17 May 1986, Louisiana State Univ., Baton Rouge, U.S.A., D. Reidel Pub. Co., 400 pp., 1987.
- 32) 河田恵昭: 高潮の極値統計, 1987 年度 (第 23 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, B-7, 土木学会水理委員会, 22 pp., 1987.
- 33) 合田良実: 波浪の極値統計解析, 1988 年度 (第 24 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, B-6, 土木学会水理委員会, 18 pp., 1988.

(1988.8.22・受付)



# 水理公式集

B5判 642ページ上製・ビニールケース入り 定価 14 420 円(本体 14 000 円)(〒とも),  
会員特価 12 360 円(本体 12 000 円)(〒とも)

●主要目次●**第1編 基礎水理編** 1. 水理の基礎 2. 開水路の水理 3. 管水路の水理 4. 浸透流 5. 渦 6. 拡散 7. 噴流 8. 密度流 9. 流体力および流力弾性振動 10. 波 11. 環境水理 12. 資料解析 13. 数値解析 **第2編 水文編** 1. 水文統計 2. 流域と流出過程 3. 流出解析 4. 水文予測 5. 水資源計画 **第3編 河川編** 1. 流れと観測 2. 河川の不  
等流 3. 局部流 4. 洪水流 5. 流砂 6. 土砂生産と流出 7. 河床変動 8. 河川構造物  
の水理 **第4編 発電編** 1. せきと越流頂 2. ゲートおよびバルブ 3. 跳水と減勢工 4.  
水撃作用 5. サージタンク 6. 地震時動水圧 7. 貯水池の環境水理 8. 冷却水取放水 **第  
5編 上下水道・水質保全編** 1. 地下取水とその保全 2. 送配水と下水の集水 3. 流量計お  
よびポンプ 4. 水処理 5. 市街地雨水流出・汚濁流出 6. 汚泥の流動と脱水 7. 水域の水  
質環境 **第6編 海岸・港湾編** 1. 波浪 2. 波浪推算と波浪の長期統計 3. 波の変形 4.  
波と構造物 5. 漂砂および海浜過程 6. 潮汐・潮流および長周期水位変動と流れ 7. 津波お  
よび高潮 8. 沿岸域における密度流現象 9. 沿岸における水質拡散

● お申込みは土木学会または全国主要書店へ ●

# 水理公式集例題集

B5判 310ページ 定 価 7 210 円(本体 7 000 円),  
会員特価 6 480 円(本体 6 000 円)(〒350 円)

●本書は、水理公式集（昭和60年版）に採用されている公式・図書等に基づいて具体的な  
水理計算・水理設計およびそれらの実施例につき、例題・解説を提示することによって、  
(1) 公式の考え方、意義を正しくとらえ、理解を深める、  
(2) 公式の適用の仕方、あるいはどの公式が実務のどの面に関係があるかを総合的な例  
題を通して体得する、  
(3) 新公式集で不足しがちな図表などを補い、実際の水理現象に即した分析ができるよ  
うにする、

ことを主たる目的として、水理学を専門としない一般実務者を対象に編纂したものであり、  
座右の書として活用されますようおすすめします。

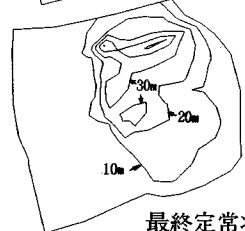
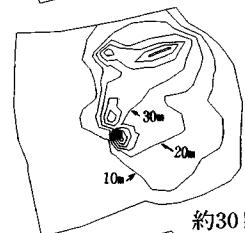
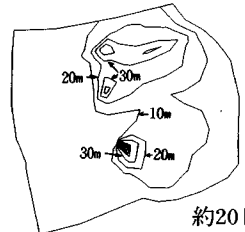
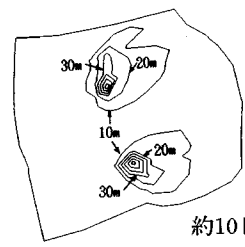
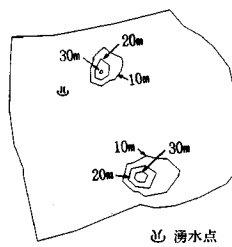
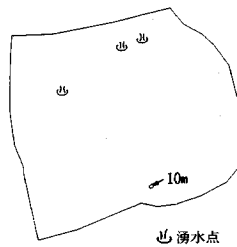
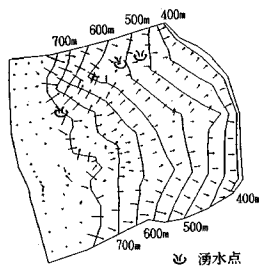
●目次●**第1編 基礎水理編**／**第2編 水文編**／**第3編 河川編**／**第4編 発電編**／**第5  
編 上下水道・水質保全編**／**第6編 海岸・港湾編**

● お申込みは土木学会または全国主要書店へ ●

# 地下水解析のことなら CRC

## 日本初!! 逆解析手法による 地下水変動解析プログラム UNISSF

スピーディな同定・安価な解析



特長 ○有限要素法による準3次元解析を中心とした地下水の流れのトータルシステムです。

○観測水位と計算水位より、非線形最小二乗法を用いて帯水層定数の同定が可能です。(逆解析手法)

○建設・土木工事(掘削・ディープウェルその他)の解析に対応する多くの機能を備えています。

○メッシュ・ジュネレータにより、モデル(要素分割)作成の手間を軽減できます。

○図化処理プログラムにより、結果の確認が容易に行えます。

機種：FACOM-Mシリーズ、HITAC-Mシリーズ  
IBM303X,308X,43XX、CRAY  
NEC ACOSシリーズ、DEC VAX11 他

このシステムは、情報処理振興事業協会の委託を受けて開発したものです。

**IPA 情報処理振興事業協会**

**CRC センチュリリサーチセンター株式会社**

大阪市中央区久太郎町4丁目1-3  
(06-241-4121) 営業担当: 遠藤・岩崎

# 動的連成応答解析ソフト



サブストラクチャー法による動的連成応答解析プログラム

# DYSAS Version 3.0

## 地盤—基礎—構造物系の耐震解析に最適!!

### 適用分野

- 吊り橋、斜張橋等の長大橋梁
- 高炉、原子炉、煙突等の産業施設
- 高層ビル等の建築物
- 地中タンク、地中埋設構造物等\*

### 適応機種

- IBM 303X、308X、43XX
- FACOM Mシリーズ
- HITAC Mシリーズ

### 機能

- 平面歪モデルによる面内、面外振動解析
- 軸対称及び3次元モデル\*による下部構造物と、3次元モデルによる上部構造物の連成振動解析
- 剛基礎および半無限基礎
- 粘性境界、伝達境界
- 四辺形要素、梁要素、ベルヌーイ・オイラー梁要素、シェル要素\*、3次元立体要素\*

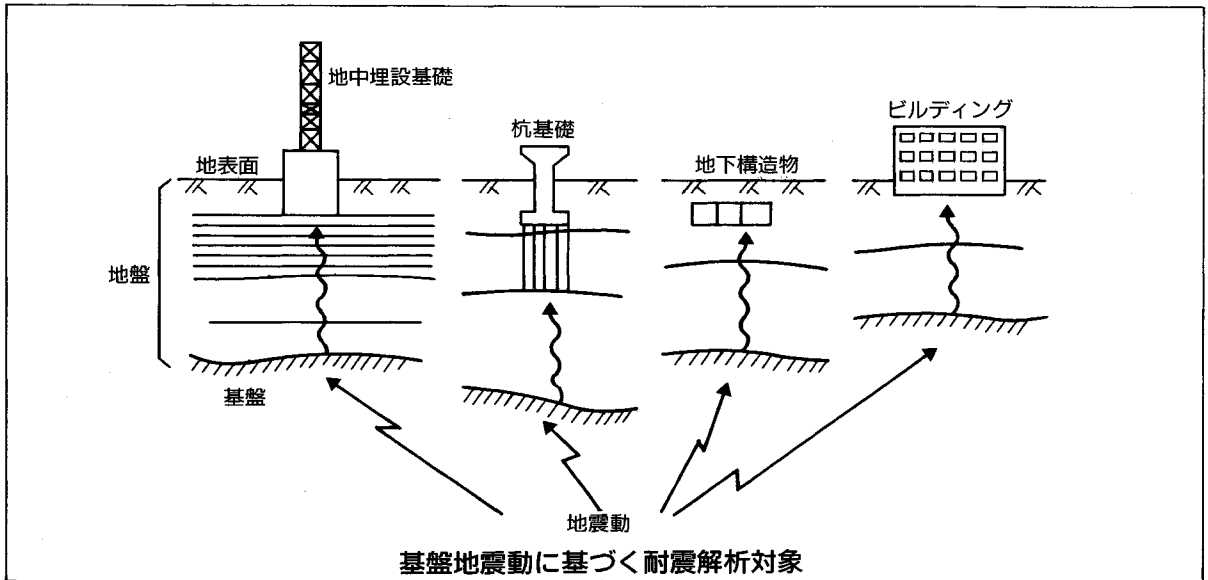
### 地震波入力

- 基礎面上の一樣入力：面内、面外
- 実体波(斜め入射可)：P波、SV波、SH波
- 表面波：レーリ波、ラブ波
- 点加振\* (下部構造物のみ)

### 解析手法

- 動的サブストラクチャー法：  
インピーダンス法、部分モード法
- 一体解析法
- 応答計算法：周波数応答法

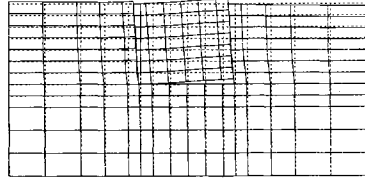
\*Version 3.0による機能追加



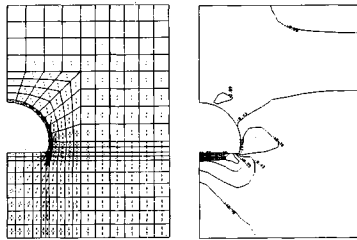
# Mr. SOIL Version-2.0

〈機能〉

- ・弾性及び弾塑性解析が可能
- ・掘削機能、盛土機能がある。
- ・地盤の不連続性や、構造物との相互作用が扱える。
- ・三角形要素、四角形要素、梁・棒要素、joint要素の準備。
- ・大型モデルは、CRCネットワークでメインフレーム処理が可能。



不連続性を考慮した地盤と構造物の解析



トンネル掘削による応力ベクトル/コンター図

- ・地震荷重、分布荷重が扱える
- ・荷重の段階的載荷が可能。
- ・弾性解での安全率（モール・クーロン基準）評価。
- ・充実したグラフィック機能（変形図、応力ベクトル図、応力コンター図、拡大機能）

販売価格:64万円 機種:NEC PC-9801シリーズ,IBM5550  
150万円 機種:SONY NEWS,DEC VAX,他

MR. SOIL 納入実績表 127社 (平成元年2月1日現在)

(株)アースコンサルタント (株)葵エンジニアリング (株)荒谷建設コンサルタント 上山試錐工業(株) (株)エイトコンサルタント (株)応用地学研究所 大阪大学 大阪市立工業研究所 (財)大阪土質試験所 大阪府立工業高等専門学校 岡山大学 (株)奥村組 技術研究所 奥村組土木興業(株) 小野田ケミコ(株) 小野田ケミコ(株) 鹿児島大学 梶谷エンジニア(株) 鹿島建設(株) 技術研究所 金沢大学 川崎地質(株) 関西電力(株) 建設部 土木課 岩水開発(株) 関西航測(株) 九州産業大学 九州産業大学 九州大学 工学部 九州大学 九州電機開発(株) 京都市立伏見工業高等学校 京都大学 京都大学 京都大学	協和電設(株) 近畿実測(株) 近畿大学 近畿大学 (株)熊谷組 (株)熊谷組 技術研究所 (株)建設企画コンサルタント (株)建設工学研究所 神戸大学 神戸大学 神戸大学 興亜開発(株) 佐賀大学 佐伯建設工業(株) サンコーコンサルタント(株) (株)CIT構造技術研究所 高根大学 昭和地質情報リサーチ(株) (株)新日本技術コンサルタント 新日鉄(株) 新技術計画(株) 技術設計部 (株)住化土建設計 住友建設(株) 技術研究所 住友建設(株) 促進工事(株) (株)第一コンサルタント 大成基礎設計(株) 大豊建設(株) (株)西建設(株) (株)ダイヤコンサルタント (株)高千穂設計コンサルタント	(株)タカラエンジニアリング (株)竹中工務店 技術研究所 玉野総合コンサルタント(株) (株)地崎工業 技術研究室 (株)地盤調査事務所 (株)中央設計技術研究所 中央復建コンサルタント(株) 通信土木コンサルタント(株) (株)テクノックス 東建地質調査(株) 東電設計(株) 東電設計(株) 東京地下工事(株) 東海大学 戸田建設(株) 土木工事技術室 西日本建設コンサルタント(株) (株)中堀ソイルコーナ 西松建設(株) 技術研究部 (株)日本基礎コンサルタント 日本大学 日本大学 日本鋼管(株) 中央研究所 日本鋼管(株) 日本シールドエンジニアリング(株) 日本工営(株) 日本工営(株) 日本通信建設(株) 日鉄鋳造コンサルタント(株) 日本水工設計(株) 日本道路公団 試験所 (株)日本パブリックエンジニアリング (株)日建技術コンサルタント	八戸工業大学 土木工学科 (株)阪神コンサルタント 東日本旅客鉄道(株) ヒメノコンサルタント(株) 広瀬鋼材産業(株) 福井大学 (株)藤井基礎設計事務所 フジタ工業(株) フジタ工業(株) 藤原技術士事務所 不動建設(株) 不動建設(株) 北光ジオリサーチ(株) 前田設計(株) 三井建設(株) 建築技術部 明治コンサルタント(株) メトロ設計(株) 山口大学 工学部 山口大学 工学部 山口大学 工学部 (株)四電技術コンサルタント りんかい建設(株) 和歌山工業高等専門学校 韓国 大林産業 韓国 三星建設 韓国 現代エンジニアリング 韓国 大韓コンサルタント 韓国 ソウル国立大学 オランダ デルフト大学
---	--	---	---

(あいうえお順 敬称略)

# UNICOUP v3.0

応力解析と浸透解析がドッキングした!

## 特長 (太字はV3.0による追加機能)

応力と地下水の流れをカップルさせた問題が解析可能です。(圧密含む)

地下水の流れは飽和・不飽和域を対象としています。

多段掘削・盛土や降雨等が扱えます。

梁や連結要素も扱え実用的です。

解析対象として平面ひずみ問題、軸対称問題が扱えます。

経時観測記録(変位・水位)があれば、非線形最小二乗法に基づき変形係数や透水係数が逆解析手法により求められます。

- ・線形弾性
- ・非線形弾性 (電中研式、ダンカン・チャンの双曲線モデル)
- ・弾塑性 (ドラッカー・ブラガー モール・クーロン ハードニング、ソフトニング カムクレイモデル含む)
- ・弾粘塑性 (関口・太田モデル)

## 対応機種

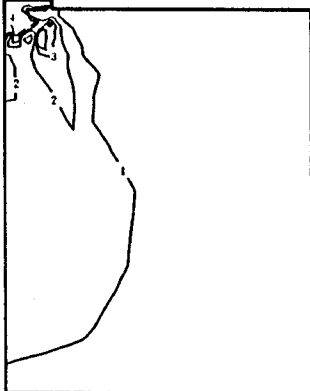
各種汎用機

各種EWS

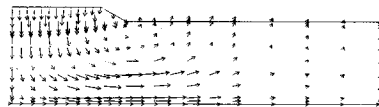
## 図化出力 (太字はV3.0による追加機能)

変位図、**変位ベクトル図**、**応力ベクトル図**、**応力コンター図**、**水頭コンター図**、**圧力水頭コンター図**、**安全率コンター図**

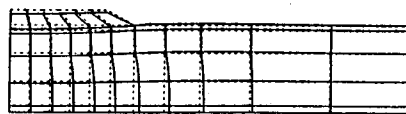
↓ (荷重)



応力増分コンター( $\Delta\sigma_v$ ) (10日後)



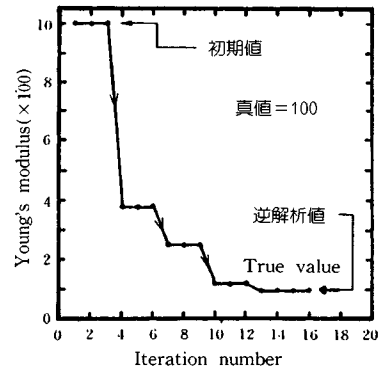
変位ベクトル図 (40日後)



盛土(40日)後の地盤の変形



盛土(40日)後の地下水の流れと水頭コンターおよび自由水面



ヤング率と繰り返し回数の関係

逆解析によるパラメータの推定

このシステムは、情報処理振興事業協会の委託を受けて開発したものです。

**IPA 情報処理振興事業協会**  
**CRC センチュリリサーチセンター 株式会社**

問合せ先  
 大阪市中央区久太郎町4丁目1-3  
 (06-241-4121) 営業担当: 遠藤・岩崎

昭和三十七年五月二十八日 第三種郵便物認可  
 平成元年五月二十日 印刷(毎月一回) 発行(二十日発行)  
 土木学会論文集

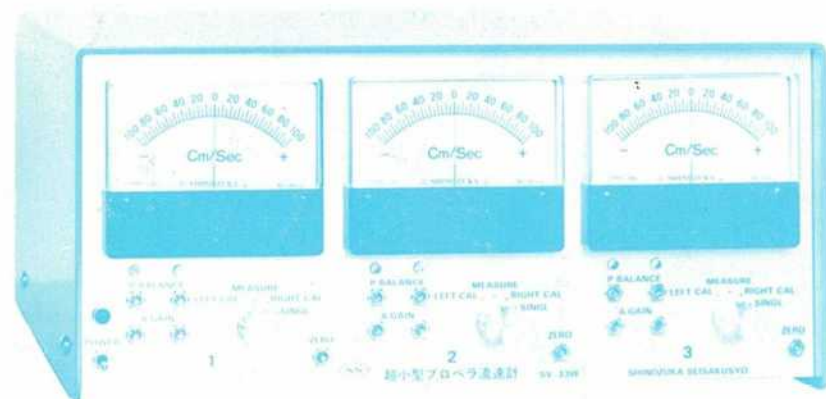
○ 土 木 学 会 論 文 集 ○

定価 一五〇円(本体価格一四五六円)

# 直径3ミリ

水理実験用に理想的

## 超小型プロペラ流速計 3チャンネル SV-33W型



米粒とプロペラ

- プロペラ検出器軸長 30~50cm, 軸の曲ったものも製作致します。

### 特 徴

- 赤外線のリターン検出で水温や水質に影響されません。
- 往復流の正逆判別は高感度で確実です。
- 正逆判別のないシングルのプロペラも使用出来ます。
- 独自の楕円軸に依り流れを乱すことが非常に小さくて済みます。
- プロペラが小さいので流速100cm/secで800~900パルスと高い分解能です。

A C サーボ水位計 SL-4 SL-20 SL-40

水理実験用測定器専門 **SS** 篠塚製作所

〒196 東京都昭島市玉川町2-8-21 電話 0425-44-1731

