

# 仮想仕事の原理に基づく粘性境界を用いた三次元構造物-地盤系の動的解析手法

## DYNAMIC ANALYSIS METHOD FOR 3-D SOIL-STRUCTURE INTERACTION SYSTEMS WITH THE VISCOUS BOUNDARY BASED ON THE PRINCIPLE OF VIRTUAL WORK

三浦房紀\*・沖中宏志\*\*

By Fusanori MIURA and Hiroshi OKINAKA

Since a region analyzed by the FEM must be finite, artificial boundaries are introduced into the model when a widely extending area such as infinite ground is analyzed. Special boundary conditions have been proposed for the artificial boundaries, such as a viscous boundary.

Although the commonly used viscous boundary has less ability to absorb energy, the boundary has many merits, for example, such as the applicability for nonlinear problem and simplicity of coding for computer programs. These merits are very important, especially for three dimensional nonlinear problems.

In this study, the viscous boundary for a full three dimensional interaction system was derived by virtual work. The effectiveness of the boundary was examined in detail, and it was found that the proposed viscous boundary showed good energy absorption, in contrast with previous formulation.

*Keywords: three dimensional analysis, soil-structure interaction, viscous boundary, the principle of virtual work*

### 1. ま え が き

構造物と地盤との動的相互作用解析には、材料非線形性あるいは複雑な形状をもつ構造物や境界のモデル化が可能なることから、有限要素法が用いられることが多い。しかし、有限要素法を用いて地盤などの広範な広がりをもつ系を解析の対象とする場合には、ある有限な領域で系を切断しなければならず、これによって構造物の振動あるいは地盤の不規則構造によって生じる散乱波のエネルギーはその系内に閉じこめられてしまう。そこで、この人為的に設けられた仮想境界で波動エネルギーを吸収する工夫が必要となるわけであり、これに対して現在まで大別して次の4通りの手法が提案されている。(i) エネルギー伝達境界 (Energy transmitting boundary)<sup>1)~3)</sup>, (ii) 混合境界 (Superimposing boundary)<sup>4)~6)</sup>, (iii) 境界要素法 (Boundary element method) とのハイブリッド法<sup>7)~13)</sup>, そして (iv) 粘性境界 (Viscous boundary)<sup>14)</sup>である。

これら境界の処理の仕方にはそれぞれ特徴があり、解

析の目的に応じてこれらは使い分けられる必要がある。エネルギー伝達境界と境界要素法とのハイブリッド法は基本的には周波数領域の解析であるので非線形問題を扱うことはできない。混合境界は時間領域での解析を基本とするため非線形解析が可能である。しかしながら、問題の次数を  $n$  とすると、境界の外側に  $2^n$  個の付加的な要素網を必要とし、自由度が増大するという短所がある。特に三次元問題においてはこの問題は無視できなくなる。これらの手法に対して、粘性境界は、解析領域内部が他の手法と同じ自由度であれば、エネルギー吸収能はやや劣るといわれているものの、i) 時間領域での解析が可能である、ii) 取扱いが容易、iii) 境界の外側に混合境界のような付加的な自由度を要しない、等の捨てがたい利点を有している。

このような観点から、本研究では、時間領域における三次元非線形動的解析を行うことを念頭において、仮想仕事の原理に基づいて粘性境界を用いた運動方程式の誘導を試みた。ここで誘導した粘性境界マトリックスを用いてエネルギー吸収の様子を調べた結果、反射波はほとんど生じることなく、精度よくエネルギーを吸収していることが明らかになった。また、地震応答解析を行う場合には、解析対象領域には基盤からエネルギーが流入す

\* 正会員 工博 山口大学助教授 工学部建設工学科  
(〒755 山口県宇部市常盤台 2557)

\*\* 正会員 工修 (株)大林組名古屋支店(元・山口大学院生)  
(〒461 名古屋市東区東桜 1-10-19)

ると同時に解析領域側方の自由地盤の運動によってもエネルギーの授受が行われる。この点に関してもうまく表現できることが明らかとなったのでここに報告するものである。

2. 仮想仕事の原理に基づいた地盤-構造物動的相互作用系の運動方程式の誘導

(1) 仮想仕事の原理

動的問題における仮想仕事の原理は次式のように書ける。

$$\int_V \delta\{e\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \delta\{u\}^T (\{F\} - \eta\{\dot{u}\} - \rho\{\ddot{u}\}) dV - \int_S \delta\{u\}^T \{T\} ds = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\delta\{e\}$ ,  $\delta\{u\}$ ,  $\{\sigma\}$ ,  $\{F\}$ ,  $\{u\}$ ,  $\{T\}$  は順に、仮想ひずみ、仮想変位、応力、物体力、変位、トラクションのベクトルである。また、 $\eta$ ,  $\rho$  はそれぞれ粘性係数、密度である。

物体力の代わりに、基盤から加速度  $\ddot{z}$  を受け、また外力ベクトル  $\{f\}$  が作用するものとし、通常有限要素法で行われる手順に従って離散化することによって、式(1)の左辺第1項、第2項をマトリックス表示すると式(1)は次式のように書ける。

$$\delta\{u\}^T ([K]\{u\} + [C]\{\dot{u}\} + [M]\{\ddot{u}\}) - \int_S \delta\{u\}^T \{T\} ds = \delta\{u\}^T (-[M]\{\ddot{z}\} + \{f\}) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $[K]$ ,  $[C]$ ,  $[M]$  はそれぞれ剛性、減衰、質量マトリックスであり、 $\{u\}$  は節点変位ベクトルである。ここで、第2項の面積積分が人為的に設けた境界でのエネルギーの授受を表わすものである。すなわち、地盤-構造物相互作用系のモデル化を Fig. 1 に示すように設定すれば、第2項は基盤からの加振に対して i) 解析領域内

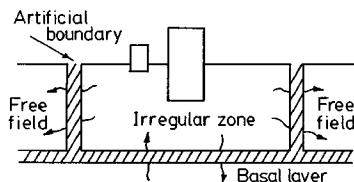


Fig. 1 A schematic drawing of a dynamic soil-structure interaction system.

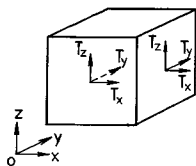


Fig. 2 Notations of traction on the boundary surfaces.

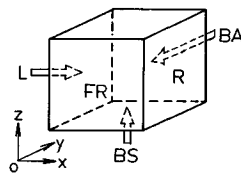


Fig. 3 Boundary names used in this study.

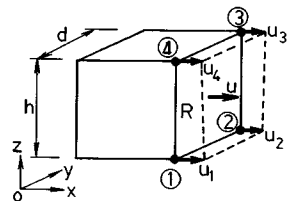


Fig. 4 The relationship between displacement,  $u$ , and nodal displacements,  $u_i$ , on the boundary  $R$ .

部 (Irregular zone) から基盤 (Basal layer) および側方自由地盤 (Free field) への逸散波によってなされる仕事, ii) 側方自由地盤の振動によってなされる仕事, の2種類の仕事を表わすものである。換言すれば、前者は解析領域内から外へのエネルギーの流出に対応し、後者は解析領域外から内へのエネルギー流入に対応する。本研究の目的はこの第2項を有限要素法によって離散化し、上述の両仕事が精度よくなされているかどうかを調べることである。以下、本研究においては前者を内部加振問題、後者を外部加振問題とよぶことにする。次の(2)が前者に、(3)、(4)が後者に関するマトリックスの誘導となる。

(2) 粘性境界マトリックスの誘導

ここでは、解析領域内部からの逸散波によって境界でなされる仮想仕事を用いて、境界に付与すべき条件を求める。具体的には、境界上の節点速度と節点力を関係づけるマトリックスを誘導することになる。なお、本研究においてはこれを粘性境界マトリックスとよぶことにする。

式(1)第3項より、仮想仕事を  $\delta W$  とすると、これは次式で与えられる。

$$\delta W = \int_S T_j \delta u_j ds \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $j$  は  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向を意味し、 $\delta u_j$  は  $j$  方向の仮想変位を意味する。上式のトラクション  $T_j$  は境界面の速度を  $\dot{u}_j$  とすると、次式で表わされる (Fig. 2 参照)。

$$T_j = a\rho V \dot{u}_j \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\rho$  は密度、 $V$  は弾性波速度であり、着目している境界の運動方向によって、横波速度  $V_s$  あるいは縦波速度  $V_p$  がとられる。また、 $a$  は任意の係数であるが、 $a=1$  のとき、最もエネルギーの吸収がよいことが Lysmer によって示されているので<sup>14)</sup>、以下においては  $a=1$  とする。

三次元問題を扱う場合、境界面は Fig. 3 に示すように側方に左 (L) 右 (R) 前 (FR) 後 (BA) の4面と底面 (BS) の計5面ある。ここでは、側方 R に対する粘性境界マトリックスの誘導を示す。他の境界についても、

対象とするトラクション, 変位, 速度成分が異なるのみで考え方は全く同じである.

a)  $x$  方向の運動に伴う粘性境界マトリックスの成分  
この場合に対象となる弾性波速度は変位成分が  $R$  面と垂直であるので  $V_p$  となる. したがって,  $x$  方向の境界面の速度を  $\dot{u}$  とすると, トラクション  $T_x$  は式 (4) より次式で与えられる.

$$T_x = \rho V_p \dot{u} \dots \dots \dots (5)$$

Fig. 4 に示した要素の境界面  $R$  における  $x$  方向の仮想変位  $\delta u$  のなす仮想仕事  $\delta W_x$  は式 (5) を式 (3) へ代入して次式で与えられる.

$$\delta W_x = \int_0^h \int_0^d \rho V_p \dot{u} \delta u dy dz \dots \dots \dots (6)$$

ここで, 変位  $u$  は形状関数  $\{N\}$ , 節点変位  $\{u\}$  を用いて次式で与えられる.

$$u = \frac{1}{dh} \{N\} \{u\} \dots \dots \dots (7)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \{N\} &= \{(h-z)(d-y)(h-z)y \ yz \ z(d-y)\} \\ \{u\} &= \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4\}^T \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

式 (7) より, 速度  $\dot{u}$  および仮想変位  $\delta u$  はそれぞれ次式で与えられる.

$$\dot{u} = \frac{1}{dh} \{N\} \{\dot{u}\}, \delta u = \frac{1}{dh} \{N\} \{\delta u\} \dots \dots \dots (9)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{u}\} &= \{\dot{u}_1 \ \dot{u}_2 \ \dot{u}_3 \ \dot{u}_4\}^T \\ \{\delta u\} &= \{\delta u_1 \ \delta u_2 \ \delta u_3 \ \delta u_4\}^T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

式 (9) を式 (6) へ代入すれば, 仮想仕事  $\delta W_x$  は,

$$\delta W_x = \{\delta u\} \frac{\rho V_p dh}{36} [R] \{\dot{u}\} \dots \dots \dots (11)$$

ここに,  $[R]$  は次式で与えられる (4×4) のマトリックスである.

$$[R] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (12)$$

一方, 式 (11) で与えられる仮想仕事  $\delta W_x$  は, 節点力ベクトル  $\{f^x\}$  を用いて次式で与えられる.

$$\delta W_x = \{\delta u\} \{f^x\} \dots \dots \dots (13)$$

ここに,

$$\{f^x\} = \{f_1^x \ f_2^x \ f_3^x \ f_4^x\}^T \dots \dots \dots (14)$$

したがって, 節点力ベクトル  $\{f^x\}$  は, 式 (11) と式 (13) を等置することによって次のように求まる.

$$\{f^x\} = \frac{\rho V_p dh}{36} [R] \{\dot{u}\} \dots \dots \dots (15)$$

b)  $y, z$  方向の運動に伴う粘性境界マトリックスの成分

Fig. 3 よりわかるように  $y$  方向の運動は  $R$  面に平行

であるから対象となる弾性波速度は  $V_s$  となる.  $y$  方向の速度成分を  $\dot{v}$  とすると, この方向のトラクション  $T_y$  は  $T_y = \rho V_s \dot{v}$  となり, これと仮想変位  $\delta v$  のなす仮想仕事  $\delta W_y$  は次式で与えられる.

$$\delta W_y = \{\delta v\} \frac{\rho V_s dh}{36} [R] \{\dot{v}\} \dots \dots \dots (16)$$

ここに,  $\{\delta v\}$ ,  $\{\dot{v}\}$  はそれぞれ仮想変位ベクトル, 節点速度ベクトルである.

$y$  方向の節点力ベクトルを  $\{f^y\}$  とすると, これは  $x$  方向と同様の考え方をして,

$$\{f^y\} = \frac{\rho V_s dh}{36} [R] \{\dot{v}\} \dots \dots \dots (17)$$

を得る.

$z$  方向の運動に対しても対象となる弾性波速度は  $V_s$  であるが, 境界面の速度は  $z$  方向の速度成分  $\dot{w}$  が対象となる.  $x, y$  方向と同様の議論より,  $z$  方向の節点力ベクトル  $\{f^z\}$  は節点速度ベクトル  $\{\dot{w}\}$  を用いて次式で与えられる.

$$\{f^z\} = \frac{\rho V_s dh}{36} [R] \{\dot{w}\} \dots \dots \dots (18)$$

c) 境界  $R$  の粘性境界マトリックス

以上より, 境界  $R$  上の粘性境界マトリックスは, これを  $[C]_R^e$  と表わすと, 式 (15), (17), (18) より次式によって与えられる.

$$\{f\} = [C]_R^e \{\dot{\delta}\} \dots \dots \dots (19)$$

ここに,

$$\{f\} = \{f_1^x \ f_1^y \ f_1^z \ \dots \ f_4^x \ f_4^y \ f_4^z\}^T \dots \dots \dots (20)$$

$$\{\dot{\delta}\} = \{\dot{u}_1 \ \dot{v}_1 \ \dot{w}_1 \ \dots \ \dot{u}_4 \ \dot{v}_4 \ \dot{w}_4\}^T \dots \dots \dots (21)$$

であり,  $[C]_R^e$  は次式で与えられる.

$$[C]_R^e = \frac{\rho h d}{36} \begin{bmatrix} 4V_p & 0 & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & 0 & V_p & 0 & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 \\ 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 \\ 2V_p & 0 & 0 & 4V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & V_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 0 \\ V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & 4V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 0 \\ 2V_p & 0 & 0 & V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & 4V_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (22)$$

他の境界についても全く同様の手順によって粘性境界マトリックスが求まる.  $[C]_{RN}^e$  を式 (23) に,  $[C]_{RS}^e$  を式 (24) に示す.

$$[C]_{FR}^l = \frac{\rho l h}{36} \begin{bmatrix} 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 \\ 0 & 4V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 \\ 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s \\ 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 \\ 0 & 2V_p & 0 & 0 & 4V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & V_p & 0 \\ 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s \\ V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & 4V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 \\ 2V_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2V_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & 4V_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[C]_{BS}^l = \frac{\rho l d}{36} \begin{bmatrix} 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 \\ 0 & 4V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 \\ 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 & 2V_s \\ 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s & 0 & 0 \\ 0 & 2V_p & 0 & 0 & 4V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & V_p & 0 \\ 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & V_s \\ V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & 4V_p & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 2V_s & 0 \\ 2V_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2V_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 2V_p & 0 & 0 & 4V_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 2V_s & 0 & 0 & 4V_s & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

また、 $[C]_L^l$  と  $[C]_{BA}^l$  は次の関係より求まる。

$$[C]_L^l = [C]_R^l, [C]_{BA}^l = [C]_{FR}^l \quad (25)$$

式 (23), (24) 中の  $l$  は要素の  $x$  方向の幅である。

なお、一般に使われる粘性境界は、その粘性境界マトリックスが対角マトリックスとなる。これは、式 (22) ~ (24) で与えられる粘性境界マトリックスの非対角要素を対角項に集中したものと一致する。したがって、本研究で誘導した粘性境界マトリックスと一般に用いられる粘性境界マトリックスとの関係は、ちょうど整合質量マトリックスと集中質量マトリックスの関係と同様になる。

(3) 側方境界剛性マトリックスの誘導

自由地盤の運動によってなされる仮想仕事は、解析領域と自由地盤を連続と考えて両者間の境界の位置における応力を求め、これにこの位置における仮想変位を掛けることによって求まる。こうして導かれた自由地盤の運動と境界上の節点力の関係から、2種類のマトリックスが定義できる。それらは、自由地盤の変位と速度に関するものである。本研究では前者を側方境界剛性マトリックスとよび、後者を側方境界減衰マトリックスとよぶことにする。

以下においては、まず自由地盤が水平振動（せん断振

動）をしている場合について側方境界剛性マトリックスを誘導する。鉛直振動についても全く同様の考えによって誘導することができる。

a) 自由地盤が  $x$  方向に振動するとき

自由地盤の変位振幅を  $u^f$  とすると、 $u^f$  は  $z$  のみの関数である。したがって、 $u^f$  によって生じる自由地盤内のひずみは弾性論より  $\gamma_{zx}$  のみであり、応力も  $\tau_{zx}$  のみである。すなわち、

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u^f}{\partial z} \quad (26)$$

$$\tau_{zx} = \mu \gamma_{zx} = \mu \frac{\partial u^f}{\partial z} \quad (27)$$

ここに、 $\mu$  はせん断弾性係数である。

仮想変位  $\delta u^f$  のなす仮想仕事  $\delta W_{zx}$  は、式 (27) を式 (3) へ代入することによって求まる。すなわち、

$$\delta W_{zx} = \int_0^h \int_0^a \tau_{zx} \delta u^f dy dz \quad (28)$$

ここで、変位  $u^f$  を Fig. 5 に示すように節点変位ベクトル  $\{u^f\}$  を用いて表わすことにする。すなわち、

$$u^f = \frac{1}{2h} [N_u] \{u^f\} \quad (29)$$

ここに  $[N_u]$  は形状関数ベクトルであり、一次関数を用いれば次式で与えられる。

$$\{N_u\} = \{(h-z)z, (h-z)z\} \quad (30)$$

また、 $\{u^f\}$  は節点変位ベクトルであり、次式で与えられる。

$$\{u^f\} = \{u_1^f, u_{i+1}^f, u_i^f, u_{i+1}^f\}^T \quad (31)$$

式 (29) より、仮想変位  $\delta u^f$  は次式で表わせる。

$$\delta u^f = \frac{1}{2h} [N_u] \{\delta u^f\} \quad (32)$$

仮想仕事  $\delta W_{zx}$  は式 (28) へ式 (27), (29) ~ (32) を代入することによって求まる。すなわち、

$$\begin{aligned} \delta W_{zx} &= \{\delta u^f\} \frac{\mu}{4h^2} \int_0^h \int_0^a [N_u]^T \frac{\partial [N_u]}{\partial z} dy dz \{u^f\} \\ &= \{\delta u^f\} \frac{\mu d}{8} [S] \{u^f\} \quad (33) \end{aligned}$$

ここに、

$$[S] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

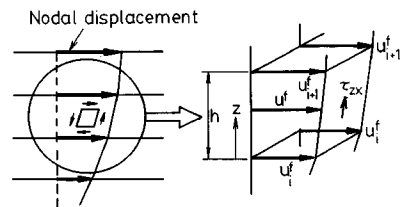


Fig. 5 The relationship between the nodal displacements of the free field and the induced stress.

一方、節点力ベクトルを  $\{f\}$  とすると、これによる仮想仕事  $\delta W_{zx}$  は次式で与えられる。

$$\delta W_{zx} = \{\delta u\}^T \{f\} \dots \dots \dots (35)$$

ここで、式 (33) と式 (35) を等置することにより  $\{f\}$  が次式のように求まる。

$$\{f\} = \frac{\mu d}{8} [S] \{u\}^T = [G]_R^e \{u\}^T \dots \dots \dots (36)$$

ここに、 $[G]_R^e$  が求めるべき側方 (R 面) 境界剛性マトリックスであり、次式で与えられる。

$$[G]_R^e = \frac{\mu d}{8} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (37)$$

同様に、L 面の境界剛性マトリックス  $[G]_L^e$  が求まり、 $[G]_L^e$  と  $[G]_R^e$  との間には次の関係が成立する。

$$[G]_L^e = -[G]_R^e \dots \dots \dots (38)$$

b) 自由地盤が  $y$  方向に振動するとき

自由地盤の変位振幅を  $v'$  とする、 $v'$  は  $x$  方向加振時の  $u'$  と同様に  $z$  のみの関数であるから、このとき自由地盤内に存在するひずみは  $\gamma_{yz}$  のみであり、応力も  $\tau_{yz}$  のみとなる。したがって、

$$\tau_{yz} = \mu \gamma_{yz} = \mu \frac{\partial v'}{\partial z} \dots \dots \dots (39)$$

仮想変位  $\delta v'$  のなす仮想仕事  $\delta W_{yz}$  は次式で与えられる。

$$\delta W_{yz} = \int_0^h \int_0^l \tau_{yz} \delta v' dx dz \dots \dots \dots (40)$$

以下、 $x$  方向加振時と同様の離散化、式の変形を行うことによって、BA 面の境界剛性マトリックス  $[G]_{BA}^e$  が次式のように求まる。

$$[G]_{BA}^e = \frac{\mu l}{8} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (41)$$

また、FR 面の  $[G]_{FR}^e$  と  $[G]_{BA}^e$  との間には次の関係がある。

$$[G]_{FR}^e = -[G]_{BA}^e \dots \dots \dots (42)$$

(4) 側方境界減衰マトリックス

前項においては、自由地盤の変位による境界上の節点力に関係する境界剛性マトリックスの誘導を行ったが、ここでは自由地盤の速度による寄与をも評価するための側方境界減衰マトリックスを誘導する。速度による寄与は変位による寄与に比べると一般に小さいため省略しても實際上問題が少ないことが多いが、精度よく解を求めるためにはこれも必要である。これはちょうど多点異入力の解析において、外力としての速度項がしばしば省略されることに似ている<sup>15)</sup>。

側方境界減衰マトリックスを  $[G_c]_i^e$  ( $i=R, L, FR,$

BA) とすると、これはレイリー減衰の一種である剛性比例型を仮定して、次式で与えれば十分な精度が得られる。

$$[G_c]_i^e = \frac{h_d}{\pi f} [G]_i^e \dots \dots \dots (43)$$

ここに、 $h_d$  は振動数  $f$  に対する減衰定数であり、 $[G]_i^e$  は側方境界剛性マトリックス ( $i=R, L, FR, BA$ ) である。

(5) 運動方程式

以上の (2)~(4) で導いた粘性境界マトリックス、側方境界剛性マトリックス、側方境界減衰マトリックスを各境界の節点の自由度に対応して集成し、式 (2) へ代入すると相互作用系の運動方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} [M] \{\dot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} + [C]_{BS} \{\dot{u}\} \\ + [C]_{FR} (\{\dot{u}\} - \{\dot{u}'\}_{FR}) + [C]_{BA} (\{\dot{u}\} - \{\dot{u}'\}_{BA}) \\ + [C]_L (\{\dot{u}\} - \{\dot{u}'\}_L) + [C]_R (\{\dot{u}\} - \{\dot{u}'\}_R) \\ = -[M] \{z\} + \{f\} + [G]_{FR} \{u'\}_{FR} + [G]_{BA} \{u'\}_{BA} \\ + [G]_L \{u'\}_L + [G]_R \{u'\}_R \\ + [G_c]_{FR} \{\dot{u}'\}_{FR} + [G_c]_{BA} \{\dot{u}'\}_{BA} \\ + [G_c]_L \{\dot{u}'\}_L + [G_c]_R \{\dot{u}'\}_R \end{aligned}$$

これを未知量と既知量に分けて整理すると次式となる。

$$\begin{aligned} [M] \{\dot{u}\} + ([C] + [C]_{BS} + [C]_{FR} + [C]_{BA} \\ + [C]_L + [C]_R) \{\dot{u}\} + [K] \{u\} \\ = -[M] \{z\} + \{f\} + [G]_{FR} \{u'\}_{FR} \\ + [G]_{BA} \{u'\}_{BA} + [G]_L \{u'\}_L + [G]_R \{u'\}_R \\ + ([G_c]_{FR} + [C]_{FR}) \{\dot{u}'\}_{FR} \\ + ([G_c]_{BA} + [C]_{BA}) \{\dot{u}'\}_{BA} \\ + ([G_c]_L + [C]_L) \{\dot{u}'\}_L \\ + ([G_c]_R + [C]_R) \{\dot{u}'\}_R \dots \dots \dots (44) \end{aligned}$$

ここに、 $[C]_{BS}$  : 底面での粘性境界マトリックス

$[C]_i$  : 粘性境界マトリックス

$[G]_i$  : 側方境界剛性マトリックス

$[G_c]_i$  : 側方境界減衰マトリックス

$\{u'\}_i$  : 自由地盤の変位ベクトル

$\{\dot{u}'\}_i$  : 自由地盤の速度ベクトル

$i$  は Fig. 2 に示す境界面 FR, BA, L, R を示す。また、自由地盤の変位  $\{u'\}$  および速度  $\{\dot{u}'\}$  は次式で与えられる自由地盤の運動方程式を解くことによって求まる。

$$[M'] \{\ddot{u}'\} + [C'] \{\dot{u}'\} + [K'] \{u'\} = -[M'] \{z\} \dots \dots \dots (45)$$

ここに、 $[M']$ ,  $[C']$ ,  $[K']$  は自由地盤の質量、減衰、剛性マトリックスであり、水平振動 (せん断振動) の場合の要素質量、剛性マトリックスはそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} [M']^e &= \frac{\rho H}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ [K']^e &= \frac{\mu}{H} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

ここに、 $\rho$  は密度、 $\mu$  はせん断弾性係数、 $H$  は要素の厚さ（高さ）である。減衰マトリックスはレイリー減衰で与えればよい。

式 (44) が解くべき運動方程式であるが、内部加振問題の場合は基盤加速度  $\ddot{u}_0$  および自由地盤の変位  $\{u\}$ 、速度  $\{\dot{u}\}$  は 0 であるので、右辺の外力項は  $\{f\}$  だけとなる。一方、外部加振問題のときは  $\{f\} = 0$  となる。

### 3. 解析手法の妥当性の検討

ここでは、前章で誘導した運動方程式の妥当性の検討を行う。まず、解析領域内の一点を加振して、それによって生じる逸散波動が粘性境界でどの程度吸収されるかを調べる（内部加振問題）。次に、不規則性をもたない地盤モデルを基盤から加振、したがって側方の自由地盤からも加振し、解析領域内の運動が境界剛性マトリックス、境界減衰マトリックスによって自由地盤の運動と一致したものとなるか否かの検討を行う（外部加振問題）。

#### (1) 内部加振問題

ここでは、異なる境界条件を有するモデルを用いて内部加振を行い、本研究で提案した粘性境界の有効性を示す。

##### a) 解析モデル

以下の検討に用いる有限要素モデルを Fig. 6 に示す。このモデルは  $8 \times 8 \times 4$  要素からなっている。材料定数は単位体積重量  $2.0 \text{ t/m}^3$ 、ポアソン比 0.4、せん断波速度  $500 \text{ m/s}$  とし、減衰定数は 0 とする。ここに、減衰定数を 0 としているのは、境界からの逸散減衰を明らかにするためである。

比較のために用いる境界条件を Fig. 7(a)~(d) に示す。これは、Fig. 6 に示したモデル中央点 A を通る  $x$ - $z$  面を示したもので、 $y$ - $z$  面でも同様である。図 (a) はモデルの側面、底面の両方に粘性境界を用いたもので、“境界 VV”，(b) はモデルの側面に粘性境界を用い、底面を固定したもので、“境界 VX”，(c) はモデルの側面を自由、底面を固定したもので“境界 RX”，(d) はモデルの側面、底面いずれも固定したもので、“境界 XX”と以下よぶことにする。

内部加振力は、Fig. 8 に示すように、最大  $200 \text{ t}$  で、0.5 秒間のベル型荷重とする。これをモデルの A 点に  $x$  方向および  $z$  方向に作用させる。

##### b) 解析結果

Fig. 9 に点 A に  $x$  方向に加振したときの点 A における加速度、速度、変位の時刻歴を各境界条件ごとに示す。図 (a) は境界 VV、(b) は VX、(c) は RX、(d) は XX である。また、これらと比較するために、通常用いられる粘性境界、すなわち対角マトリックスの粘性境界マトリックスを用いたときの境界 VV の時刻歴を図 (e)

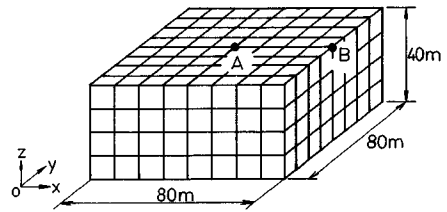


Fig. 6 The finite element model of Model 1.

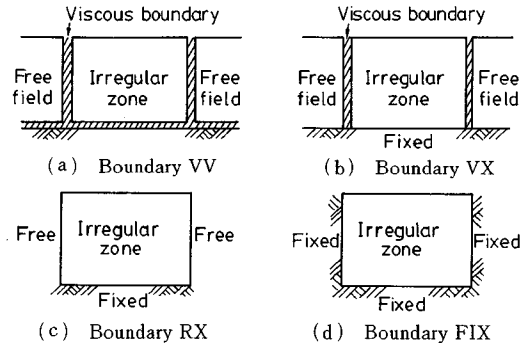


Fig. 7 Different boundary conditions used in this study for comparison.

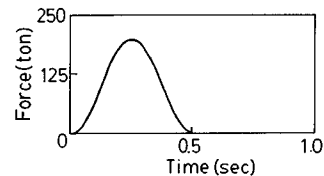


Fig. 8 External force applied to point A of the models.

に境界 VX のそれを図 (f) に示す。

加振力の継続時間は 0.5 秒である。したがって、これ以後の振動は境界からの反射波によるものと思われる。また、A 点に加振を開始することによって P 波が発生し ( $V_p = 1225 \text{ m/s}$ )、これが最短距離にある境界で反射し再び A 点に戻ってくるのに要する時間は 0.065 秒である ( $80 \text{ m} \div 1225 \text{ m/s}$ )。図中にはこの時刻を矢印で示しているが、この時刻以後に波形の乱れが生じていれば、それも反射波によるものと思われる。以上の観点から、Fig. 9 をみると、以下のことがわかる。

まず、図 (c)、(d) の境界 RX、XX の波形をみると、境界からの反射波によって 0.5 秒以後にも大きな振幅の振動が続いており、またそれ以前にも波形の乱れがみられる。この傾向は加速度波形で最も顕著である。これに対し、図 (a)、(b) の境界 VV、VX の加速度波形をみると、約 0.065 秒以後にわずかな波形の乱れが、また 0.5 秒以後にもわずかな振動が認められているが、その振幅は上述の境界 RX、XX に比べるとはるかに小さいものになっている。また、一般に用いられる粘性境界を

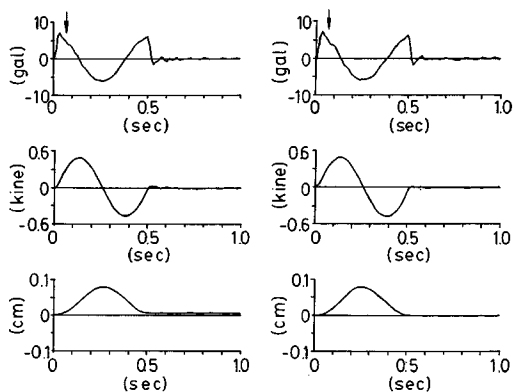
用いた結果である図 (e) と (f) をみると、これらは図 (a), (b) よりもむしろ図 (c), (d) に近い状態であり、境界での波動エネルギーの吸収能があまりよくないことを示している。以上の比較、またここでの解析は内部減衰が0であるということを考えると、本研究で提案した粘性境界マトリックスはエネルギー吸収能が高く、実用

にも十分耐え得るものであることがわかる。

次に変位波形をみると、図 (a) の境界 VV を用いたモデルには残留変位が存在する。このモデルは有限要素モデルの全周辺をダッシュポットのみで支えているもので、ばねによる復元力は期待できないものである。したがって、一方向に卓越した外力が作用すると、モデルの性質上その方向に残留変位を生じる。しかし実在する地盤-構造物系にはそのような残留変位を生じるはずはなく、この残留変位は本来0となるべきものである。

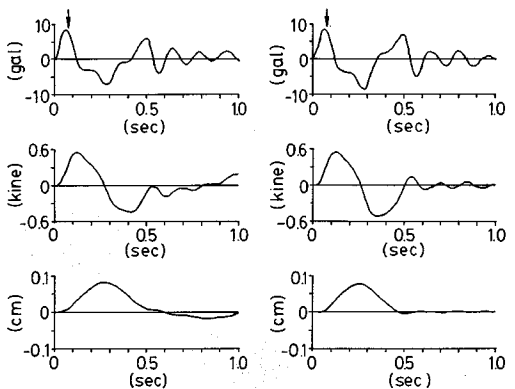
Fig. 10 は、この残留変位がモデルの大きさによってどの程度異なるかを示したものである。図中のモデル1は前述の  $8 \times 8 \times 4$  要素からなるモデル、モデル2は  $6 \times 6 \times 3$  要素からなるモデル、モデル3は寸法がモデル1の半分の  $4 \times 4 \times 2$  要素からなるモデルである。これより、モデルが小さくなるほど残留変位は大きくなることわかる。このことは、残留変位を小さくするためにはある程度モデルを大きくしなければならないことを意味する。しかしこれは、モデルをできるだけ小さくするために粘性境界を導入する、という初期の目的に反することになる。

そこで、底面を固定している（したがって残留変位は0）境界 VX に着目し、その加速度と速度波形を境界 VV のそれと比較すると (Fig. 9(a) と (b)), 両者の間



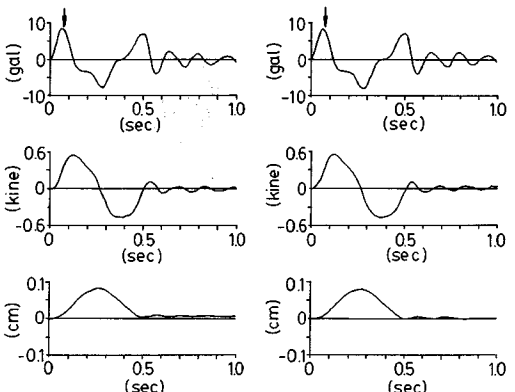
(a) Boundary VV

(b) Boundary VX



(c) Boundary RV

(d) Boundary FIX



(e) Boundary VV  
(Traditional V. B.)

(f) Boundary VX  
(Traditional V. B.)

Fig. 9 Comparison of response curves obtained from different boundary condition models.

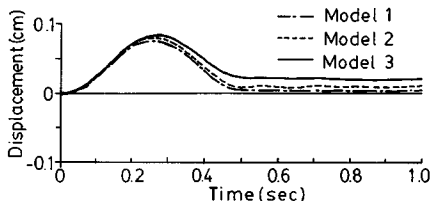


Fig. 10 Comparison of response displacements for three models with the boundary VV.

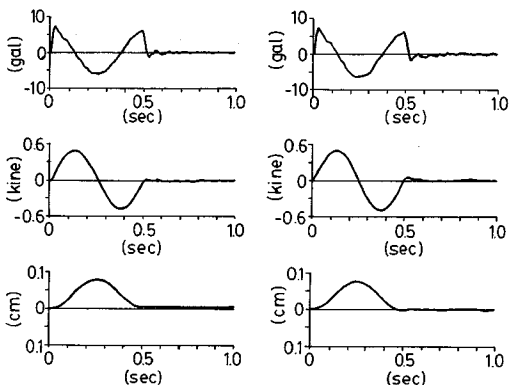


Fig. 11 Comparison of response curves for the boundaries VV and VX when the models are subjected to vertical excitation.

にはほとんど差が認められない。これは固定条件となっている底面と加振方向が平行であるためこのように差がないものと考えられる。そこで、加振方向が鉛直方向の場合、すなわち加振方向前面に固定境界がある場合の境界 VV と境界 VX の波形を比較するために示したのが Fig. 11 である。これより、図 (b) の境界 VX の方が、加速度、速度ともに 0.5 秒以後の振幅がわずかではあるが大きき、反射波の影響が多く現われている。しかしこの程度の差であれば実用上は問題にならないといえよう。ちなみに、内部減衰を 5% とすれば、両者はほとんど一致することを別途確かめている。

Fig. 12 は境界 VX の妥当性を示すために  $x$  方向加振時のモデルの表面の変位の最大値を加振点からの距離を横軸にとって示したものである。図 (a) は境界 VV、図 (b) は境界 VX に対するものである。境界での処理がうまくいってれば、大きさの異なる 3 つのモデルの応答値はすべて一致するはずである。そこで、両者を比較すると、境界 VV の方にはモデルによる差が生じているが、境界 VX にはほとんど差は生じていない。

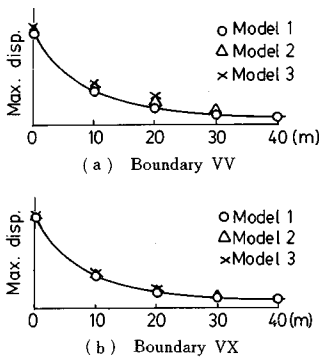


Fig. 12 Attenuation curves of the maximum displacement.

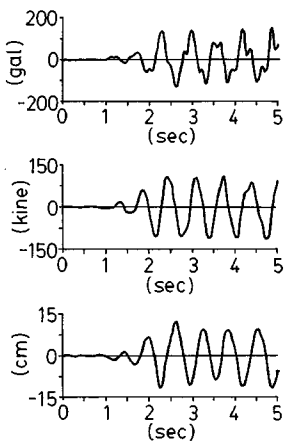


Fig. 13 Response curves at the free surface when the free field is subjected to the El Centro NS accelerogram.

以上の検討結果を要約すると、本研究で誘導した粘性境界を用いれば、底面固定境界条件のモデルが精度、経済性の両面から最もよいといえよう。

(2) 外部加振問題

ここでは基盤入力による応答計算を行い、本研究で誘導した境界剛性マトリックス  $[G]$ 、境界減衰マトリックス  $[G_c]$  の妥当性の検討を行う。具体的には、自由地盤と同一の構成を有する三次元地盤モデルの応答解析を行う。もし、境界剛性、減衰マトリックスが両方とも正しく自由地盤内の応力状態に等価な節点力を有限要素モデルの境界上の節点に作用しておれば、有限要素モデルの応答は自由地盤と同一になるはずである。たとえば、水平加振をした場合、有限要素モデル内の節点変位は鉛直成分は 0 で、水平成分だけが存在し、しかもその振幅、位相ともに自由地盤のそれらと同一となるはずである。もし逆に、境界剛性、減衰マトリックスの機能が不十分であれば、境界の影響によって鉛直成分が 0 でなくなったり、同一水平面内の応答値が場所によって異なっていく

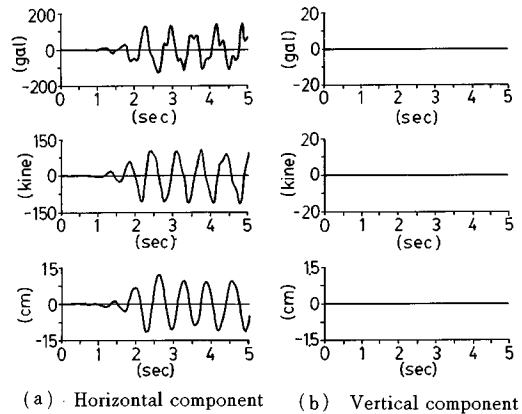


Fig. 14 Response curves at the boundary of 3 D ground model with the boundary VX.

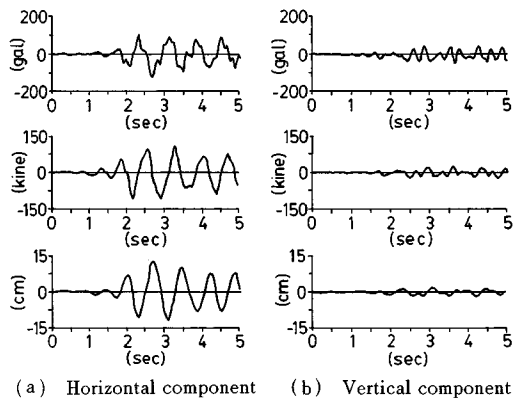


Fig. 15 Response curves at the boundary of 3 D ground model with the boundary RX.



る。以下、以上の点に着目して妥当性の検討を行う。

解析に用いるモデルは、前項で述べたモデル1を用いる。入力波としてはEl Centro (1940) NS成分を用いる。境界条件としては、前項の結果より境界 VX とする。

Fig. 13 は自由地盤の水平方向の地表面加速度、速度、変位の時刻歴である。Fig. 14(a) はモデル1の境界上の点における水平加速度、速度、変位の時刻歴である。この図と Fig. 13 とを比較すると完全に一致していることがわかる。また Fig. 14(b) は同じ点の鉛直方向の応答時刻歴であるが、全く応答成分は0であることがわかる。ちなみに Fig. 15(a) は境界 RX のときの同点の水平方向の応答加速度であり、(b) は鉛直方向の応答時刻歴である。これより、鉛直方向は応答が0ではなく、水平方向も Fig. 13 の自由地盤の応答とは異なっていることがわかる。これらの事柄は、他のモデル、他の入力波についても同様である。以上より、本研究で誘導した境界剛性マトリックス、境界減衰マトリックスは正しく機能していることがわかる。

#### 4. 結 論

本研究は、有限要素法を用いて三次元地盤-構造物系の動的応答解析を時間領域で行うために、地盤の境界に粘性境界を導入し、その適用性について検討を行ったものである。従来も粘性境界は用いられているが、この粘性境界は、境界の自由度に対応する減衰マトリックスの対角要素のみに  $\rho V l$  (ここに、 $\rho$  は密度、 $V$  は弾性波速度、 $l$  は境界上の節点の受け持つ長さ、三次元であれば面積) を単に加えたものであり、必ずしもエネルギー吸収能の高いものではなかった。

本研究では仮想仕事の原理に基づいて粘性境界マトリックスの誘導、あわせて周辺の自由地盤の運動に関連する境界剛性マトリックス、境界減衰マトリックスも誘導した。その結果、粘性境界マトリックスは非対角要素にも値をもち、通常用いられる粘性境界マトリックスは本研究で誘導されたものを対角項に集中させた場合であることが判明した。

導いた運動方程式を用いて、まず波動エネルギーが境界によって反射されることなくまぐ吸収されているかを調べるために内部加振問題を行い、次いで、周辺の自由地盤からの加振も正しく行われているかの検討を行うために外部加振問題を行って、その妥当性の検証を行った。以下にそのまとめを述べる。

##### (1) 内部加振問題に関して

本研究で誘導した粘性境界マトリックスを用いれば、通常用いられている粘性境界マトリックスに比較し、境界でのエネルギー吸収能は格段に向上することが明らかとなった。しかし、側方、底面すべてに粘性境界を用い

た場合には残留変位が生じることもわかった。底面を固定し、側方境界にのみ本研究で誘導した粘性境界を用いたモデルでは、わずかながら前者よりも反射波は大きいものの、残留変位による影響よりもその影響は小さいものであることがわかった。事実、内部減衰を5%もとれば、反射波の影響は全くなくなり、残留変位が生じないということより、実用上は底面固定、側方粘性境界のモデルが最もよいと考えられる。

##### (2) 外部加振問題に関して

自由地盤の同一の地盤構成からなる三次元モデルを用いて基盤入力による応答解析を行った。その結果、解析領域内の応答は、あらゆる点で自由地盤の運動と完全に一致した。これによって、本研究で誘導した境界剛性マトリックス、境界粘性マトリックスの妥当性が示されたとともに、地震波の入力が正しく行われていることが確かめられた。

以上より、本研究で提案した解析手法の妥当性が示されたと思う。今後は、すでに開発済みである三次元ジョイント要素を用いて、構造物と地盤との接触面における剥離や滑動を伴う応答解析、さらには地盤の材料非線形性を導入した解析を試みる予定である。

最後に、本研究を進めるにあたって、京都大学防災研究所 土岐憲三教授、佐藤忠信助教授、清水建設(株) 吉村 隆氏から有益な助言をいただいた。また、数値解析を行うにあたっては、山口大学大学院生 玉野浩司君に手伝っていただいた。各位に感謝の意を表する次第である。なお、本研究の一部は文部省科学研究費、奨励研究(A) (課題番号61750437) の援助を受けたことを付記する。

#### 参 考 文 献

- 1) Lysmer, J. and Waas, G. : Shear waves in plane infinite structure, Proc. of ASCE, Vol. 98, pp. 85~105, 1972.
- 2) Lysmer, J. : Lumped mass method for Rayleigh waves, BSSA, Vol. 60, pp. 89~104, 1970.
- 3) Kausel, E. : Forced vibration of circular foundations on layered media, MIT, 1974.
- 4) Smith, W. : A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems, J. Comp. Phys., 15, pp. 492~503, 1974.
- 5) Cundall, P. A., Kunar, R. R., Carpenter and Marti, J. : Solution of infinite dynamic problems by finite element modelling in the time domain, Proc. 2nd Int. Conf. App. Num. Modelling, Madrid, 1978.
- 6) Suzuki, T. and Hakuno, M. : 3-D dynamic analysis of ground motion by FEM with non-reflecting boundaries, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 2, pp. 185~193, 1985.
- 7) Toki, K. and Sato, T. : Seismic response analysis of

- surface layer with irregular boundaries, Proc. of 6 WCEE, pp.81~86, 1977.
- 8) 上杉真平・大津政康：BEM-FEM 結合法による半無限領域における面内波動問題の解析，土木学会第42回年次学術講演会，pp.606~607，1987.
  - 9) 竹宮宏和・合田和哉：BEM-FEM による地盤と剛体基礎の3次元動的相互作用とその動特性評価，土木学会第42回年次学術講演会，pp.846~847，1987.
  - 10) Tzong, T. and Penzien, J. :Hybrid modeling of a single-layer half-space system in soil-structure interaction, Earthquake Engng. and Struct. Dyn., Vol.14, pp.517~530, 1986.
  - 11) Chen, C. and Penzien, J. :Dynamic modeling of axisymmetric foundations, Earthquake Engng. and Struct. Dyn., Vol.14, pp.823~840, 1986.
  - 12) Mita, A. and Luco, E. :Dynamic Response of embedded foundations :A hybrid approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engng., Vol.63, pp.233~259, 1987.
  - 13) Eilouch, M. N. A. and Sandhu, R. S. :A mixed method for transient analysis of soil-structure interaction under SH-motion, Earthquake Engng. and Struct. Dyn., Vol.14, pp.499~516, 1986.
  - 14) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L. :Finite dynamic model for infinite media, Proc. ASCE, EM 4, pp.859~877, 1969.
  - 15) 土岐憲三：新体系土木工学11，構造物の耐震解析，技報堂出版，pp.172~174，1982.

(1988. 4. 19・受付)

---