

## 半無限多孔質飽和弾性体内部の鉛直点加振力による変位解

## DYNAMIC DISPLACEMENT SOLUTIONS OF A FLUID-SATURATED POROELASTIC HALF-SPACE DUE TO A STEADY-STATE HARMONIC VERTICAL POINT EXCITATION IN THE INTERIOR OF THE MEDIUM

高谷 富也\*・北村 泰寿\*\*

By Tomiya TAKATANI and Yasutoshi KITAMURA

This paper deals with dynamic displacement solutions of a fluid-saturated poroelastic half-space due to a vertical point excitation in the interior of the medium. The solutions are derived by a transfer matrix method using a vector-matrix which is obtained by double Fourier transformation. As numerical examples, this paper shows results of the vertical displacement due to a vertical point excitation with nondimensional frequency changing.

*Keywords*: fluid-saturated poroelastic half-space, harmonic vibration, vertical point excitation, buried source

## 1. ま え が き

臨海地帯の軟弱地盤に設置される杭基礎やマリン・アンカーなどの構造物の動的挙動を把握する場合、通常の弾性体や粘弾性体による地盤モデルでは、地下水を含む地盤を十分に模擬し得るとはいいがたい。このため、これらの構造物と地下水を含む地盤との動的相互作用問題の解析には、地盤を土粒子骨格と間隙水の連成系とする複合体に対する加振解が必要となる。

この分野の理論的研究は Biot<sup>1)</sup> の論文に始まるが、加振問題に注目するとき、みるべき論文はそれほど多くはない。三次元波動理論に基づく先駆的研究として、小堀ら<sup>2),3)</sup> は、地表面に作用する円形等分布加振による鉛直コンプライアンスの定式を示している。また、最近の研究としては、地表面において土粒子骨格、間隙水のそれぞれに作用する鉛直加振力に対するグリーン関数を誘導した Halpern<sup>4)</sup> の論文、地表面の円形基礎の鉛直および水平コンプライアンスを求めた庄ら<sup>5)</sup> の論文などがある。これらは Biot の理論に基づく研究であるが、Kao<sup>6)</sup>、

Saylan<sup>7)</sup> らは、土粒子骨格と間隙水は同一運動をすると仮定して表面加振解を得ている。一方、有限要素法による数値解析法に Biot の理論を取り入れた研究もいくつか報告されている<sup>8),9)</sup>。

以上の理論的研究は、いずれも土粒子骨格と間隙水で構成される複合体の表面加振による表面変位解を対象としているが、本研究は地表面まで完全に液体で飽和した半無限多孔質弾性体内部の鉛直点加振力による変位解を求めたものである。内部加振解の誘導には、著者らが半無限弾性体の内部加振問題の定式に利用した伝達マトリックス法に基づく方法<sup>10),11)</sup> を適用する。すなわち、加振点深さに仮想の境界面を設け、半無限多孔質飽和弾性体と同じ力学定数をもつ二層多孔質飽和弾性体にモデル化し、ベクトル・マトリックス表現した変位・応力の一般解のマトリックス積によって内部加振解を表わす。また、この一般解としては、文献 5) における加振解の定式を踏襲して、三次元直角座標系の基礎式にフーリエ変換を施して得られる解を用いる。

## 2. 基礎式

多孔質飽和弾性体は、空隙を有する弾性骨格と空隙を完全に満たす圧縮性の液体で構成されているものとする(以下、複合体とよぶ)。いま、直角座標系  $(x, y, z)$

\* 正会員 学博 舞鶴工業高等専門学校助手 土木工学科 (〒625 舞鶴市宇白屋 234 番地)

\*\* 正会員 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科 (〒657 神戸市灘区六甲台町 1-1)

において、弾性骨格と液体の相互作用を考慮した複合体の応力-ひずみ関係と運動方程式は次式のように表わされる<sup>1)</sup>。

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e + Q\varepsilon)\delta_{ij} \dots\dots\dots (1)$$

$$\sigma_p = Qe + R\varepsilon \dots\dots\dots (2)$$

$$\rho_{11}\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{12}\ddot{\mathbf{U}} + b(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}) = \mu\nabla^2 \mathbf{u} + \text{grad}[(\lambda + \mu)e + Q\varepsilon] \dots\dots\dots (3)$$

$$\rho_{12}\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{22}\ddot{\mathbf{U}} - b(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}) = \text{grad}[Qe + R\varepsilon] \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) は弾性骨格の応力およびひずみ成分、 $\sigma_p$  は液体の応力、 $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{e}$  は弾性骨格の変位ベクトルと体積ひずみ、 $\mathbf{U}$ ,  $\varepsilon$  は液体の変位ベクトルと体積ひずみ、 $\lambda, \mu$  は複合体のラーメの定数、 $b$  は液体の粘性による減衰係数、 $Q$  は弾性骨格と液体の連成弾性係数、 $R$  は液体の圧縮剛性に関する係数、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーの記号である。また、 $\rho_{11}, \rho_{12}$  は弾性骨格および液体の有効密度、 $\rho_{12}$  は質量連成係数で、複合体の密度を  $\rho$  とするとき、 $\rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}$  であるとする。

次に、Deresiewicz<sup>12)</sup>の論文に倣って、スカラーポテンシャル  $\phi$ ,  $\varphi$  およびベクトルポテンシャル  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ ,  $\mathbf{G} = (G_x, G_y, G_z)$  を導入し、弾性骨格および液体の変位ベクトル  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{U}$  を次式のように表わす。なお、本研究は調和振動を対象としているため、以下の記述表現においては調和振動の時間項は省略する。

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi + \text{curl } \mathbf{H} \dots\dots\dots (5)$$

$$\mathbf{U} = \text{grad } \varphi + \text{curl } \mathbf{G} \dots\dots\dots (6)$$

式 (5), (6) を式 (3), (4) に代入して発散成分と回転成分に分解するとともに、 $x, y$  に関する二重フーリエ変換を導入する。さらに、文献5)の定式を踏襲して、下降波成分のみで表わされる文献5)のポテンシャルの一般解に上昇波成分を加えれば、像空間 ( $\xi, \eta$ ) におけるスカラーポテンシャル  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\varphi}$  およびベクトルポテンシャル  $\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{G}}$  の一般解が次式のように得られる。

$$\hat{\phi} = C_1 \exp(-\beta_1 z) + D_1 \exp(\beta_1 z) + C_2 \exp(-\beta_2 z) + D_2 \exp(\beta_2 z) \dots\dots\dots (7)$$

$$\hat{\varphi} = a_1 C_1 \exp(-\beta_1 z) + a_1 D_1 \exp(\beta_1 z) + a_2 C_2 \exp(-\beta_2 z) + a_2 D_2 \exp(\beta_2 z) \dots\dots\dots (8)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = (\hat{H}_x, \hat{H}_y, \hat{H}_z) = (C_3, C_4, C_5) \exp(\beta_3 z) + (D_3, D_4, D_5) \exp(\beta_3 z) \dots\dots\dots (9)$$

$$\hat{\mathbf{G}} = (\hat{G}_x, \hat{G}_y, \hat{G}_z) = (C_3, C_4, C_5) \gamma \exp(\beta_3 z) + (D_3, D_4, D_5) \gamma \exp(\beta_3 z) \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$\alpha_j = \frac{(\rho_{11} - i\chi)R - (\rho_{12} + i\chi)Q - S/V_j^2}{(\rho_{22} - i\chi)Q - (\rho_{12} + i\chi)R} \quad (j=1, 2)$$

$$\gamma = -\frac{\rho_{12} + i\chi}{\rho_{22} - i\chi}, \quad \chi = \frac{b}{\omega}, \quad S = (\lambda + 2\mu)R - Q^2$$

また、 $\beta_n^2 = \kappa^2 - \delta_n^2$ ,  $\kappa^2 = \xi^2 + \eta^2$ ,  $\delta_n = \omega/V_n$  ( $n=1, 2, 3$ ),  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  は加振円振動数、 $C_1 \sim C_5$  および  $D_1 \sim D_5$  はそれぞれ下降波および上昇波成分に対する未知係数で、記号  $\hat{\phantom{x}}$  はフーリエ変換された像空間 ( $\xi, \eta$ ) での諸量を意味する。さらに、 $V_n$  は Biot の理論における2種類の疎密波およびせん断波の伝播速度で、 $V_n$  については文献5)に与えられている。

ところで、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{H}, \mathbf{G}$  は次式を満足する。

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{G} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

これより、係数  $C_5$  は  $C_3, C_4$  で、また  $D_5$  は  $D_3, D_4$  で表わすことができる。したがって、式 (7)~(10) を式 (5), (6) に代入し、式 (11) によって係数  $C_5, D_5$  を消去すれば、像空間 ( $\xi, \eta$ ) における変位の一般解が得られる。さらに、式 (1), (2) に示す応力-ひずみ関係式を用いれば、像空間における応力の一般解が求まる。この変位・応力の一般解は未知係数  $C_1 \sim C_4$  および  $D_1 \sim D_4$  を含む形で与えられ、一般的にはこれらをベクトル・マトリックス表現して式変形を行うことになる。しかるに、本研究では軸対称問題となる鉛直点加振問題を取り扱うため、 $z$  軸まわりの回転成分が零となることを考慮することによって、変位・応力の一般解に含まれる未知係数をさらに減少させることができる。

以上の変形を施して、軸対称問題における変位・応力の一般解は、ベクトル・マトリックス表現を用いて次のように表わされる。

$$\{V\} = [F][E]\{T\} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、

$$\{V\}^T = \{\hat{\sigma}, \hat{\sigma}\} = \left\{ \frac{\hat{\sigma}_z}{\mu}, \frac{\hat{\tau}_{xz}}{i\xi\mu}, \frac{\hat{\sigma}_p}{\mu}, \frac{\hat{u}_x}{i\xi}, \hat{u}_z, \hat{U}_z \right\}$$

$$\{T\}^T = \{C_1, D_1, C_2, D_2, C_3, D_3\}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} L_1 & L_1 & L_2 & \vdots & L_2 & -2x^2\beta_3 & 2x^2\beta_3 \\ -2\beta_1 & 2\beta_1 & -2\beta_2 & & 2\beta_2 & x^2 + \beta_3^2 & x^2 + \beta_3^2 \\ -B_1 & -B_1 & -B_2 & & -B_2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & & -1 & -\beta_3 & \beta_3 \\ -\beta_1 & \beta_1 & -\beta_2 & & \beta_2 & x^2 & x^2 \\ -\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_1 & -\alpha_2\beta_2 & & \alpha_2\beta_2 & \gamma x^2 & \gamma x^2 \end{bmatrix}$$

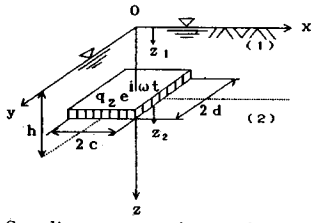


Fig.1 Coordinate system for two-layered media.

[E]=

$$\begin{bmatrix} \exp(-\beta_1 z) & & & & & & \\ & \exp(\beta_1 z) & & & & & \\ & & \exp(-\beta_2 z) & & & & 0 \\ & & & & & & \\ & & 0 & & \exp(\beta_2 z) & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \exp(-\beta_3 z) \\ & & & & & & \exp(\beta_3 z) \end{bmatrix}$$

$L_1=2\beta_1^2-B_3, L_2=2\beta_2^2-B_4$

$B_j=(Q+\alpha_j R)\delta_j^2/\mu (j=1, 2)$

$B_j=(\lambda+\alpha_k Q)\delta_k^2/\mu (j=3, 4, k=j-2)$

なお、式(11)では、定式化に現われない変位・応力成分は除いた。

### 3. 半無限多孔質飽和弾性体の内部加振問題

Fig.1に示すように、z=hの加振位置に仮定の境界面を設け、同じ力学定数をもつ二層の多孔質飽和弾性体に分ける。いま、鉛直点加振力を考えるのに先立ち、矩形載荷面(2c×2d)に鉛直等分布加振力q<sub>z</sub>が作用するものとする。

一般に、鉛直方向の分布加振力が作用する場合、その加振力を弾性骨格と液体が分担して受け持つが、あらかじめ分担率を設定することは難しい。たとえば、小堀ら<sup>3)</sup>は、地表面全域で液体の流出を拘束する条件のもとで分担率を調べている。また、Halpernら<sup>4)</sup>の論文では、解析過程において骨格と液体の変位を同変位として分担率を求めている。その他、便宜的に複合体の間隙率を分担率とする考えもみられるが、分担率は与えるものではなく、載荷面内では液体に流出を拘束し、面外では流出を自由とする境界条件などから決定すべきものであろう。

これに対して、鉛直点加振力の場合には、弾性骨格か液体のいずれか一方が全加振力を受け持ち、分担率の問題は生じない。なお、Halpernら<sup>4)</sup>は、グリーン関数の一部として液体が鉛直加振力を受け持つ場合の変位解を求めているが、完全な点加振解ではない。本研究では骨格部分に作用する鉛直点加振力に対する解を求めることが目的であるため、上述の鉛直等分布加振力はすべて弾性骨格で受け持たれるものと仮定する。このとき、仮想境界面での境界条件は、弾性骨格の垂直応力σ<sub>z</sub>が不連続で、他の変位・応力成分は連続としてとらえられる。

Fig.1の等分布荷重を二重フーリエ変換すれば、像空間(ξ, η)における応力σ<sub>z</sub>の境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}_z)_{z_2=0} - (\hat{\sigma}_z)_{z_1=h} \\ = -\frac{Q_z}{2\pi} \frac{\sin(\xi c)}{\xi c} \frac{\sin(\eta d)}{\eta d} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここに、Q<sub>z</sub>は合力であり、Q<sub>z</sub>=4cdq<sub>z</sub>である。また、z<sub>1</sub>、z<sub>2</sub>はFig.1の第一層および第二層の局所座標を表わす。次に、c→0、d→0の極限をとるとき、式(13)は直ちに点加振力に対する境界条件に書き換えられる。なお、以下の記述において、式(12)およびこれに関する諸量に下付き添字1、2を付すが、添字1は第一層、添字2は第二層の諸量を意味する。

$$\begin{aligned} \{\hat{\sigma}_z\}_{z_2=0} - \{\hat{\sigma}_z\}_{z_1=h} \\ = \left[ -\frac{Q_z}{2\pi}, 0, 0 \right]^T \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

いま、第一層の上端(表面)と第一層の下端(仮想境界面)の関係式、および半無限層となる第二層の上端(仮想境界面)と未知係数との関係式はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \{V_1\}_{z_1=h} = [F_1][E_1]_{z_1=h}\{T_1\} \\ = [F_1][E_1]_{z_1=h}[F_1]^{-1}\{V_1\}_{z_1=0} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\{T_2\} = [F_2]^{-1}\{V_2\}_{z_2=0} \dots\dots\dots (16)$$

また、第一層の上端および第一層と第二層の接触面における境界条件は次式で表わされる。

$$\{\hat{v}_1\}_{z_1=0} = \{0\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\{V_2\}_{z_2=0} - \{V_1\}_{z_1=h} = \{\hat{q}, 0\}^T \dots\dots\dots (18)$$

ここに、{q}は式(14)の右辺で与えられる。式(15)~(18)より、第一層および第二層内の変位・応力が、次式のように得られる。

$$\{V_1\} = [F_1][E_1]_{z_1=z}[F_1]^{-1}\{0, \hat{v}_1\}_{z_1=0} \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} \{V_2\} = [F_2][E_2]_{z_2=z}[K]\{0, \hat{v}_1\}_{z_1=0} \\ + [F_2][E_2]_{z_2=z}[L]\{\hat{q}, 0\}^T \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ただし、

$$[K] = [F_2]^{-1}[F_1][E_1]_{z_1=h}[F_1]^{-1}$$

$$[L] = [F_2]^{-1}$$

次に、半無限層となる第二層では、上昇波成分が存在しないことより、{D<sub>1</sub>, D<sub>2</sub>, D<sub>3</sub>}<sub>z=0</sub> = {0}となることを考慮すれば、式(20)より表面の未知変位ベクトルは次式のように得られる。

$$\{V_1\}_{z_1=0} = -[K_{22}]^{-1}[L_{21}]\{\hat{q}\} \dots\dots\dots (21)$$

ここに、K<sub>ij</sub>、L<sub>ij</sub>はマトリックス[K]、[L]のサブマトリックス(3×3)である。さらに、式(21)を式(19)、(20)に代入すれば、各層内における変位・応力解が次式のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_1 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} J_{12} \\ J_{22} \end{bmatrix} [K_{22}]^{-1}[L_{21}]\{\hat{q}\}$$

$$(0 \leq z \leq h) \dots\dots\dots(22)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\nu}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_{12} \\ G_{22} \end{Bmatrix} \{\hat{q}\} - \begin{Bmatrix} H_{12} \\ H_{22} \end{Bmatrix} [K_{22}]^{-1} [L_{21}] \{\hat{q}\} \\ (h \leq z) \dots\dots\dots(23)$$

ここに、上式中の  $G_{ij}$ ,  $H_{ij}$  および  $J_{ij}$  は、それぞれ次式に示すマトリックス  $[G]$ ,  $[H]$  および  $[J]$  のサブ・マトリックス (3×3) である。

$$[G] = [F_2][E_2]_{z2=z}[L] \\ [H] = [F_2][E_2]_{z2=z}[K] \\ [J] = [F_1][E_1]_{z1=h}[F_1]^{-1}$$

以上より、式 (22), (23) に二重フーリエ逆変換を施せば、実空間での変位・応力解が得られる。しかし、変位・応力解を直角座標系 ( $x, y, z$ ) においてマトリックス積で残すことは、数値計算上好ましいものではなく、形式的なものといえよう。本研究では、マトリックス積の分解と直角座標系から円筒座標系 ( $r, \theta, z$ ) への変換を施したものを最終式として与える。まず、式 (22), (23) のマトリックス積を分解した後の変位解に二重フーリエ逆変換を施す。一例として示すと、直角座標系における弾性骨格の鉛直変位  $u_z$  および液体の鉛直変位  $U_z$  が次式のように得られる。なお、マトリックス積の分解は代数式の単純な変形操作であるため、紙面の都合上その詳細は省略する。

$$u_z = -\frac{Q_z}{8\pi^2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x)}{\beta_3\Theta F(x)} \cdot \exp(i(\xi x + \eta y)) d\xi d\eta \dots\dots\dots(24)$$

$$U_z = -\frac{Q_z}{8\pi^2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(x)}{\beta_3\Theta F(x)} \cdot \exp(i(\xi x + \eta y)) d\xi d\eta \dots\dots\dots(25)$$

ただし、

$$U(x) = \beta_1\beta_3B_2 \{4x^2(\beta_1\beta_3B_2\Phi_1^- - 2\beta_2\beta_3B_1\Psi_{12} + \beta_2\beta_3B_1\Phi_1^+ - \Omega\Psi_{13}) + (\beta_3^2 + x^2)\Omega\Phi_1^+\} \\ - \beta_2\beta_3B_1 \{4x^2(2\beta_1\beta_3B_2\Psi_{21} - \beta_1\beta_3B_2\Phi_2^+ - \beta_2\beta_3B_1\Phi_2^- - \Omega\Psi_{23}) + (\beta_3^2 + x^2)\Omega\Phi_2^+\} \\ - x^2(B_2 - B_1) \{4\beta_3(\beta_3^2 + x^2)(\beta_1B_2\Psi_{31} - \beta_2B_1\Psi_{32}) - (\beta_3^2 + x^2)\Omega\Phi_3^- - 4x^2\beta_3(\beta_1B_2 - \beta_2B_1)\Phi_3^+\} \\ \dots\dots\dots(26)$$

$$W(x) = \beta_1\beta_3B_2 \{4x^2(\alpha_1\beta_1\beta_3B_2\Phi_1^- - 2\alpha_2\beta_2\beta_3B_1\Psi_{12} + \alpha_1\beta_2\beta_3B_1\Phi_1^+ - \gamma\Omega\Psi_{13}) + \alpha_1(\beta_3^2 + x^2)\Omega\Phi_1^+\} \\ - \beta_2\beta_3B_1 \{4x^2(2\alpha_1\beta_1\beta_3B_2\Psi_{21} - \alpha_2\beta_1\beta_3B_2\Phi_2^+ - \alpha_2\beta_2\beta_3B_1\Phi_2^- - \gamma\Omega\Psi_{23}) + \alpha_2(\beta_3^2 + x^2)\Omega\Phi_2^+\} \\ - x^2(B_2 - B_1) \{4\beta_3(\beta_3^2 + x^2) \cdot (\alpha_1\beta_1B_2\Psi_{31} - \alpha_2\beta_2B_1\Psi_{32}) - \gamma(\beta_3^2 + x^2)\Omega\Phi_3^- \\ - 4x^2\gamma\beta_3(\beta_1B_2 - \beta_2B_1)\Phi_3^+\} \dots\dots\dots(27)$$

$$\Theta = (2x^2 - L_2)B_1 - (2x^2 - L_1)B_2 \\ \Phi_1^\pm = \exp(-(z+h)\beta_k) + \exp(\pm(z-h)\beta_k) \\ \Phi_2^\pm = \exp(-(z+h)\beta_k) - \exp(\pm(z-h)\beta_k)$$

$$\Psi_{ij} = \exp(-h\beta_i) \cdot \exp(-z\beta_j) \quad (i, j, k=1, 2, 3) \\ \Omega = L_1B_2 - L_2B_1 \\ F(x) = (\beta_3^2 + x^2)(B_2 - B_1) \\ - 4x^2\beta_3(\beta_1B_2 - \beta_2B_1) \quad (\text{Rayleigh 関数})$$

また、上式中の複号 (±, ∓) はそれぞれ載荷面より上の部分および下の部分に対応していることを表わす。

最終的に、直角座標系における変位式 (24), (25) を文献 11), 13) に示す変換法によって円筒座標系に変換すれば、変位解  $u_z, U_z$  は次式のように得られる。

$$u_z = -\frac{Q_z}{4\pi\mu} \int_0^\infty \frac{xU(x)}{\beta_3\Theta F(x)} J_0(xr) dx \dots\dots\dots(28)$$

$$U_z = -\frac{Q_z}{4\pi\mu} \int_0^\infty \frac{xW(x)}{\beta_3\Theta F(x)} J_0(xr) dx \dots\dots\dots(29)$$

ここに、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  であり、 $J_0(\quad), J_1(\quad)$  は第 0 次、第 1 次の Bessel 関数である。

#### 4. 数値計算結果とその考察

本研究では、文献 5) と同様に、Halpern<sup>4)</sup> の論文で用いられている諸弾性定数、密度等の数値を流用する。

$$\mu = 98 \text{ MPa}, \lambda = 432 \text{ MPa}, Q = 280 \text{ MPa} \\ R = 274 \text{ MPa}, \nu = 0.3 \text{ (ポアソン比)} \\ f = 0.48 \text{ (複合体の間隙率)} \\ \rho_s = 2.67 \text{ g/cm}^3 \text{ (弾性骨格の密度)} \\ \rho_f = 1.0 \text{ g/cm}^3 \text{ (液体の密度)}$$

上記の  $\rho_s, \rho_f$  は素材としての密度であり、有効密度  $\rho_{11}, \rho_{22}$  および質量連成係数  $\rho_{12}$  との関係は次式で表わされる<sup>2)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} + \rho_{12} &= (1-f)\rho_s \\ \rho_{12} + \rho_{22} &= f\rho_f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

また、 $\rho_{12}$  は仮定の密度で、負の値をとる。ここでは、文献 5) にならって、 $\rho_{12} = -(0.0 \sim 0.15)\rho$  の範囲の値に仮定する。

次に、液体の粘性による減衰係数  $b$  は、ダルシー則より次式のような形で与えられる<sup>2), 4)</sup>。

$$b = \frac{f^2\rho_f g}{k} \dots\dots\dots(31)$$

ここに、 $k$  は透水係数、 $g$  は重力の加速度である。また、文献 5) にならって、式 (31) を次式に示すような無次元化量に書き換える。

$$\frac{\chi}{\rho_s} = \frac{b}{\omega\rho_s} = f^2 \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{1}{aK_0} \dots\dots\dots(32)$$

ここに、 $a = \omega r / V_s, K_0 = kV_s / gr$  (無次元透水係数) である。なお、 $V_s$  は素材における S 波の伝播速度 (複合体では  $V_3$  に相当) である。小堀らは、文献 2) において、 $K_0 = 5.102 \times 10^0 \sim 10^{-4}$  ( $k = 100 \sim 0.01 \text{ cm/s}$  に相当) なる範囲の値を設定している。本研究では、 $K_0$  として  $K_0 = 10 \sim 10^{-4}$  なる範囲の値を用いる。なお、 $K_0$  の値を

大きくとることは液体の粘性による減衰を無視した場合に近づくことになる。

本研究では、数値計算例として、半無限多孔質飽和弾性体の深さ  $H$  に作用する鉛直点加振力  $Q_z$  による弾性骨格の鉛直変位  $u_z$  および液体の鉛直変位  $U_z$  を求める。なお、受振点の水平距離は加振点深さと等距離 ( $r/H=1$ ) に固定する。また、変位の計算結果は、式 (28), (29) を無次元化するとともに、次式のような形に整理し、無次元係数項  $s_1, s_2$  および  $S_1, S_2$  を用いて図示する。

$$u_z = \frac{Q_z}{2\pi\mu r} (s_1 + is_2)$$

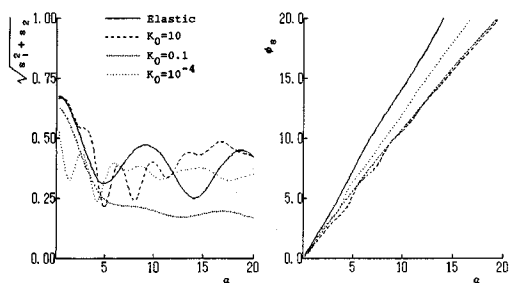
$$= \frac{Q_z}{2\pi\mu r} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} e^{i\phi_s} \dots \dots \dots (33)$$

$$U_z = \frac{Q_z}{2\pi\mu r} (S_1 + iS_2)$$

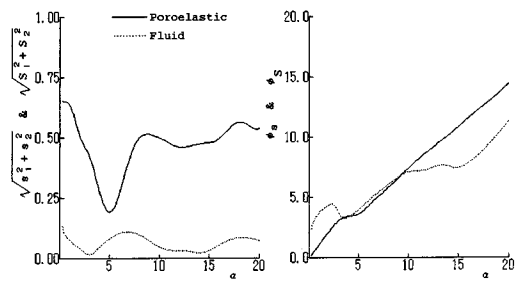
$$= \frac{Q_z}{2\pi\mu r} \sqrt{S_1^2 + S_2^2} e^{i\phi_s} \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 $\phi_s = \tan^{-1}(s_2/s_1)$ ,  $\phi_s = \tan^{-1}(S_2/S_1)$  である。

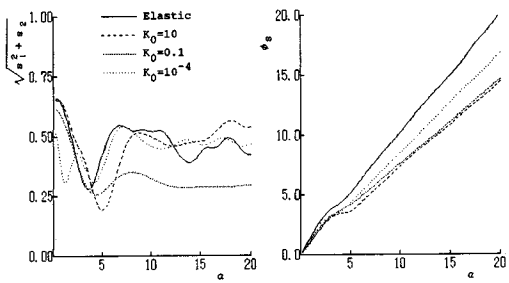
Fig.2 は、質量連成係数を  $\rho_2=0$  として、液体の粘性による減衰（すなわち、無次元透水係数  $K_0$ ）が骨格の変位に及ぼす影響を調べたものである。同図には、ポアソン比  $\nu=0.3$  の通常の弾性体における変位も併せて図示してある。なお、横軸  $a$  は、以下の図も含めて、無次元振動数 ( $\omega r/V_s$ ) である。同図より、通常の弾性体の場合と同様に、 $z/H=0$  (表面) では表面効果によって変位振幅は当然大きくなっている。また、内部点の  $z/H=1$  (加振点深さ) および  $z/H=2$  では、加振点からの直接波と表面からの反射波が重畳するため、その変位挙動は単純なものとはならない。一方、複合体と通常の弾性体の変位については、無次元透水係数  $K_0$  の値に



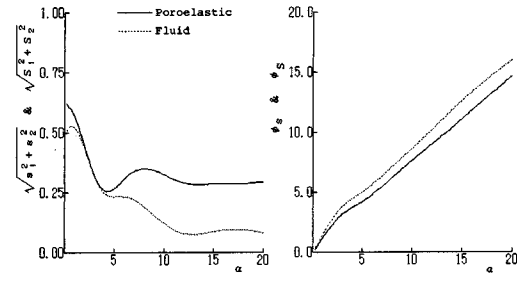
(a)  $z/H=0$



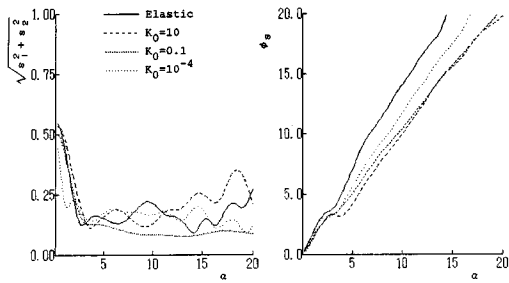
(a)  $K_0=10$



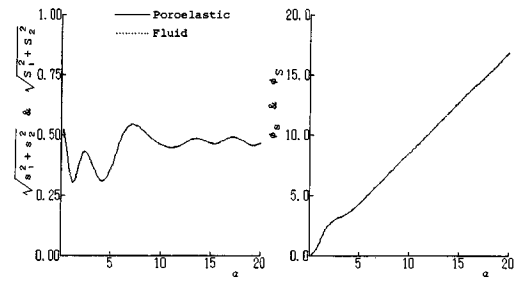
(b)  $z/H=1$



(b)  $K_0=0.1$



(c)  $z/H=2$



(c)  $K_0=10^{-4}$

Fig.2 Effect  $K_0$  to displacement  $u_z$  ( $r/H=1, \rho_2=0$ ).

Fig.3 Comparison between  $u_z$  and  $U_z$  ( $r/H=1, z/H=1, \rho_2=0$ ).

よって傾向は多少異なるが、無次元加振振動数  $a$  が大きくなれば、間隙水の影響が顕著に現われている。

無次元透水係数  $K_0$  の影響については、いずれの深さにおいても  $K_0=0.1$  の変位振幅が他の  $K_0$  の振幅よりも小さくなる傾向を示している。一方、偏角については、無次元振動数  $a$  が大きくなるとともに、 $K_0=10^{-4}$  の偏角が他の偏角と大きな差異を示す傾向となっている。ところで、 $K_0$  が小さくなることは、液体の粘性による減衰が大きくなることを意味している。位相特性については十分な物理的説明を与えることはできないが、振幅特性については次に示す結果より  $K_0$  との関係が理解できる。

Fig. 3 は、受振点深さが  $z/H=1$  の場合について前図と同じ条件で骨格の変位と液体の変位を比較したものである。同図より、 $K_0$  が小さくなるとともに液体の変位は骨格の変位に近づき、 $K_0=10^{-4}$  の場合には骨格と液

体の変位は、振幅、偏角とも一致している。すなわち、 $K_0$  が小さくなることによって、骨格と液体の相対運動は小さくなり、式 (3), (4) の運動方程式における減衰項  $b(\dot{u}-\dot{U})$  が 0 とみなし得ようになる。これより、減衰が大きくなる ( $K_0=10$  から 0.1 になる) ことによって変位振幅は減少するが、さらに減衰が大きくなる ( $K_0=10^{-4}$ ) ことによって見掛けの非減衰状態に移行し、再び振幅が大きくなるものと考えられる。

次に、質量連成係数  $\rho_{12}$  以外の条件は前図と同じ条件として、 $\rho_{12}$  が骨格の変位に及ぼす影響を調べたものが Fig. 4 である。同図より、減衰が大きくなれば ( $K_0=10^{-4}$  のとき)、 $\rho_{12}$  の影響は全くみられない。これは、前図で述べたように、減衰が大きくなることによって骨格と液体が同一運動をするようになり、質量連成項は相対的に寄与しなくなるものと考えられる。文献 3), 4) では、表面加振解の数値計算にあたって、 $\rho_{12}$  に関する実用的なデータが得られていないことから  $\rho_{12}=0$  としているが、減衰が大きくなるとともに許容できる仮定といえよう。

さらに、振幅特性、位相特性に対する特徴を解明するには、直接波成分と反射波成分の分離など詳細な波動論的考察も必要であるため、これらについては今後の課題としたい。

### 5. あとがき

本研究は、半無限多孔質飽和弾性体内部の鉛直点加振による変位・応力解を誘導する定式化を伝達マトリックス法を用いて示した。内部加振解の定式に関して、全無限媒体に対する素解の鏡像解と変位ポテンシャルの重ね合わせによる方法と伝達マトリックス法による方法が挙げられる。前者による場合、素解の誘導と鏡像解によって生じる地表面応力に対する変位ポテンシャルの誘導は容易ではない。一方、後者の場合、マトリックス積の分解は相当煩雑ではあるが、解の誘導は直感的で、システムティックであるといえよう。

数値計算例として、液体の粘性による減衰係数、弾性骨格と液体の質量連成係数などが骨格および液体の鉛直変位に及ぼす影響について調べた。その結果、減衰が大きくなるとともに、骨格と液体の相対変位が小さくなり、見掛けの非減衰状態の挙動を呈するようになる。また、質量連成項の影響もこの減衰に依存していることなどがわかった。今後、これらの成果をふまえて、本研究で得られた加振解を構造物と地下水を含む地盤の動的相互作用問題の解析へ適用していきたいと考えている。

最後に、本研究の基礎式の誘導にあたって、第二著者の指導学生であった庄 健介君 (現・阪急電鉄勤務) の修士論文<sup>14)</sup>を参考にしたことを付記し、同君に感謝の意

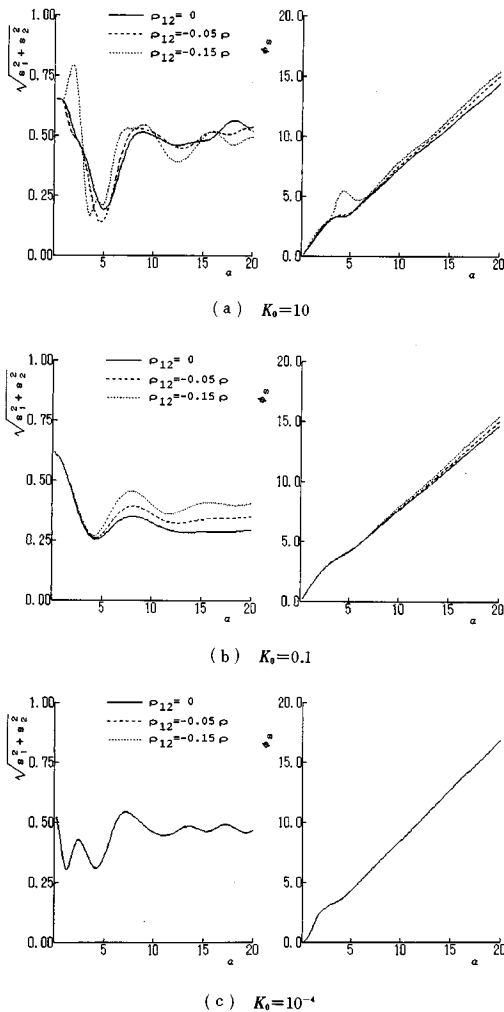


Fig. 4 Effect  $\rho_{12}$  to displacement  $u_z$  ( $\tau/H=1, z/H=1$ ).

を表わしたい。

#### 参 考 文 献

- 1) Biot, M. A. : Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 2, pp.168~178, 1956.
- 2) 小堀鐸二・立川 剛：飽和砂質地盤への複合体理論の定式化について，日本建築学会論文報告集，第220号，pp.47~53, 1974.
- 3) 小堀鐸二・立川 剛：飽和砂質地盤の動力学特性について(1)，日本建築学会論文報告集，第244号，pp.13~20, 1976.
- 4) Halpern, M.R. and Christiano, P : Responce of Poroelastic Half-Space to Steady-State Harmonic Surface Traction, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.10, pp.609~632, 1986.
- 5) 庄 健介・北村泰寿：半無限多孔質飽和弾性体上の円形基礎の動的コンプライアンス，*構造工学論文集*，Vol.34 A, pp.855~864, 1988.
- 6) Kao, S., Toridis, T.G. and Khozeimeh, K.: Seismic Analysis of Structures with Rectangular Bases on Porous Elastic Soil Medium, *Proceedings of the 7 th World Conference on Earthquake Engineering*, Istanbul, Vol.5, pp.205~212, 1980.
- 7) Saylan, S., Toridis, T.G. and Khozeimeh, K.: Seismic Analysis of Three-Dimensional Soil-Structure Interaction System on a Rectangular Base, *Computer & Structure*, Vol.20, No.1-3, pp.355~363, 1985.
- 8) Zienkiewicz, O. C. and Shiomi, T.: Dynamic Behaviour of Saturated Porous Media, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.8, pp.71~96, 1984.
- 9) Prevost, J.M.: Wave Propagation in Fluid-Saturated Porous Media—An Efficient Finite Element Procedure, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.4, pp.183~202, 1985.
- 10) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部の調和型点加振力による変位の解析，*建設工学研究所報告*，第24号，pp.33~54, 1982.
- 11) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限多層弾性体の内部加振問題への伝達マトリックス法の応用，*土木学会論文集*，第362号，pp.363~369, 1985.
- 12) Deresiewicz, H.: The Effect of Boundaries on Wave Propagation in a Liquid-Filled Porous Solid : I. Reflection of Plane Waves at a Free Plane Boundary (Non-Dissipative Case), *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol.50, No.4, pp.599~607, 1960.
- 13) 野邑雄吉：技術者のための特殊関数とその応用，*日刊工業新聞社*，pp.308~309, 1962.
- 14) 庄 健介：多孔質飽和弾性地盤上の円形基礎の動的コンプライアンス，*神戸大学大学院工学研究科修士論文*，1988.

(1988. 8. 1・受付)