

# 変位・流速・圧力を基本変数とする有限要素法による 多次元圧密解析法

## A FINITE ELEMENT PRIMITIVE VARIABLES APPROACH FOR MULTI-DIMENSIONAL CONSOLIDATION PROBLEM

吉田 裕\*・依知川哲治\*\*・佐々木 隆\*\*\*

By Yutaka YOSHIDA, Tetsuji ICHIKAWA and Takashi SASAKI

A finite element solution procedure using displacements, the Darcy velocities and pore pressures as essential variables is proposed for the consolidation problems based on Biot's theory. Spatial discretization of the equilibrium equations, the Darcy's law and the continuity equation, respectively, leads to a set of three matrix equations. In this approach, the pore pressure can be assumed to be constant within each triangular element. The displacements and the Darcy velocities are assumed to be linear. Application of a simple time integration scheme to the matrix equations leads to the numerical method presented here. Special features of the method are that the pore pressure variables are to disappear on the boundary of objective domain and that the velocity fields at any specified time can be determined explicitly. Some examples are finally illustrated in order to assess the reliability of the approach.

*Keywords: multi-dimensional consolidation, coupled problem, finite element formulation*

### 1. ま え が き

圧密現象を対象とした理論において Biot の理論<sup>1),2)</sup>は「圧密進行中、間隙水の流れは Darcy 則に従い、空間的な全応力のつり合いと連続条件とを同時に満足しなければならない」ことを表わしており、土骨格の変位、間隙水の流速、間隙水圧の連成する偏微分方程式系となっている。電子計算機の発達に伴い Biot の理論は圧密現象解析の中核に位置するようになり、Sandhu・Wilson による初めての有限要素法の適用<sup>3)</sup>以来、めざましい数値解析手法の進展がみられた<sup>4)~12)</sup>。

有限要素法による圧密現象の解析には大きく分けて 2 つの手法があると考えることができる。1 つは Christian・Boehmer による解析法<sup>4)</sup>に代表されるものである。これは、体積ひずみ量が既知である場合の変位、間隙水圧分布を静的構造解析的に解く方法から時間の概念を含む圧密解析法に発展させたものであり、非排水条件下における変形状態の解析から出発して、ある時点での間隙水圧分布から評価した微小時間における体積変化量

を拘束値として力のつり合い式、連続条件式を解いて次段階の変位、間隙水圧分布を求めていくという方法である。この場合、もともとの非排水変形の解法においては流れに関する境界条件を必要とせず、また間隙水圧の空間に関する微分が必要でないため、間隙水圧は要素内一定として定式化している。しかし、圧密解法に発展させた場合には、体積変化量を求める際に間隙水圧の空間に関する 2 階微分を評価する必要がある。そのために、要素重心位置の間隙水圧値とその要素を取り囲む複数の要素重心位置の間隙水圧値を用いて 2 階微分項の値を評価している。また、圧密解析では流れに関する境界条件を考慮することが必要となり、これを表現するために境界近傍に架空の要素を導入する、などの工夫が必要となる。

もう 1 つは、Sandhu・Wilson による解析法<sup>3)</sup>に代表される手法である。これは Darcy 則を用いて流速を消去した形の、時間の概念を含んだいわゆる圧密の連続条件式と力のつり合い式とを対象として空間の離散化を行い、得られた有限要素方程式を時間方向に積分する方法であり、この方法が圧密数値解析法の主流を占めている。たまたみ込み積分を用いた変分汎関数<sup>5)~7)</sup>、重き付き残差法<sup>8),9)</sup>といった定式化の基礎の違いや Fourier 変換の援用<sup>11)</sup>等、解法の違いがあるが、ほとんどすべてが同様な形式の有限要素方程式を得ている。土の構成則に関する

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科 (〒152 目黒区大岡山 2-12-1)

\*\* 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科 (同上)

\*\*\* 東京工業大学大学院修士課程学生 (同上)

研究成果との組合せ，など応用研究を含め圧密問題の解析に関する研究は数多いが，もとにしての手法は Christian・Boehmer 型の解法<sup>12)</sup>または Sandhu・Wilson 型の手法<sup>6)-10)</sup>である場合が一般的である。

現在では，圧密解析に関する研究の大勢は，非線形解析に舞台を移した感がある。しかし，自由排水面近傍における間隙水圧の評価に問題がある<sup>13)</sup>，という指摘がなされその対処法が考慮されている<sup>14)</sup>など，信頼性の高い効率的な非線形解析法を確立するためには，解決しなければならない基礎的研究課題も多く残されている。

本論文は，基礎方程式の段階で Darcy 則を用いて流速を消去することはせずに，力のつり合い式，Darcy 則，連続条件式のそれぞれを有限要素法によって離散化し，得られる 3 つの有限要素方程式を連立させて時間方向に積分する解法を提案するものである。この解法においては，Darcy 則を直接離散化するために，間隙水圧を要素内に導入する変数として扱うことができる。間隙水圧は本来，外力に対して土の内部に生ずるものであり，その物理的意味を考えると，節点外力に対して要素内の変数として導入した方が自然である。また，間隙水圧が境界上の変数として現われないために，境界条件として水圧値が陽に規定されることはなく，自由排水面近傍における間隙水圧の評価に対して特別な対処をする必要はない。さらに本解析法においては変位，間隙水圧に加えて流速を基本変数としているために，流速の場を直接的に求めることができる。

以下に，Sandhu・Wilson 型の支配方程式と比較して，本法における支配方程式の取り扱い方を示し，空間領域，時間領域の離散化を通して構成される積分漸化式の具体的な内容を説明する。さらに，いくつかの解析例によって，本解析法の妥当性，適用性を明らかにする。

## 2. 基礎とする方程式系

圧密現象の数値解法を展開するにあたって，基礎とする方程式系を明確にしておく必要がある。前述したように，本研究で対象とするものは Biot の理論であるが，同じ理論に基づく一般的な解法とは方程式の扱い方に違いがある。これによって，新たな手立ての可能性が開かれると判断するものであり，本研究の主張の要となるものである。ここに Biot の方程式系の概要をまとめ，Sandhu・Wilson 型の扱い方と対比して，本研究で対象とする基礎方程式系を示す。

### (1) Biot の方程式系

微小変形を仮定する場合，ひずみ-変位関係式は次のようになる。

$$\epsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) \dots \dots \dots (1)$$

有効応力の原理は，全応力  $\sigma_{ij}$ ，有効応力  $\sigma'_{ij}$ ，間隙水

圧  $p$  を用いて

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij} \dots \dots \dots (2)$$

と表わされる。ここに， $\delta_{ij}$  は Kronecker delta であり  $\sigma_{ij}$ ， $\sigma'_{ij}$  は引張りを正とし， $p$  は圧縮を正としている。

全応力表示の力のつり合い式は，次のように表わされる。

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \dots \dots \dots (3)$$

ここに， $\rho b_i$  は単位体積当たりの土にかかる物体力である。

土は非圧縮性の土粒子から成り，非圧縮性の間隙水により飽和されていると考えると，圧密中の間隙水の流出量と土粒子構造骨格の体積圧縮量が等しいので，圧密の連続条件式は次式で表わされる。

$$\dot{\epsilon}_{ii} = -q_{i,i} \dots \dots \dots (4)$$

ここに， $q_i$  は間隙水の流速を表わす。

骨格の変形は有効応力によるものとした場合の線形弾性体の応力-ひずみ関係式は次のようである。

$$\sigma'_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl} \dots \dots \dots (5)$$

ここに， $D_{ijkl}$  は弾性係数テンソルを表わす。

間隙水の流れが Darcy 則に支配されると考えたとき，

$$q_i = -k_{ij}(p_{,j} - \rho_w b_{j,i}) \dots \dots \dots (6)$$

あるいは，

$$C_{ij}q_j + p_{,i} - \rho_w b_i = 0 \dots \dots \dots (7)$$

と表わすことができる。 $k_{ij}$  は透水係数， $\rho_w b_i$  は水にかかる物体力， $C_{ij}$  は透水による抵抗を示す係数である。

### (2) Sandhu・Wilson 型の離散化の対象とされる方程式

Biot の理論に基づいて解法を展開する場合に，一般的に扱われる方程式は，式 (1)，(2)，(5) を用いて式 (3) の力のつり合い式を書き改めた次式

$$[1/2 D_{ijkl}(u_{k,i} + u_{i,k})]_{j,j} - p_{,i} + \rho b_i = 0 \dots \dots \dots (8)$$

と，Darcy 則 (式 (6)) を用いて式 (4) より流速を消去した次式

$$[k_{ij}(p_{,j} - \rho_w b_{j,i})]_{i,i} + \dot{u}_{i,i} = 0 \dots \dots \dots (9)$$

の 2 つの方程式である。

式 (8) および (9) に対する境界条件は次のようである。

(i) 変位の境界

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } \Gamma_{u_i} \dots \dots \dots (10)$$

(ii) 力の境界

$$t_i = \bar{t}_i \text{ on } \Gamma_{t_i} \dots \dots \dots (11)$$

ここに，

$$t_i = \sigma_{ji}n_j = (\sigma'_{ji} - p\delta_{ji})n_j \dots \dots \dots (12)$$

であり， $n_j$  は境界面の外向き法線の方向余弦である。

(iii) 間隙水圧の境界

$$p = \bar{p} \text{ on } \Gamma_p \dots \dots \dots (13)$$

(iv) 流量の境界

$$Q = \bar{Q} \text{ on } \Gamma_q \dots\dots\dots(14)$$

ここに、

$$Q = q_i n_i \dots\dots\dots(15)$$

である。

(3) 本解析法で離散化の対象とする方程式

本研究で対象とする方程式系は、力のつり合い式(式(8)),

$$[1/2 D_{ijkl}(u_{k,i} + u_{i,k})]_{,j} - p_{,i} + \rho b_i = 0 \dots\dots\dots(8')$$

Darcy 則(式(7)),

$$C_{ij} q_j + p_{,i} - \rho_w b_i = 0 \dots\dots\dots(7')$$

および、連続条件式、

$$\dot{u}_{i,i} + q_{i,i} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

の3つの方程式である。すなわち、力のつり合い式(8), Darcy 則(7), 連続条件式(16)を独立に対象として、この3つの式を  $u|_{t=0} = u_0, p|_{t=0} = p_0, q|_{t=0} = q_0$  の初期条件のもとで解くことになる。また、境界条件については次のことが成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_i \cup \Gamma_u = \Gamma \\ \Gamma_i \cap \Gamma_u = \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_p \cup \Gamma_q = \Gamma \\ \Gamma_p \cap \Gamma_q = \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $\Gamma$  は全境界を示す。

3. 有限要素方程式の構成

式(8)および式(9)に基づいて有限要素法による解法を展開する場合には、式(9)における間隙水圧が空間に関する2階微分であるために、要素内の間隙水圧の補間に対しては通常1次以上の補間関数を用いることが必要となる。また、変位に関しては、間隙水圧と応力の次数が同じであるべきことから2次以上の補間関数を用いることが一般的である。高次の要素を用いた場合、計算量が増え非線形解析には不利となるために、通常はなるべく低次の要素が用いられている。たとえば、変位6節点-間隙水圧3節点の三角形要素<sup>3)</sup>、あるいは変位

8節点-間隙水圧4節点の四角形要素<sup>13)</sup>、などが用いられ、変位と間隙水圧を同次数で補間した場合には満足はいく解が得にくいということが報告されたりした<sup>13)</sup>。

間隙水圧を線形補間する場合、節点変数として間隙水圧が扱われることとなり、境界  $\Gamma_p$  上において強制されることになる。Yokoo ら<sup>5)</sup>は、要素間での間隙水圧の不連続性をゆるす定式化を行って、これが規定されることを避けているが、一般的な定式化の場合は載荷直後の排水面近傍の値が大きく振動したりする。その後、積分時間の経過とともに解の不自然さが薄れていくために、少数の研究を除いては、特別な措置はとられていない。

一方、式(8)、式(7)、式(16)の3式を直接離散化する、ここに提案する解法の場合には、式(7)の間隙水圧が1階微分であるために、これを要素内一定として補間し、間隙水圧を要素内の変数として導入することが可能となり、境界面における間隙水圧の拘束の必要がなくなる。

間隙水の流れを主題として構成される圧密理論に基づく解析ではあるが、地盤の変形量の時間変化の予測が目的となるために、流速の評価にはまったく触れられていないのが実状である。ここでは、流速も解析変数として残しているために変位場・間隙水圧場・流速場を同時に評価することができる。

力のつり合い式(式(8))に対しては変位分布を、Darcy 則(式(7))には流速分布を、連続条件式(式(16))には間隙水圧分布を重み関数として、重み付き残差法に基づいて次のような有限要素方程式を得ることができ

$$[K]\{u\} - [K_p]\{p\} = \{F\} \dots\dots\dots(19)$$

$$[M]\{q\} - [K_p]\{p\} = \{Q\} \dots\dots\dots(20)$$

$$[K_p]^T \{\dot{u}\} + [K_p]^T \{q\} = \{\dot{\epsilon}\} \dots\dots\dots(21)$$

ここに、 $\{u\}$  は変位ベクトル、 $\{q\}$  は流速ベクトル、 $\{p\}$  は間隙水圧ベクトルであり、 $[K]$  は土の骨格の剛性マトリックス、 $[M]$  は間隙水の透水性に関するマトリックス、 $[K_p]$  は空間の勾配に関するマトリックスである。また、

$$[K] = \sum_{i=1}^{N_0} \int_{\Omega_i} [B]^T [D] [B] d\Omega$$

$$[M] = \sum_{i=1}^{N_0} \int_{\Omega_i} [N_q]^T [S] [N_q] d\Omega$$

$$[K_p] = \sum_{i=1}^{N_0} \int_{\Omega_i} [B]^T \{m\} [N_p] d\Omega$$

$$\{F\} = \sum_{i=1}^{N_0} \int_{\Omega_i} [N_u]^T \{b_d\} d\Omega + \int_{\Gamma_i} [N_u]^T \{\bar{T}_d\} d\Gamma$$

$$\{Q\} = \sum_{i=1}^{N_0} \int_{\Omega_i} [N_q]^T \{b_w\} d\Omega - \int_{\Gamma_i} [N_q]^T \{\bar{T}_w\} d\Gamma$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = [B]\{\dot{u}\}, \quad \dot{\epsilon}_v = \langle m \rangle [B]\{\dot{u}\}$$

$$\{\dot{\sigma}\} = [D][B]\{\dot{u}\}$$

$N_0$ : 領域内の要素の総数

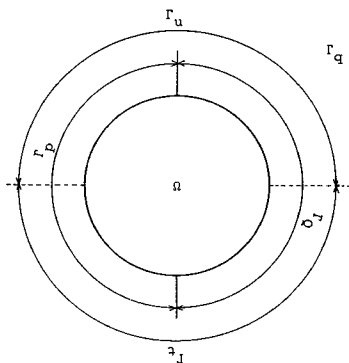


図-1 境界条件の概念図

- $\Omega_i$  :  $i$  番目の要素の体積
- $\Gamma_i$  :  $i$  番目の要素の表面積
- $\{\bar{T}_d\} = \{\bar{t}_d\}$
- $\{\bar{T}_w\} = \{\bar{p}n_d\}$
- $\{b_d\} = \{\rho b_d\}$
- $\{b_w\} = \{\rho_w b_d\}$

である。

$N_u, N_q, N_p$  はそれぞれ変位, 流速, 間隙水圧の補間関数であり, ここでは,  $N_u$  および  $N_q$  に対しては三角形要素の各頂点に節点を設けた要素内線形分布を用い,  $N_p$  に対しては要素内で一定として, 変数は三角形要素の重心の位置で評価するものとしている。

また,  $\bar{T}_t, \bar{T}_w$  は境界面に作用する外力を表わし,  $b_s, b_w$  は物体力を,  $\varepsilon_v$  は体積ひずみを表わす。式(19)~(21)における変位ベクトル  $\{u\}$ , および流速ベクトル  $\{q\}$  は未知の成分と境界で既知である成分が混在した形になっている。この未知成分と既知成分とを分離して表わすと, 式(19)~(21) は次のように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{p1} \\ K_{p2} \end{bmatrix} \{p\} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \dots\dots(19)'$$

$$\begin{bmatrix} M_{33} & M_{34} \\ M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ \bar{q}_4 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{p3} \\ K_{p4} \end{bmatrix} \{p\} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \dots\dots(20)'$$

$$\begin{bmatrix} K_{p1}^T & K_{p2}^T \\ K_{p3}^T & K_{p4}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{\bar{u}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{p3}^T & K_{p4}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ \bar{q}_4 \end{Bmatrix} = \{0\} \dots\dots(21)'$$

ここに, 上に $\bar{\quad}$ を付したものは既知であることを表わしている。

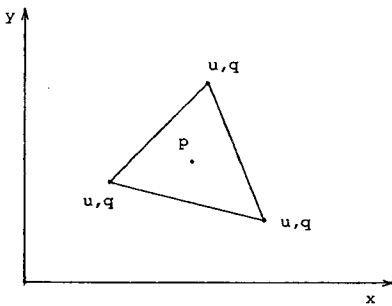


図-2 間隙水圧一定の三角形要素

#### 4. 時間積分漸化式の構成

式(21)'の時間微分項に対して一般的によく用いられる次のような差分形式の公式を用いるものとする。

$$\dot{u}^{n+\alpha} = (u^{n+1} - u^n) / \Delta t \dots\dots(22)$$

ここで, 肩付きの添字  $n$  は時刻  $t_n$  における値であることを表わす。すなわち,

$$u^n = u|_{t=t_n}$$

であり, また

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad t_{n+\alpha} = t_n + \alpha \Delta t, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

である。

各変数の値も次のように近似する。

$$u^{n+\alpha} = u^n + \alpha(u^{n+1} - u^n) \dots\dots(23)$$

$$q^{n+\alpha} = q^n + \alpha(q^{n+1} - q^n) \dots\dots(24)$$

$$p^{n+\alpha} = p^n + \alpha(p^{n+1} - p^n) \dots\dots(25)$$

これらを式(19)'~(21)'の  $\{\dot{u}\}, \{u\}, \{q\}, \{p\}$  に代入することにより, 直接次のようなマトリックス関係式が得られる。

$$[A]\{X^{n+1}\} = [B]\{X^n\} + [F^{n+\alpha}] \dots\dots(26)$$

ここに,

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha[K_{11}] & [0] & -\alpha[K_{p1}] \\ [0] & \alpha[M_{33}] & -\alpha[K_{p3}] \\ \Delta t^{-1}[K_{p1}]^T & \alpha[K_{p3}]^T & [0] \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\beta[K_{11}] & [0] & \beta[K_{p1}] \\ [0] & -\beta[M_{33}] & \beta[K_{p3}] \\ \Delta t^{-1}[K_{p1}]^T & -\beta[K_{p3}]^T & [0] \end{bmatrix}$$

$$\{X^{n+1}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{n+1} \\ q_3^{n+1} \\ p^{n+1} \end{Bmatrix}, \quad \{X^n\} = \begin{Bmatrix} u_1^n \\ q_3^n \\ p^n \end{Bmatrix}$$

$$[F^{n+\alpha}] = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{n+\alpha} - [K_{12}]\{\bar{u}_2^{n+\alpha}\} \\ \bar{Q}_3^{n+\alpha} - [M_{34}]\{\bar{q}_4^{n+\alpha}\} \\ -[K_{p2}]^T\{\bar{u}_2^{n+\alpha}\} - [K_{p4}]^T\{\bar{q}_4^{n+\alpha}\} \end{Bmatrix}$$

$$\beta = 1 - \alpha$$

である。

さらに, 次のように変数ベクトルに係数を含ませることにより, 係数マトリックスを対称化することができる。

$$[A']\{X_1^{n+1}\} = [B']\{X_1^n\} + [F^{n+\alpha}'] \dots\dots(27)$$

ただし,

$$[A'] = \begin{bmatrix} -\alpha \Delta t [K_{11}] & [0] & [K_{p1}] \\ [0] & -[M_{33}] & [K_{p3}] \\ [K_{p1}]^T & [K_{p3}]^T & [0] \end{bmatrix}$$

$$[B'] = \begin{bmatrix} \beta \Delta t [K_{11}] & [0] & [K_{p1}] \\ [0] & -[M_{33}] & [K_{p3}] \\ [K_{p1}]^T & [K_{p3}]^T & [0] \end{bmatrix}$$

$$\{X_1^{n+1}\} = \begin{Bmatrix} -\Delta t^{-1} u_1^{n+1} \\ -\alpha q_3^{n+1} \\ -\alpha p^{n+1} \end{Bmatrix}, \quad \{X_1^n\} = \begin{Bmatrix} -\Delta t^{-1} u_1^n \\ \beta q_3^n \\ \beta p^n \end{Bmatrix}$$

$$[F^{n+\alpha}'] = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{n+\alpha} - [K_{12}]\{\bar{u}_2^{n+\alpha}\} \\ \bar{Q}_3^{n+\alpha} - [M_{34}]\{\bar{q}_4^{n+\alpha}\} \\ [K_{p2}]^T\{\bar{u}_2^{n+\alpha}\} + [K_{p4}]^T\{\bar{q}_4^{n+\alpha}\} \end{Bmatrix}$$

式(27)によって, 時刻  $t_n$  における諸量から時刻  $t_{n+1}$  における未知量を求めることができる。すなわち, 時刻  $t_0$  における変数  $\{u_1^0\}, \{q_3^0\}, \{p^0\}$  と境界条件から出発し, Step-by-step に解を求めていくことができる。

式(27)が本論文で提案する積分漸化式である。

### 5. 解析例

#### (1) 一次元圧密問題

上面のみの片面排水条件下における一次元圧密問題の解析を図-3(a)および(b)に示す2種類の要素分割で行った。四角形要素は4つの三角形要素の重ね合わせで構成したものである。また、式(27)における $\alpha$ は0.5とした。材料定数等は表-1に示すとおりであり、用いた積分時間間隔は表-2に掲げたとおりである。図-4は解析によって得られた、載荷重で無次元化した過剰間隙水圧の等時曲線であり、図-5は $z$ 方向の流速の等時曲線である。図-6は平均圧密度の時間変化を、時間を対数軸にとって表わしたものである。各図中の図(a)および(b)は図-3に示した2種類の要素分割(a)および(b)に対応したものである。

#### (2) 帯状荷重を受ける半無限一様地盤の二次元圧密問題

図-7に示すように、半無限一様地盤に幅 $2a$ の帯状荷重が作用する場合の圧密問題を対象とする。この問題に対してはSchiffmanら<sup>15)</sup>が解析解を示しており、解法の検証のために解析したものである。対称性を考慮して図-8に示すような要素分割モデルを用いて解析を行った。解析領域は載荷幅 $a$ (=5m)に対し、深さ15 $a$ 、中心から横方向に幅18 $a$ にとった。解析に用いた材料定数等は表-3に示すとおりである。用いた積分時間間隔は表-4に示したとおりである。解析は、初期条件の明確な無載荷状態から出発し、最初の10ステップを用

いて図-9のように荷重を立ち上げ、以後荷重を一定として行ったものである。図-10は、解析によって得ら

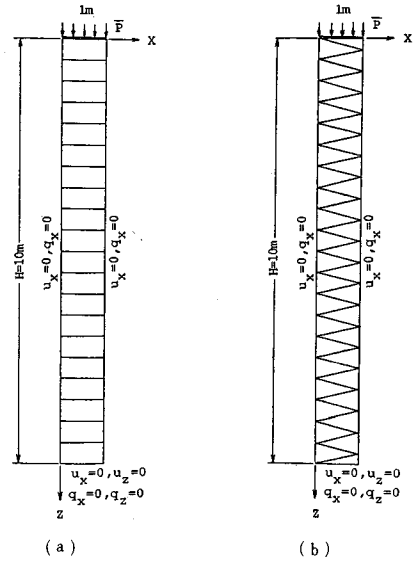


図-3 一次元圧密問題に対する要素分割

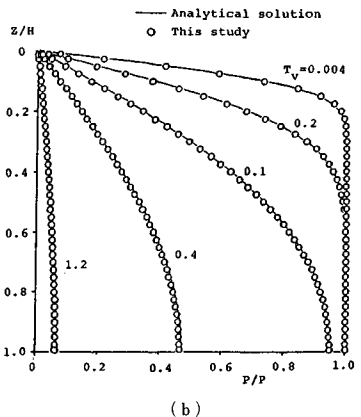
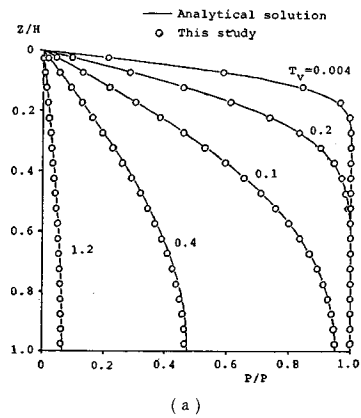


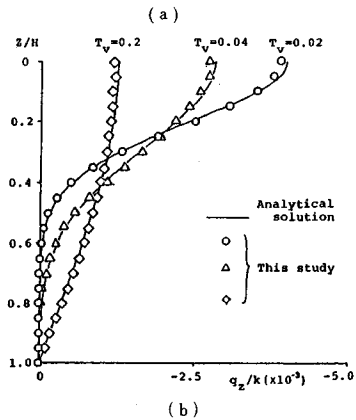
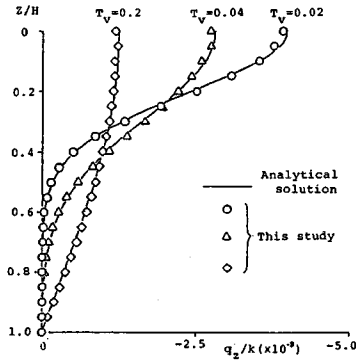
図-4 間隙水圧の等時曲線

表-1 材料定数等 (一次元圧密)

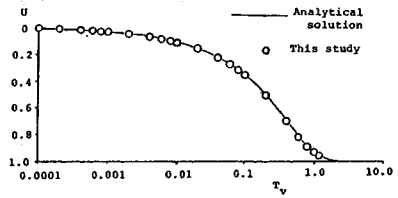
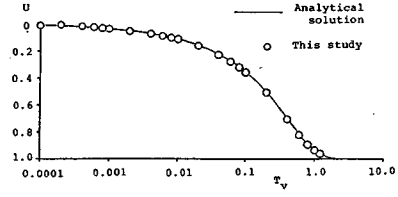
水の密度	$\gamma_w$	$1.0 \times 10^{-3}$	kgf/cm <sup>3</sup>
透水係数	$k$	$1.0 \times 10^{-4}$	cm/sec
ヤング係数	$E$	10.0	kgf/cm <sup>2</sup>
ポアソン比	$\nu$	1/3	
圧密係数	$C_v$	1.5	cm <sup>2</sup> /sec
載荷重	$\bar{P}$	$1.0 \times 10^{-3}$	kgf/cm <sup>2</sup>
排水距離	$H$	10	m
時間係数 $T_v = \frac{C_v t}{H^2}$	$C_v = \frac{k m_v}{\gamma_w}$		

表-2 積分時間間隔 (一次元圧密)

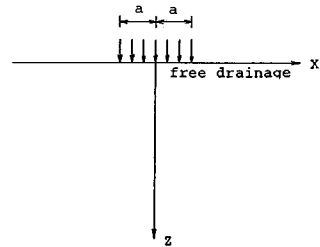
ステップ	$\Delta T_v$	$T_v$
1 ~ 10	0.00001	0.0 ~ 0.0001
11	0.0001	0.0001 ~ 0.0002
12 ~ 15	0.0002	0.0002 ~ 0.001
16	0.001	0.001 ~ 0.002
17 ~ 20	0.002	0.002 ~ 0.01
21	0.01	0.01 ~ 0.02
22 ~ 25	0.02	0.02 ~ 0.1
26	0.1	0.1 ~ 0.2
27 ~ 31	0.2	0.2 ~ 1.2



図—5 流速の等時曲線



図—6 平均圧密度の時間変化



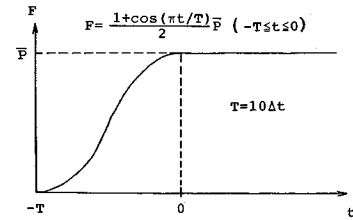
図—7 解析対象 (帯状荷重を受ける半無限一様地盤)

表—3 材料定数等 (帯状荷重を受ける一様地盤)

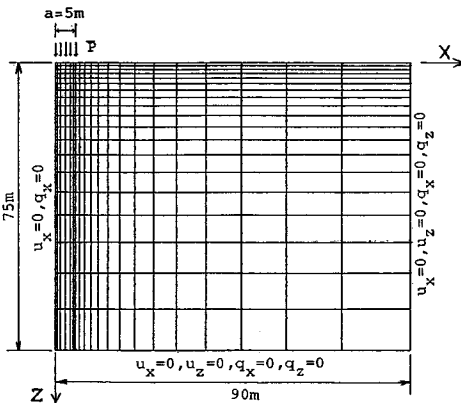
水の密度 $\gamma_w$	$1.0 \times 10^{-3}$	kgf/cm <sup>3</sup>
透水係数 $k_x, k_z$	$5.0 \times 10^{-5}$	cm/sec
ヤング係数 E	20.0	kgf/cm <sup>2</sup>
ポアソン比 $\nu$	0	
圧密係数 $C_v$	1.0	cm <sup>2</sup> /sec
載荷重 $\bar{P}$	0.2	kgf/cm <sup>2</sup>
載荷幅 $2a$	10	m
時間係数 $T_v = \frac{C_v t}{a^2}$	$C_v = \frac{k E (1-\nu)}{\gamma_w (1-2\nu) (1+\nu)}$	

表—4 積分時間間隔 (帯状荷重を受ける一様地盤)

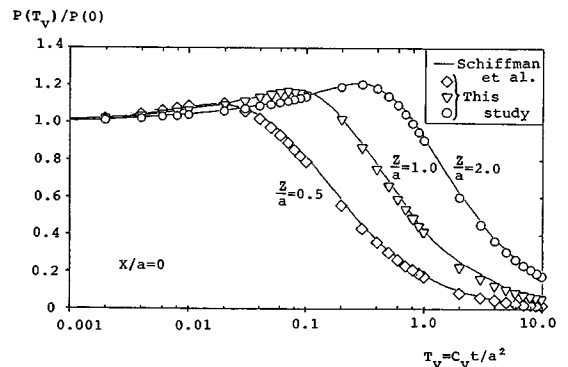
ステップ	$\Delta T_v$	$T_v$
1 ~ 10	0.0001	—
11 ~ 15	0.002	0.0 ~ 0.01
16 ~ 24	0.01	0.01 ~ 0.1
25 ~ 33	0.1	0.1 ~ 1.0
34 ~ 42	1.0	1.0 ~ 10.0



図—9 荷重の立ち上げ方



図—8 要素分割モデル (420 節点, 380 要素)



図—10 間隙水圧の時間変化

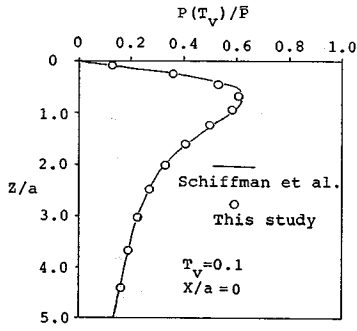


図-11 間隙水圧の深さ方向変化 ( $x/a=0$ )

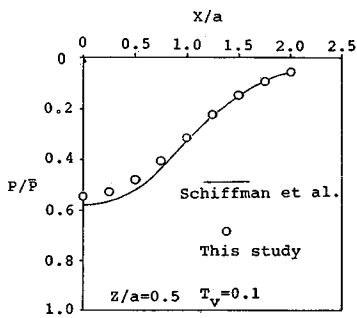


図-12 間隙水圧の水平方向変化 ( $z/a=0.5$ )

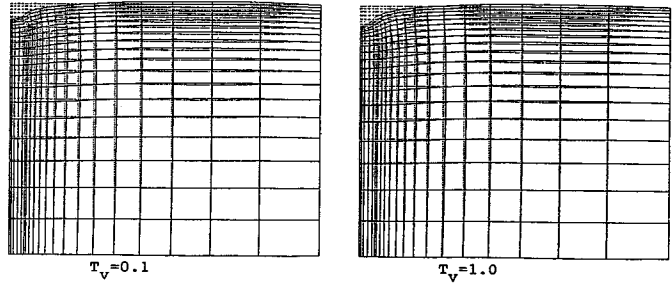


図-13 変形図 (変位の倍率 50 倍)

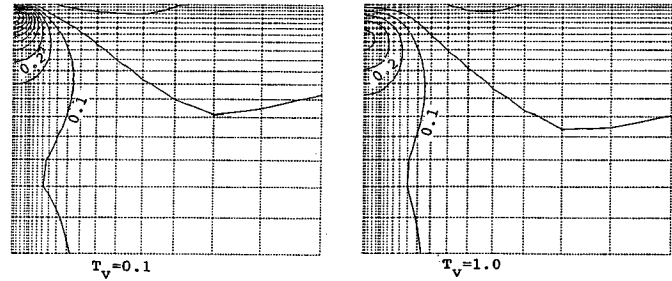


図-14 間隙水圧の等圧線図

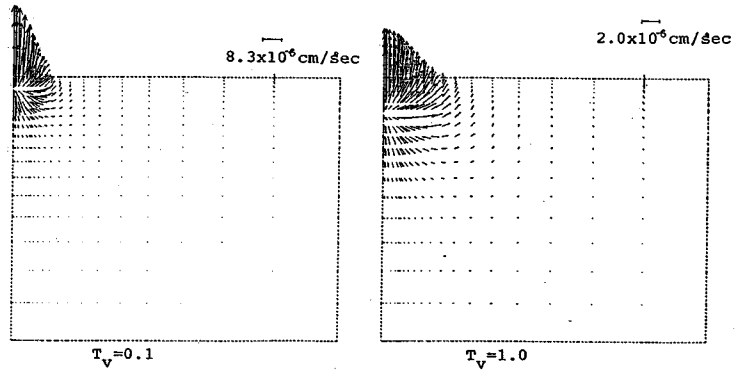


図-15 流速ベクトル図

表-5 材料定数等 (三層地盤圧密解析)

水の密度		$\gamma_w$	$1.0 \times 10^{-3}$	kgf/cm <sup>3</sup>
第1層	透水係数		$1.2 \times 10^{-8}$	cm/sec
	ヤング係数		43.6	kgf/cm <sup>2</sup>
	ポアソン比		0.3	
第2層	透水係数		$1.2 \times 10^{-4}$	cm/sec
	ヤング係数		872.0	kgf/cm <sup>2</sup>
	ポアソン比		0.3	

表-6 積分時間間隔 (三層地盤圧密解析)

ステップ	$\Delta t$	t (day)
1 ~ 10	0.001	—
11 ~ 20	0.1	0.0 ~ 1.0
21 ~ 30	1.0	1.0 ~ 11.0
31 ~ 40	3.0	11.0 ~ 41.0
41 ~ 50	10.0	41.0 ~ 141.0
51 ~ 60	30.0	141.0 ~ 441.0
61 ~ 70	100.0	441.0 ~ 1441.0

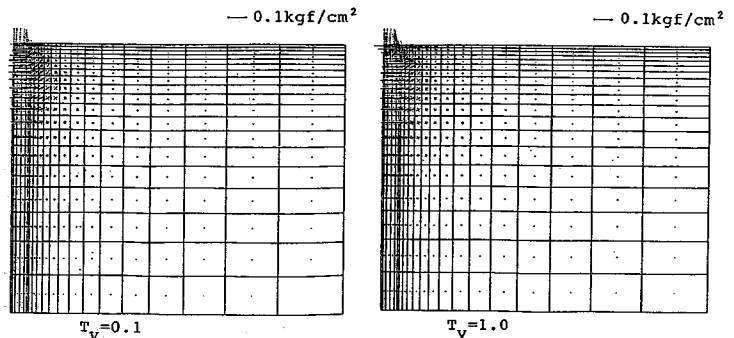
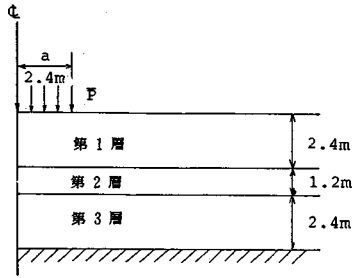
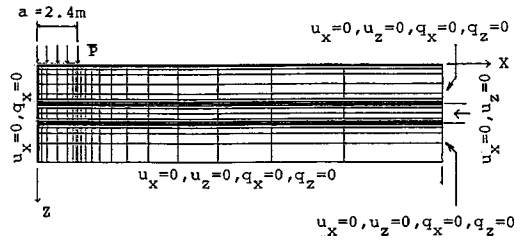


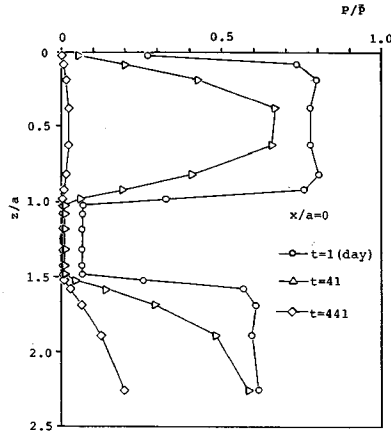
図-16 有効応力の主応力図



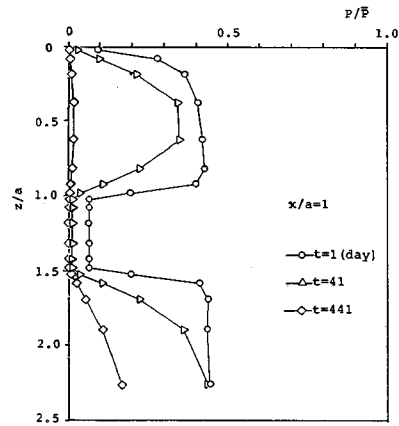
図一17 解析対象 (三層地盤)



図一18 要素分割モデル (420 節点, 380 要素)

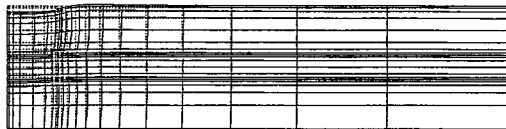


(a)  $x/a=0.0$

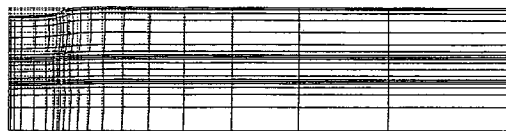


(b)  $x/a=1.0$

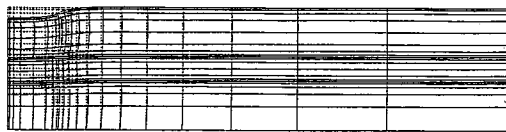
図一19 間隙水圧の深さ方向分布



t=1day

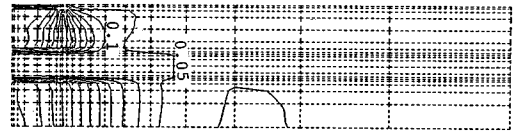


t=41day

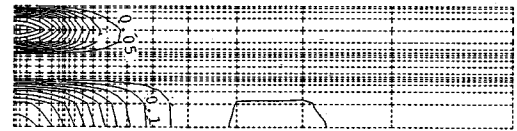


t=141day

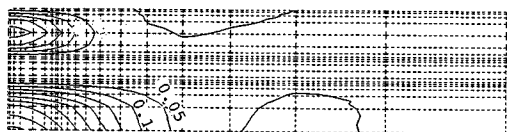
図一20 変形図 (変位の倍率 50 倍)



t=1day



t=41day



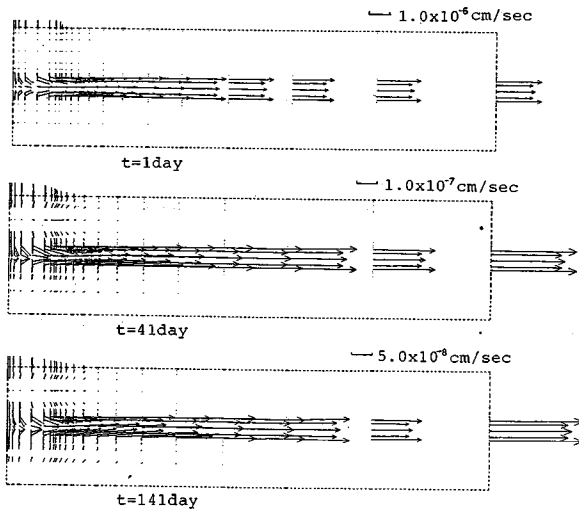
t=141day

図一21 間隙水圧の等圧線図

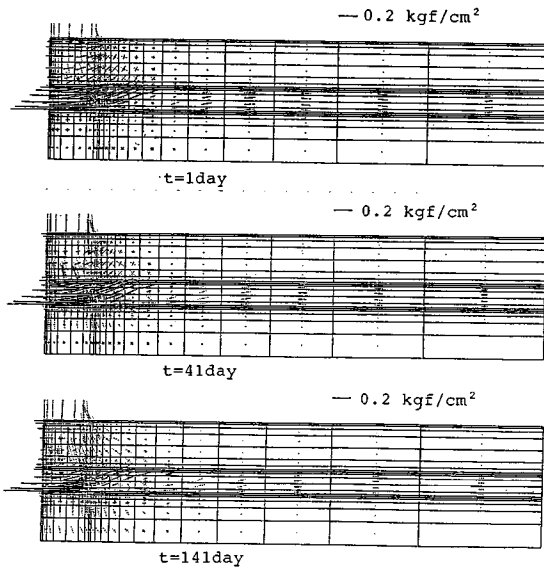
れた荷重中央下 ( $x/a=0$ ), 深さ  $z/a=0.5$ ,  $z/a=1.0$ ,  $z/a=2.0$  の3か所における間隙水圧の値の時間変化を示したものである. 図一11は時刻  $T_v=0.1$  における荷

重中央下 ( $x/a=0$ ) の間隙水圧の分布を示したものであり, 図一12は時刻  $T_v=0.1$  における ( $z/a=0.5$ ) の位置での間隙水圧の分布を示したものである. 図一13





図—22 流速ベクトル図



図—23 有効応力の主応力図

は各時刻における変形の状態を、図—14 は過剰間隙水圧の分布状態を、図—15 は間隙水の流速の状態を、図—16 は有効応力の主応力の分布状態を、それぞれ示したものである。

(3) 透水係数の異なる3層地盤の圧密解析

図—17 に示すように、有限深さの3層の地盤を対象として、図—18 に示す要素分割および境界条件のもとで解析を行った。材料定数は表—5 に示すように、第1層と3層が同じ材質であり、第2層は他の層に比して透水係数を $10^4$ 倍、ヤング係数を20倍としている。図—19 は解析によって得られた (a) 荷重中央下 ( $x/a=0$ )

と (b) 荷重端の下 ( $x/a=1.0$ ) における過剰間隙水圧の深さ方向の分布を示したものである。図—20 ~ 図—23 に解析結果の変形図、等過剰間隙水圧線図、流速ベクトル図、有効応力の主応力図を示した。

6. 結 論

本論文は変位、流速、圧力を基本変数とした有限要素法による多次元圧密解析のアルゴリズムを構成し、数値解析例によってその妥当性を検証したものである。この解析法は、これまで通常行われているような基礎式の段階での流速の消去を行わず、力のつり合い式、Darcy 則、連続条件式のそれぞれを有限要素法によって離散化し、得られた3つの有限要素方程式に時間積分公式を適用することによって構成したものである。Darcy 則をそのまま離散化するために間隙水圧に関しては空間に関する1階微分項が対象となり、間隙水圧を要素内一定とした三角形要素を用いることが可能となった。境界上に間隙水圧が変数として現われないために、圧力境界を規定する必要がないが、排水境界付近の間隙水圧に関しても解析解との良い一致が得られている。

圧密問題の解析に関してはいままでに数多くの解法が提案されてはいるが、境界近傍の間隙水圧の評価等、問題点を残しているのが現状である。ここに提案した解析法は、構成が比較的単純であり、実用上効果的な解析法であると判断している。

参 考 文 献

- 1) Biot, M. A. : General Theory of three-dimensional consolidation, J. Appl. Phys., Vol.12, pp.155~165, 1941.
- 2) Biot, M. A. : Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, J. Appl. Phys. Vol.26, pp.182~185, 1955.
- 3) Sandhu, R.S. and Wilson, E.L. : Finite-element analysis of seepage in elastic media, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol.95, EM3, pp.641~652, 1969.
- 4) Christian, J.T. and Boehmer, J.W. : Plane strain consolidation by finite elements, J. Soil Mech. Found. Div., Proc. ASCE, Vol.96, SM4, pp.1435~1457, 1970.
- 5) Yokoo, Y., Yamagata, K. and Nagaoka, H. : Finite element analysis of consolidation following undrained deformations, Soils and Foundations, Vol.11, pp.37~58, 1971.
- 6) Siriwardane, H.J. and Desai, C.S. : Two numerical schemes for nonlinear consolidation, Int. J. Num. Methods Eng., Vol.17, pp.405~426, 1981.
- 7) Ghaboussi, J. and Wilson, E.L. : Flow of compressible fluid in porous elastic media, Int. J. Num. Methods Eng., Vol.5, pp.419~442, 1973.

- 8) Chang, C. S. and Duncan, J. M. : Consolidation analysis for partly saturated clay by using an elastic-plastic effective stress-strain model, *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 7, pp. 39~55, 1983.
- 9) Prevost, M. : Consolidation of anelastic porous media, *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, Vol. 107, EM1, pp. 169~186, 1981.
- 10) Carter, J. P., Booker, J. R. and Small, J. C. : The analysis of finite elasto-plastic consolidation, *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 3, pp. 107~129, 1979.
- 11) Booker, J. R. and Small, J. C. : Finite layer analysis of consolidation I : *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 6, pp. 151~171, 1982.
- 12) 赤井・田村 : 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, 第 269 号, pp. 95~104, 1978.
- 13) Sandhu, R. S., Liu, H. and Singh, K. J. : Numerical performance of some finite element schemes for analysis of seepage in porous elastic media, *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 1, pp. 177~194, 1977.
- 14) Sandhu, R. S., Lee, S. C. and The, H. I. : Special finite elements for Analysis of soil consolidation, *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 9, pp. 125~147, 1985.
- 15) Schiffman, R. L., Chen, A. T-F. and Jordan, J. C. : An analysis of consolidation theories, *J. Soil Mech. Found. Div., Proc. ASCE*, Vol. 95, SM1, pp. 285~312, 1969.

(1988. 6. 20・受付)