

# 立体骨組み解析法による横たわみしたトラス補剛吊橋の 曲げねじれフラッター解析

## FLUTTER ANALYSIS OF A TRUSS STIFFENING SUSPENSION BRIDGE BY A 3D FRAME MODEL METHOD

宮田利雄\*・山田 均\*\*・太田博文\*\*\*

By Toshio MIYATA, Hitoshi YAMADA and Hirohumi OTA

Coupled flutter oscillation of a very long span suspension bridge is numerically investigated by complex eigenvalue analysis of 3D frame model under various wind load conditions. Conclusions are as follows:

- 1) Complex eigenvalue analysis for flutter problem may solve uncertainties of ordinary methods.
- 2) Usually selected bending and torsional modes do not always develop into the critical flutter mode.
- 3) Selberg's estimation always gives the lowest critical wind speed of coupled flutter, although there is difference in the appeared flutter normal mode. Therefore it can work as a conservative index of coupled flutter in the wind resistance design procedure.

*Keywords: wind resistant design, suspension bridge, coupled flutter, frame model*

### 1. ま え が き

超長大支間を有する明石海峡大橋の建設がいよいよ始められた。その耐風性にかかわる諸問題を検討するに際し、耐フラッター性に関する検討が第一義的に行われなければならないことはいままでもない<sup>1)</sup>。従来、長大吊橋の耐フラッター性に関する検討、判定は部分模型を用いた風洞実験により、また、曲げねじれフラッター型のフラッターの発生が予測される場合には、平板翼に作用する非定常空気力に基づく曲げねじれフラッター解析結果（いわゆる  $U-g$  法、あるいは Selberg による簡易式<sup>2)</sup>に従う）を参考にして行われる。ところで、フラッターの発生時にはその発生風速に応じた風荷重が作用しており、吊橋系は相当の大きさの変形を伴うものである。このような風荷重により横たわみする状態でのフラッター特性について、今まで解析的に検討した例は見当たらない。本研究では、平板翼に作用する非定常空気力に基づく曲げねじれフラッター解析法を風荷重により横たわみする吊橋系に適用し、このような状態での曲げねじ

れフラッター解析を行ってその特性について検討することとした。

さて、吊橋補剛桁が全体的に偏平な平板状とみなせるとき、鉛直たわみとねじれが連成する曲げねじれフラッターが発生する可能性のあることはよく知られている。ここでは、鉛直たわみとねじれの固有振動解析結果に基づいて曲げねじれフラッター解析が行われ、判断資料とされている。

吊橋に関する曲げねじれフラッター解析法は Bleich<sup>3)</sup>によって示され、並進・回転の連成振動を行う二次元剛体翼に関する非定常空気力を吊橋構造に適用するものである。この方法は偏平断面のはり系であれば原理的にはどの場合にも適用できる。基本的には振動モード解析法に従うものである。ここでは、最も低いフラッター風速で曲げねじれ連成フラッターが発生している際の振動モード形の各成分は、曲げねじれそれぞれの最低次固有振動モード形に近似でき、しかもそれらの形状もよく似かよっていると仮定できるとし、曲げ、ねじれの最低次のみを考えている。さらに、この解析で必要とされる曲げ、ねじれの最低次の固有振動数  $f_1$ ,  $f_2$  と振動モード形  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  には（添字 1 は曲げを、2 はねじれを表わす）、従来、いわゆるエネルギー法をそれぞれ個別に適用して求められたものをあてている。したがって、この方法は

\* 正会員 工博 横浜国立大学教授 工学部建設学科  
(〒240 横浜市保土ヶ谷区常盤台 156)

\*\* 正会員 工博 横浜国立大学助教授 工学部建設学科  
(同上)

\*\*\* 正会員 工修 静岡県 (元・横浜国立大学大学院学生)

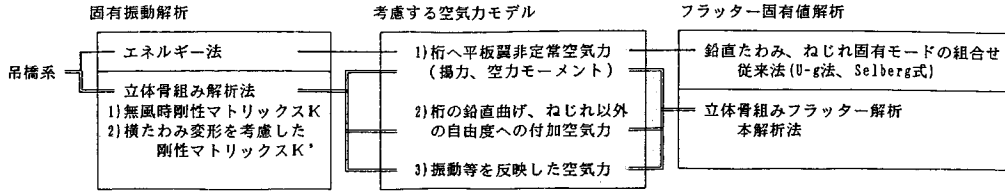


Fig. 1 Summary of the flutter analysis.

近似解法であって、必要とされるフラッター風速の推定精度の程度、対象系の動的特性の複雑さに応じて、適用範囲を吟味しておく必要がある。この方法が開発された時点(1950年頃)を考えれば、エネルギー法による近似計算でもやむを得ないことであったといえる。しかし、この方法を長大吊橋に適用しようとするとき、曲げ、ねじれそれぞれの最低次振動モード形が似て非なる場合があり、さらに立体骨組解析モデルなどを用いることによって曲げ、ねじれともに含まれる全体的な固有値解析が行われ明らかに曲げとねじれモード間に構造的連成性が存在するような場合には不都合なことが生じてくる。

まず第1の問題であるが、たとえば中央支間の振動モード形が片方は対称1次で、他方は逆対称1次が最低次となるような場合を想定すると、曲げとねじれが空力的に連成するという特徴を表わす連成項における両者の振動モード形の積の定積分、すなわち

$$D = \int_L \phi_1(X) \phi_2(X) dx$$

がほぼ  $D \approx 0$  となって、連成振動は起こり得ないことになる。この例は、あくまでも最低次モード形を機械的に組み合わせたことによる結果であり、Bleichらの解析の前提である曲げ、ねじれともに振動モード形は似かよったものであるとの条件を犯している。したがって、曲げ、ねじれともに似かよった対称形、あるいは逆対称形の組合せ、すなわち上述の  $D$  が1に近くなる組合せの場合を想定することが必要になる。なお、曲げ、ねじれの振動モード形が完全に一致して  $D=1$  となる時(このとき、振動モード形が  $\phi_1 = \phi_2 = 1$  の曲げ、ねじれ2自由度剛体系に等価となる)、曲げねじれフラッターの限界風速の簡易式が導ける。これが Selberg の式<sup>3)</sup>にほかならない。

また、第2の問題点である曲げとねじれモード間に構造的連成性が存在するような場合にも、Bleichらの方法では適切に対処することが不可能になる。長大吊橋では鉛直たわみ固有振動には他の変位モードとの連成はほとんどないが、ねじれ固有振動には補剛桁の横たわみ、ケーブルの鉛直、ならびに横たわみの連成が特に対称モードでは顕著である。

## 2. 立体骨組フラッター解析法

### (1) 解析理論(風速を変数とする複素固有値解析法)

以上に述べたような問題点に対処するためにも、また、より可撓性が大きくなる超長大支間吊橋のフラッター特性を把握するうえからも、Bleichらの方法を拡張し、種々の影響度調査を可能ならしめる方法の展開が必要と思われる。そのためには構造物の立体骨組解析法を用いて、Bleichらと同じフラッター解析を施すことが適当と考えられた。

具体的な解析では、(a) 基本的には平板翼に作用する非定常揚力、およびモーメントを補剛桁の鉛直たわみ、およびねじれ振動に伴う非定常揚力・モーメントとして用いる、(b) 補剛桁の横たわみ振動に伴う非定常抗力、ならびにケーブルの鉛直たわみ・横たわみ振動に伴う非定常揚力・抗力を準定常的に導いて付与する、(c) 実橋の補剛桁断面の空力特性を考慮することとして、その静的三分力特性に応じて平板翼の非定常揚力・モーメントを補正した場合と比較する、さらに (d) 静的に風荷重を載荷した状態で発生する静的横たわみを考慮することとした。これにより、従来法の抱える問題点、さらに解決すべき問題点のうち、(1) フラッター振動モード形と無風時固有振動モード形の関係、(2) 吊橋系としての複雑な振動特性、特に桁のねじれ振動が卓越する際のケーブル、桁の横たわみ振動の連成効果、(3) 補剛桁の横たわみ、ケーブルの鉛直・横たわみ連成振動に伴う非定常抗・揚力の効果、(4) 風荷重による静的横たわみの影響について調べることができる。解析上のポイントのおおよそを従来法と対比して示すと、Fig. 1のようになる。

本フラッター解析には平板空気力と種々の連成振動に伴う非定常空気力を仮定する必要があり、次のようなものを用いることにした。補剛桁に作用する非定常揚力  $L_s$ ・モーメント  $M_s$  は、鉛直たわみ振動  $u_s$  (下向き正)、ねじれ振動  $\phi_s$ 、(頭上げ正) に対して、平板剛翼理論に従うと、

$$\downarrow L_s = -\pi \rho b^2 (\dot{u}_s + U \dot{\phi}_s)$$

$$-2\pi \rho U b C(k) \left( \dot{u}_s + U \dot{\phi}_s + \frac{b}{2} \dot{\phi}_s \right) \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \odot M_s = & \pi \rho b^3 \left( -\frac{U}{2} \dot{\phi}_s - \frac{b}{8} \ddot{\phi}_s \right) \\ & + 2\pi \rho U b^2 \cdot \frac{1}{2} C(k) \left( \dot{u}_s + U \phi_s + \frac{b}{2} \dot{\phi}_s \right) \dots (2) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 $b$  は平板剛翼幅の半分、 $C(k)$  はセオドルセン関数 ( $=F+iG$ )、 $k=\omega b/U$  は換算振動数、 $U$  は風速、 $\rho$  は空気密度である。

振動連成に伴う補剛桁の鉛直たわみとねじれ以外の成分の非定常空気力は準定常的な空気力を桁およびケーブルについて次のように当てはめた。補剛桁の平均流方向の横たわみ振動  $v_s$  に伴い発生する非定常抗力  $P_s$  については、相対風速 ( $U-\dot{v}_s$ ) による静的抗力から、

$$\rightarrow P_s = -\rho h C_{Ds} U \dot{v}_s \dots (3)$$

のように与えることができる。ここで、 $h$  は補剛桁高、 $C_{Ds}$  は抗力係数である。同様に、ケーブルの横たわみ振動  $v_c$  に伴う非定常抗力  $P_c$  が、

$$\rightarrow P_c = -\rho d C_{Dc} U \dot{v}_c \dots (4)$$

で与えられる。ここで、 $d$  はケーブル径、 $C_{Dc}$  は抗力係

数である。ケーブルの鉛直たわみ振動  $u_c$  に伴う非定常揚力  $L_c$  については、相対迎角 ( $\tan^{-1}(\dot{u}_c/U)$ )、ならびに相対風速  $U_r$  による静的揚力から、

$$\downarrow L_c = -\left(\frac{1}{2}\right) \rho d C_{Lc} U \dot{u}_c \dots (5)$$

のように与えることができる。

以上の式 (1)~(5) による 5 成分の非定常空気力が吊橋系に作用するとした。

吊橋系の変位ベクトル  $\mathbf{u}$  については、補剛桁の鉛直たわみ  $u_s$ 、横たわみ  $v_s$ 、ねじれ  $\phi_s$ 、およびケーブルの鉛直たわみ  $u_c$ 、横たわみ  $v_c$ 、すなわち、

$$\mathbf{u} = \{u_s, \phi_s, v_s, u_c, v_c\}^T \dots (6)$$

とおくと、解析の基本式となる運動方程式は一般的に

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_D\mathbf{u} + \mathbf{F}_V\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_A\ddot{\mathbf{u}} \dots (7)$$

と書ける。ここで係数マトリックス  $\mathbf{F}_D, \mathbf{F}_V, \mathbf{F}_A$  は非定常空気力の、変位、速度、加速度比例成分を表す。

各非定常空気力マトリックスを式 (1)~(5) に従って書き改めると、式 (6) の変位ベクトルに対して、

$$\mathbf{F}_D = 2\pi\rho U^2 b \begin{bmatrix} 0 & -C(k) & 0 \\ 0 & (b/2)C(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (7\text{-a})$$

$$\mathbf{F}_V = \rho U \begin{bmatrix} -2\pi b C(k) & -\pi b^2 \{1+C(k)\} & 0 \\ \pi b^2 C(k) & -(\pi/2) b^3 \{1-C(k)\} & 0 \\ 0 & 0 & -h C_{Ds} \\ & & & -(1/2) d C_{Dc} \\ & & & & -d C_{Dc} \end{bmatrix} \dots (7\text{-b})$$

$$\mathbf{F}_A = \pi\rho b^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (7\text{-c})$$

となる。

式 (7) の右辺を左辺に移項すると斉次式が得られる。この斉次式は非定常空気力を含むので複素数方程式であり、係数マトリックスは風速  $U$ 、換算振動数  $k$  の関数となっている。したがって、基本的には、この斉次式について複素固有値解析を施して、フラッター限界風速、フラッター振動数、およびフラッター振動形を求めればよいことになる。

### (2) 解析手順

さて、前項の斉次式の係数マトリックスは換算振動数  $k(=\omega b/U)$  と風速  $U$  の複素関数マトリックスである。したがって、複素固有値解析を行うについては、 $k$  と  $U$  を仮定しなければならないが、このことは、結局、振動数  $\omega$  を仮定することであり、複素固有値解析の結

果得られる振動数との間で収束計算を行わなければならないことになる。これは非常に煩雑な計算となる。そこで、本解析では式 (7) の右辺の空気力項を別の表現に改めることにする。

元来、平板剛翼に関する非定常空気力は並進と回転の調和振動を呈している状態について導かれ、フラッター解析 (空気力を含む固有値解析) も調和振動状態を前提にして行われている。したがって、調和振動

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp(i\omega t) \dots (8)$$

を前提にして、式 (7) の右辺を変形してもさしつかえないと考えられる。具体的には、 $\mathbf{u} = -\ddot{\mathbf{u}}/\omega^2$ 、 $\mathbf{u} = -i\dot{\mathbf{u}}/\omega$ 、および  $k=\omega b/U$  の関係を用い、非定常空気力の 3 成分を加速度  $\ddot{\mathbf{u}}$  のみに比例する形に集約できる。すなわち、

$$F_D \ddot{u} + F_V \dot{u} + F_A u = F \ddot{u} = \begin{bmatrix} -\pi\rho b^2 L_u & -\pi\rho b^2 L_\phi \\ -\pi\rho b^2 M_u & -\pi\rho b^2 M_\phi \\ \rho b h i C_{Ds} / k \\ (1/2)\rho b d i C_{Dc} / k \\ \rho b d i C_{Dc} / k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{\phi}_s \\ \ddot{v}_s \\ \ddot{u}_c \\ \ddot{v}_c \end{bmatrix} \quad (9)$$

のように表わすことができる。この結果、係数  $L_u, L_\phi, M_u, M_\phi$ 、ならびにマトリックス  $F$  は換算振動数  $k$  のみの複素関数となる。

したがって、式 (9) の空気力を用いて複素固有値解析を行う際、換算振動数  $k$  のみを仮定すれば済むことになる。ただし、曲げねじれフラッターについては構造減衰の影響は小さいことがわかっており、この効果の補正も比較的簡単に行い得るので、構造減衰項は省略してもさしつかえない。運動方程式は、結局、

$$(M - F) \ddot{u} + Ku = 0 \quad (10)$$

となる。

換算振動数  $k$  を仮定しながら式 (10) について複素固有値解析すると、複素振動数  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  と複素振動モードベクトル  $\Phi = \Phi_R + i\Phi_I$  が求められる。

この結果、フラッターの発生を複素振動数の虚部が  $\omega_I = 0$  となって、振動応答ベクトルが発散も減衰もしない状態が保たれる限界風速  $U_F$  以上で起こると考え、 $\omega_I$  の正負を分ける限界風速の最小値、およびそのときの振動数  $\omega_R$  と複素振動モードベクトル  $\Phi$  を定めればフラッター風速、フラッター振動数、およびフラッター振動モード形が求まることになる。

フラッター振動モード形については、 $\omega_I = 0, \omega_R = \omega_F$  とおくと、変位  $u_j$  成分に対して

$$u_j = u_0 (\Phi_{Rj} + i\Phi_{Ij}) \exp(i\omega_F t) = u_0 \sqrt{\Phi_{Rj}^2 + \Phi_{Ij}^2} \cos(\omega_F t + \theta_j) \quad (11)$$

となる。ここで、位相  $\theta_j = \tan^{-1}(\Phi_{Ij} / \Phi_{Rj})$  が存在し、各変位成分によって異なるものとなるところが特徴的である。

### 3. 横たわみを無視した解析結果

#### (1) 解析例の構造諸元と固有振動特性

本解析法を適用する例題として、ある 2 000 m 級トラス補剛桁を有する吊橋を対象とすることとした。解析では、補剛桁の断面形状は平板翼とするが、構造諸元、ならびに静的三分力特性にはトラス桁の値を付与させるわけである。諸元等を一覧すると Table 1 のようになる。

Table 1 の諸元を用いて、立体骨組モデルによる固有振動解析(無風時)を行うと次のような結果が得られる。

Fig. 2 に振動モード形、および固有振動数を示してある。いずれも、鉛直たわみとねじれの最低次固有振動数

Table 1 Dimensions of the model.

支間割 (m)	ケーブル	950+2000+950	
	補剛桁		
サ グ 比		1/8.5	
ケーブル	本 数	4	
	断面積 (㎡)	0.4419/本	
	中心間隔 (m)	38.5	
桁 高 (m)		14	
	桁 幅 (m)	35.5	
桁剛性 (t m / Br)	鉛直曲げ	5.75 × 10 <sup>8</sup>	
	横曲げ	3.54 × 10 <sup>9</sup>	
	撓 れ	1.67 × 10 <sup>8</sup>	
死荷重 (t m / Br)	吊構造部	27.44	
	ケーブル	15.89	
	合 計	43.33	
極 慣 性 モーメント (ts <sup>2</sup> / Br)	吊構造部	535	
	ケーブル	601	
	合 計	1136	
塔頂バネ定数	橋軸方向 (t/m)	3.33 × 10 <sup>2</sup>	
	直角方向 (t/m)	6.12 × 10 <sup>3</sup>	
	撓 れ (tm/rad)	2.52 × 10 <sup>6</sup>	
三分力特性	桁	抗力係数	2.03
		投影面積 (㎡/m)	6.823
		揚 力 C <sub>L</sub>	0.1
	モーメント C <sub>M</sub>	0.0043	
	ケーブル	抗力係数	1.0
		投影面積 (㎡/m)	0.839

は対称形で与えられる。ねじれに関してエネルギー法を用いて固有振動解析したときに求められる最低次の対称形は、 $T_2$  が相当する。これらの振動モード形の固有振動数を従来型の Selberg 式によるフラッター解析に用いて、本立体フラッター解析の結果と対比することになる。

#### (2) 解析結果

a) 平板翼の非正常揚力・モーメントのみを考慮した場合

解析では、換算振動数  $k (= \omega_R b / U)$  をパラメーターとして複素固有値解析を施しており、求められた複素振動数の実部の小さい順に複素平面 ( $f_R - f_I$ ) にプロットすると、ねじれ振動を伴うモードの場合については、実部、虚部ともに比較的大きく変化し、一般的に左回りの軌跡が描ける。このような風速の変化に応じて軌跡を描ける各振動モードのグループを分枝とよぶことにする。

複素固有振動数の実部、虚部の風速に対する変化状況を書き直すと、それぞれ Fig. 3, Fig. 4 となる。各風速

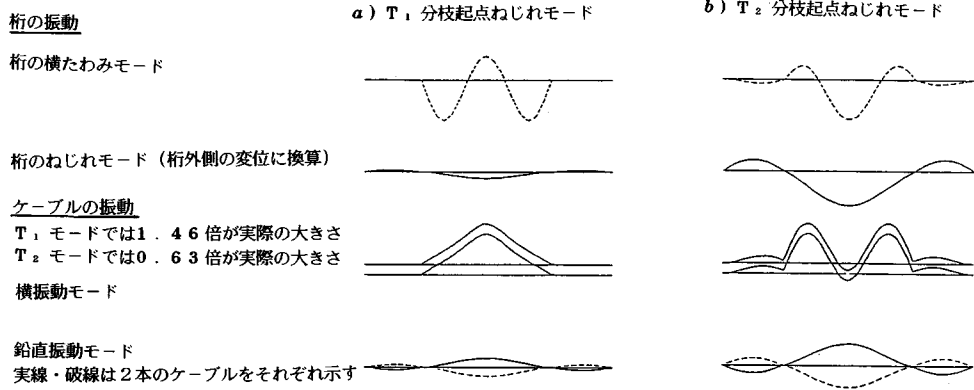


Fig. 2 Two examples of torsional normal modes.

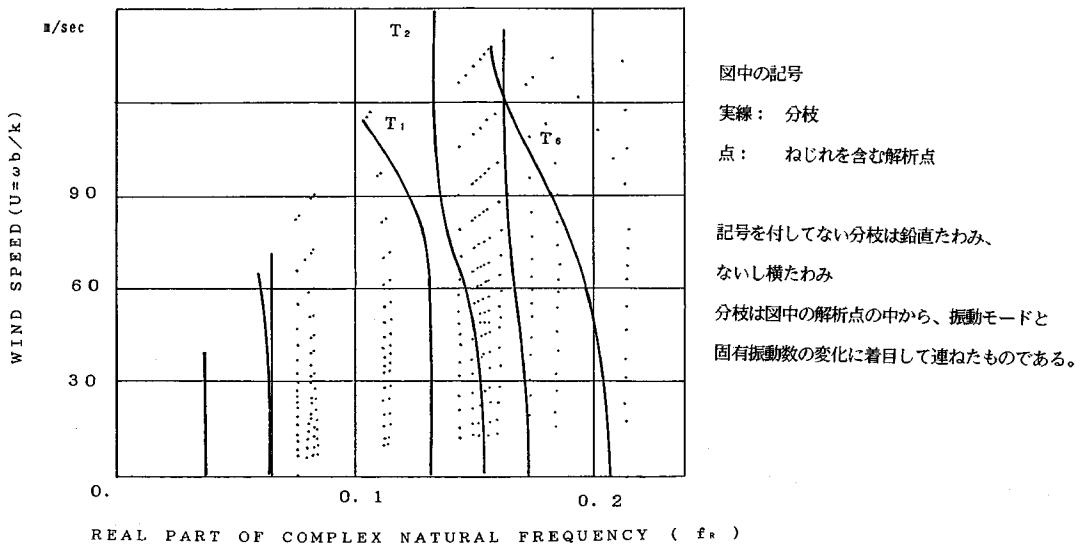
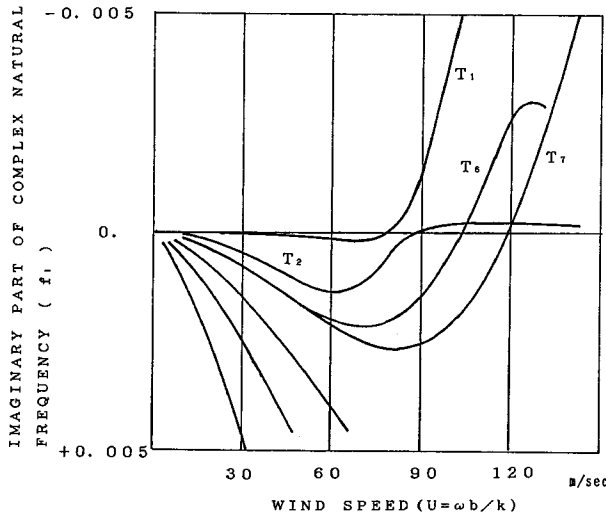


Fig. 3  $U-f_r$  diagram of complex natural frequencies.

ごとの空力減衰効果を表わすと考えられる虚部の変化をみると、特に、ねじれ振動を伴う各分枝ごとに風速の増大とともに初めは正側に増すが、やがて減少し、負側に転じて増大するパターンが一般的である。すなわち、ねじれ振動を伴う振動モード分枝においてある風速を境にして空力減衰が正から負に転じる特徴が明らかに認められる。結局、虚部が0となる風速では調和振動が保持され、各モードに応じたフラッター発生の限界をなすものと考えられる。したがって、このようなねじれ振動を伴う各振動モード分枝ごとに定まる限界風速のうち、最も低い風速が求められるべき曲げねじれフラッター風速  $U_F$  であり、これを与える振動モードがフラッターモードになるとみることができる。また、Fig. 3 から、同じ振動モード分枝の限界風速に対応する実部を読み取れば、フラッター振動数が定まることになる。

ねじれ振動を伴う各振動モード分枝ごとに定まる限界風速を Fig. 4 から読み取り一覧すると、Table 2 のようになる。ここで用いる記号  $T_1, T_2, \dots$  は、無風時の固有振動解析結果についてねじれ振動を伴う低次数の対称、あるいは逆対称振動モードを区分するためのものである。これらの振動モードを起点として、風速の増大とともに非常空空気力の作用により、振動数、および振動モード形が変化するが、これらの変化は前後の関係を考慮して結んでいる。もっとも、風速の変化に伴うグループ間の関係は、薄いもので、在来のフラッター解析法におけるフラッター振動形が無風時の固有振動形と不変であるとの仮定に対比させるために、便宜的に呼称している過ぎない。

Table 2 には、各分枝の起点となる無風時の固有振動解析結果の対称  $T_1, T_2$ 、逆対称  $T_6, T_7$  モード形 (いず



記号を付してない分枝は鉛直たわみ、  
ないし横たわみ

Fig. 4  $U$ - $f_i$  diagram of complex natural frequencies.

Table 2 Estimation by present method and Selberg's.

起点 (無風時) 振動モード	本解析法による推定値		Selberg式による推定値 (鉛直たわみモード)
	構造減衰無視	構造減衰 ( $\delta=0.02$ )	
$T_1$ (対称1次)	79.2 m/sec	82.5 m/sec	61.0 m/sec ( $B_1$ )
$T_2$ (同上)	85.7 m/sec	発生せず	74.0 m/sec ( $B_1$ )
$T_6$ (逆対称1次)	103.4 m/sec	107 m/sec	103.9 m/sec ( $B_2$ )
$T_7$ (同上)	119.3 m/sec	123 m/sec	120.6 m/sec ( $B_2$ )

れも補剛桁については1次モード形とみなせるもの)に対応する Selberg 式によるフラッター風速の計算値を示す。このとき用いる鉛直たわみ振動モード形は、それぞれ対称1次  $B_1$ 、逆対称1次  $B_2$  モード形とした。また、構造減衰の効果を調べた結果についてもあわせて示す。Fig. 4の虚部  $f_i$  値を空力減衰係数  $g_a=2f_i/|f|$  に変換し、さらに構造減衰 (対数減衰率  $\delta=0.02$ ) の効果の寄与分を横座標軸をシフトさせることによって、改めて限界風速を読み取れば求められる。空力減衰係数の風速による変化が急に立ち上がる場合には、構造減衰の効果は小さいが、 $T_2$  分枝ではフラッターの発生がなくなるの結果となっている。

いずれにしても、このトラス桁については、本解析法によるフラッター限界風速は対称形の  $T_1$  分枝によって与えられる、 $T_2$  分枝では若干の構造減衰の存在によって発生しなくなる、逆対称形の分枝のものはかなり高い、ことがわかる。これらの本解析法による結果に対応する従来の Selberg 式による計算値は、逆対称形ではほぼ一致するのに対し、対称形ではかなり低く求められる。この差異は、ねじれ、鉛直たわみの逆対称形の固有振動モード形には他の変位自由度との構造的な連成性が小さかったが、フラッター振動モード形についても同様である、他方、ねじれの対称形の固有振動モード形には、桁、なら

びにケーブルの横たわみが大きく連成し、しかもこの連成性が風速の増大とともに変化する特性がある、ことに強く関係するものと考えられる。すなわち、従来の Bleich ら<sup>2)</sup>による吊橋の曲げねじれフラッター解析における前述の大前提に従う限り、上述の逆対称形モードの限界風速がほぼ等しく求められるのは当然のことである。他方、対称形モードについては本来 Bleich らの大前提が成り立たないのであるから両者が一致しないことも、また、当然のことと考えられる。それでは、なぜ、本解析法による対称形モード分枝の値の方が高く定まるかであるが、曲げねじれ連成フラッターの発生は構造系の慣性力、弾性力と作用する非定常空気力との複雑な相関関係の結果誘起されるものであるから、対称形モードにおける強い構造的連成性の存在、ならびに風速に応じたその連成性の変化が構造特性に応じてフラッター限界風速の増大、または低下を招いているといえるものの、その原因究明は明らかではない。フラッター発生時の複素 (固有) 振動モード形  $T_1$ 、および  $T_2$  分枝によると、単なる形状の差異からこの原因を探ることは難しい。定性的には、横たわみが大きく連成することに伴う見掛けの極慣性モーメントの増大とか、連成変位モード間、ならびに橋軸方向に存在する位相差 (その大きさ、および時間に伴う変化率) が関係しているためと考えられる。

本解析法と Selberg 式による値が等しくなる逆対称形モード分枝におけるねじれと鉛直たわみの位相差が比較的小さく、橋軸方向の分布における変化も小さいのに対し、対称形モード分枝における位相差はかなり大きく、しかも橋軸方向の分布における変化も大きいことが特徴的である。この点が対称形モード分枝の限界風速の算定値を従来法による値よりも大きくした1つの原因と考えられる。

ここで対象としたトラス桁の最小限界風速は  $T_1$  モード分枝によって与えられるが、先に示した無風時の固有振動解析結果にみられるように、この  $T_1$  モードは桁のねじれ振動が卓越するというよりも、ケーブルの横たわみが大きく現われ、わずかに桁がねじれるというモード形をなしている。立体骨組解析法を用いずに、ねじれに関する平面固有振動解析を行うと、この  $T_1$  モードは存在せず、最低次の振動モードとしては  $T_2$  モードに相当するものが算出される。本解析法によってはじめて  $T_1$  モード分枝のフラッター限界風速が導かれ得、通常のねじれ固有振動解析結果を用いて Bleich あるいは Selberg の式によるフラッター解析を施す方法ではこの最小限界風速は無視されてしまうことになる。

**b) 桁、ケーブルの準定常抗(揚)力を併せ考慮した場合**

桁に作用させる平板翼の非定常揚力、モーメントに加えて、桁とケーブルの横たわみ振動に伴う抗力、ならびにケーブルの鉛直たわみ振動に伴う揚力を準定常的に表わしたものを作用させ、解析した結果をここに示す。この解析は、対称形モードにおいてねじれに伴う桁、ケーブルの横たわみ振動の連成が著しいことがわかっているが、このような連成振動に伴い重ねて作用されることになる付加(非定常)空気力の効果について考慮するために行うこととした。

前項(1)に述べた桁への非定常揚力、モーメントのみの作用によるフラッター限界風速が、付加空気力によってどのように変化するかを調べるために、パラメータの換算振動数  $k$  をある狭い範囲に限って解析した。その結果求められた風速  $U$  と複素振動数の虚部  $f_i$  の関係図が Fig. 4 と同様に求められる。各モード分枝のグループ化は前項の解析結果にならって行っている。各モード分枝におけるフラッター限界風速を読み取ると

Table 3 のようになる。予想どおり、付加空気力による正減衰効果のためにフラッター限界風速が、特に対称形モード分枝について、増大することとなった。これは、対称形モードにおいては桁、ケーブルの連成横たわみ振動が大きいため効果が大きく働き、他方、連成がほとんどみられない逆対称形モードにおける増大はわずかであることを示している。また、対称形でも  $T_2$  モード分枝では、前項でわずかな構造減衰によってもフラッターの発生がなくなることをみたように、付加空気力によって常識的な風速範囲では発生しないといえる結果となっている。

**4. 横たわみを考慮した解析結果**

**(1) 横たわみを伴うフラッター解析法**

横たわみを考慮した解析の基本は2. に述べた理論と同じである。すなわち、式(7)における剛性マトリックス  $K$  の代わりに変形後の剛性マトリックス  $K'$  を用いて、立体骨組フラッター解析を施せばよい。しかし、具体的な計算において、変形後の剛性マトリックス  $K'$  は風速の二乗  $U^2$  に比例する風荷重による変形と部材力によって決定されるので、係数マトリックスを換算振動数  $k$  のみの関数とした定式化の便宜さが損なわれることになる。そこで、以下の解析では、風荷重による横たわみを求める静的解析とフラッター解析を分けて行う方法をとることとした。すなわち、まず、フラッター限界風速を仮定し、この風速に対する静的解析を行う。次に、この結果により変形後の剛性マトリックス  $K'$  を定め、これを式(10)に代入してフラッター解析を施す。これから求められるフラッター限界風速が仮定値と異なれば、さらに収束計算を繰り返すという方法である。また、変形後の剛性マトリックス  $K'$  が定まると、変形した状態の固有振動解析が可能になる。これにより、変形しない状態との対比、また横たわみした状態でのフラッターの発生と構造的連成性の関連を考察することができることになる。

**(2) 解析結果**

**a) 変形後の固有振動解析**

風荷重として、桁へは3分力、ケーブル、および塔へは抗力のみを考えた。なお、ハンガーへの抗力はここでは省略し、風速には鉛直分布を考えていない。変形後の

Table 3 Critical wind speed with/without additional wind force.

起点(無風時) 振動モード	付加空気力を考慮しない場合	付加空気力を考慮した場合
$T_1$ (対称1次)	79.2 m/sec (0.126 Hz)	86.5 m/sec (0.129 Hz)
$T_2$ (同上)	85.7 m/sec	発生せず
$T_6$ (逆対称1次)	103.4 m/sec	105.8 m/sec
$T_7$ (同上)	119.3 m/sec	120.0 m/sec

Table 4 Change of natural frequencies as wind speed.

風速 (m/sec)		0	50	70
横たわみ卓越モード	対称1次	0.0365 Hz	0.0363 Hz	0.0362 Hz
	逆対称1次	0.0755 Hz	0.0752 Hz	0.0748 Hz
鉛直たわみ卓越モード	対称1次	0.0641 Hz	0.0630 Hz	0.0597 Hz
	逆対称1次	0.0648 Hz	0.0642 Hz	0.0622 Hz
ねじれを含むモード	T <sub>1</sub> (対称1次)	0.132 Hz	0.132 Hz	0.132 Hz
	T <sub>2</sub> (対称1次)	0.154 Hz	0.153 Hz	0.151 Hz
	T <sub>6</sub> (逆対称1次)	0.207 Hz	0.207 Hz	0.207 Hz
	T <sub>7</sub> (逆対称1次)	0.238 Hz	0.235 Hz	0.227 Hz

Table 5 Comparison of critical wind speed.

参照モード 起点モード	Selberg式による推定		立体フラッター解析		
	エネルギー法	立体骨組み法	横たわみ変形無視		変形考慮
	従来法(たわみは1次モード)		平板翼空気力のみ	平板翼空気力+付加空気力	
T <sub>1</sub>		61.0 m/sec	79.2 m/sec	86.5 m/sec	72.5 m/sec
T <sub>2</sub>	74.0 m/sec	74.0 m/sec	85.7 m/sec	発生せず	

剛性マトリックス  $K'$  については、変形位置で初期軸力を有する部材に関する剛性マトリックスを求め充てている。

このようにして得られる風荷重を載荷して変形後の固有振動数、固有振動モードと、Fig.2に示した無風時の固有振動数、固有振動モードを比較すると特徴的な差異が見出される。まず、固有振動数の変化について、風速  $U=0, 50, 70$  m/sの結果を比較するとTable 4のようになる。この表から、変形とともに固有振動数は不変か、低下することがわかる。特に、対称1次の鉛直たわみモード形の低下が著しい。ねじれに関しては、前節の解析で最小のフラッター限界風速を与えた  $T_1$  モードでは不変である。

b) 変形後のフラッター解析

変形後の剛性マトリックス  $K'$  を用い、(1)に述べた方法でフラッター解析を行うが、質量マトリックスと平板翼の非定常空気力マトリックスは変形前と同じものを使い、変形に伴う空気力特性の変化については考慮しないものとする。ケーブル、桁への付加空気力は重ねて作用させることとする。

Table 3に示したように、トラス桁に付加空気力を重ねた場合の最小のフラッター限界風速は  $T_1$  モード分枝による  $U_F=86.5$  m/sであった。そこで、収束計算の第1ステップとして  $U=80$  m/sに対する静的解析、続いてフラッター解析を行った。フラッター限界風速は複素振動数の虚部  $f_i$  と風速  $U$  の関係として得られ、収束計算の結果、このトラス桁に関する変形した状態のフラッター限界風速が最終的に  $U_F=72.5$  m/sのように求められた。いずれも変形を無視した解析結果における  $T_1$  モード分枝に相当する振動モードであった。3.(2)で

Table 6 Coupling of  $T_1$  normal mode.

自由度の最大振幅比	フラッター発生前		フラッター発生時	
	変形無視	変形考慮	変形無視	変形考慮
風速 50.0 m/sec			86.5 m/s	72.5 m/s
鉛直たわみ/ねじれ	10.56	10.88	33.1	25.16
横たわみ/鉛直たわみ	8.035	6.67	0.36	0.18
横たわみ/ねじれ	84.84	72.72	11.9	4.45
固有振動数 (Hz)	0.138	0.132	0.126	0.116

示した横たわみ変形を無視した解析結果を再掲して比較するとTable 5のようになる。

さて、風荷重による静的変形を考慮すると、曲げねじれフラッター限界風速は低下することとなった。しかし、フラッター振動モード形は変形を無視した場合と同じタイプのものであった。この限界風速低下の原因について若干の考察を行ってみると以下のようなになる。

まず、前項で述べた変形状態の固有振動数の変化特性について考えてみる。ねじれの  $T_1$  モードの値は不変であったのに対し、鉛直たわみの  $B_1$  モードの値はかなり低下した。ちなみに、従来のフラッター解析法であるSelbergの式による限界風速を変形状態の固有振動数を用いて算出してみると、風速が増大して変形が増すとともに鉛直たわみモードの固有振動数が低下することにより、ねじれとの振動数比は風速とともに増大し、結局、限界風速は上昇することになる。したがって、限界風速低下の原因は固有振動数の変化特性ではなく、変形に伴う振動モード形の変化特性、ならびに作用する非定常空気力の風速に対する変化特性の相乗効果に起因すると考えられる。この間の事情を調べるために、変形した状態のフラッター振動モード形と変形を無視した場合のモード形とを比べる手法として、桁の鉛直、横たわみ、およびねじれの連成振動振幅の相互比を求めてみるとTable 6のようになる。この比較ではフラッター発生時のフ



フラッター振動形には大きな差異は認められない。ところで、フラッター発生時の連成振動の卓越性を調べてみると、曲げねじれフラッター本来の性質から鉛直たわみとねじれの振幅比が大きいことが目につく。そこで、フラッター発生以前の低い風速  $U=50$  m/s における振動モード形について同じ振幅比を調べてみると、同じ表中に示すように、変形を無視、または考慮した場合ともに大差はなく、フラッター発生時よりもかなり小さい。このことから、基本的に、フラッター発生風速に近づくとともにねじれに対する鉛直たわみの連成性が急激に強まる特性があるので、風荷重による変形が存在すると固有振動モード形におけるねじれと鉛直たわみの連成度が強まるとの特性を受けて、結果として、フラッターの発生が変形によって相対的に低い風速で誘起されることになったと考えることができる。さらに、桁の横たわみの連成度が変形を考慮した方が若干下まわっていることがわかるが、付加空気力（桁の横たわみ振動に伴う非定常抗力）の正減衰効果を相対的に小さくするように働いて、これまた、フラッターの発生風速を相対的に低下させることになったと考えられる。

## 5. 結 論

長大吊橋の耐風性の良否を検討する際に、しばしば平板翼の非定常空気力を用いて解析した曲げねじれフラッターの限界風速が指標とされるが、その算定法について立体骨組フラッター解析法を誘導し、特に強風時の変形した状態における曲げねじれフラッター発生に関する検討を行った。本解析法を超長大吊橋（トラス桁を有する2000 m級吊橋）に適用して求められた結果、ならびにそれらの考察結果をまとめると以下ようになる。

(1) 長大吊橋の曲げねじれフラッターについて、立体骨組モデルを用いた複素固有値解析を施すと、発生するフラッター、特にフラッター振動モード形について従来法における曖昧さが解決される。特に、吊橋系の複雑な振動特性、すなわち構造的連成性の効果を明確に評価できることになる。

(2) ここで対象とした2000 m級吊橋では、対称形モードの曲げねじれフラッターの限界風速が最小となるが、本解析法による値は従来法（Selbergの式）による値よりもかなり高く求められる。この原因として、フラッター振動モード形の複雑な構造的、ならびに空気力学的連成性、および各変位モード間、橋軸方向の位相差特性の寄与が大きいことがわかる。ちなみに、構造的連成度の小さい逆対称形モードの限界風速は両法ともほぼ等しく求められる。したがって、フラッター振動モード形を無風時の固有振動モード形と仮定する従来法による算出結果は、対称形モードに関する限り正しくないとい得

る。

(3) 上の(2)に関連して、最小の限界風速を与える対称モードは、立体骨組解析法を適用して初めて認められるモードで、ケーブルの横たわみ振動にひきずられて若干のねじれが連成するタイプのものである。平面骨組解析法によると、このモード形は求められず、最低次対称モード形は立体骨組法による第2次モードに相当するものとなる。この意味から、従来法による限界風速は相対的に高い値が算出されることになって危険側となる。

(4) 平板翼の非定常揚力、モーメントに加えて、連成する横たわみ振動などに基づく付加空気力（準定常的に表わす）を考慮すると、その正減衰効果によってフラッター限界風速は増大する。

(5) 曲げねじれフラッター解析の従来法では、最小の限界風速（対称形モード）として、本解析によって算出される第2位の相対的に高い値に相当するものを与えることになる。しかも、その値は本解析法による第1位の最小限界風速を下まわるのが一般的である。この点で、従来法のSelberg式による算定は、対称形モードに関する限り、正確な検証を行っていないことになるといえる。ただし、本解析法を風荷重により変形した状態に適用すると、フラッター限界風速は低下することとなった。この横たわみ変形に伴い低下した限界風速値を見ると、ここで対象とした例では、上述の従来法による算出値にほぼ等しくなっている。

いずれにしても、これらの結論、考察結果は解析に基づくものに過ぎず、実際的には、よりよく相似して製作された全橋模型による風洞試験で検証することが肝要であろう。このことは、解析ではあくまでも平板翼の非定常空気力を仮定しており、実橋断面の非定常空気力（特に、曲げとねじれの連成成分を含む）が与えられない状況を解決する現実的な方法でもあるといえよう。

本研究の一部は本州四国連絡橋公団からの委託研究費により実施された。ここに深甚なる謝意を表す。

本研究の計算処理の一部は東京大学大型計算機センターで実施した。

## 参 考 文 献

- 1) 宮田利雄・岡内 功・白石成人・成田信之・奈良平俊彦：明石海峡大橋の耐風性に関する予備的検討，土木学会構造工学論文集，Vol. 33 A, 1987.
- 2) Selberg, A. : Oscillation and Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, ACTA Polytech, Scan., Ci 13, 1961.
- 3) Bleich, et al. : The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, Dept. of Commerce, U.S. Gov. Print Office, 1950.

(1988. 4. 18・受付)