

薄肉長方形断面を有する空間曲線ばりの有限変位理論

FINITE DISPLACEMENT THEORY OF CURVED AND TWISTED
THIN-WALLED BOX GIRDERS

表 輝幸*・平嶋政治**・依田照彦***

By Teruyuki OMOTE, Masaharu HIRASHIMA and Teruhiko YODA

The objective of this paper is to develop a consistent one-dimensional finite displacement theory of curved and twisted thin walled box girders, with emphasis on the derivation of finite displacement fields in which the profile deformation and warping displacement are fully examined. The resulting displacement fields are considered to be accurate in the sense that all the second-order terms with respect to the distortional displacement and warping displacement are taken into account.

On the basis of the displacement fields, equilibrium equations and associated boundary conditions are derived from the principle of virtual work.

The validity of the governing equilibrium equations is verified by comparison with currently accepted equilibrium equations for typical cases. In addition, attention is paid on the mode of profile deformation in view of the results of finite element method.

Keywords: thin-walled curved beams, finite displacement theory, profile deformation

1. ま え が き

近年、鋼構造要素として薄肉曲線構造部材が多く使われるようになってきた。このような部材の設計計算にあたっては、曲率の変化を無視し近似的措置を講じていたり、断面変形の影響を無視し単純化しているものが多く、技術の進歩に合わせた高精度の構造解析の必要性が高まっている。

通常の薄肉曲線部材では、断面変形の影響は一般に小さいと考えられるため、薄肉断面部材は変形後も断面形状は変形前の形状を保持するという仮定に立つ曲げねじり理論が使用されている。この仮定を基礎に、微小変位問題や有限変位問題を扱った研究は多い^{1)~11)}。

一方、はり理論の範囲で断面変形の影響を扱った研究は比較的少ない。薄肉平面曲線ばりの微小変位理論のうち、薄肉直線ばりの微小変位理論に関しては、Vlasov¹⁾、Janssen・Veldpaus²⁾の研究がある。これらは一般化座標法を用いているため、一貫性を欠くなどの欠点がある。この欠点を明確な仮定のもとに補正した研究として西

野・長谷川・名取¹³⁾の研究がある。また、薄肉円弧ばりの微小変位理論として平嶋・依田・峯岸¹⁴⁾の研究がある。しかしながら、薄肉構造部材の断面変形の影響を考慮した有限変位理論に関しては、高島^{15), 16)}の研究がある程度で、検討すべき問題点が残されている。

薄肉断面ばりの有限変位理論では三次元的な断面のそりを棒理論で正確に評価することが難しく、そり変位に関するかぎり厳密な有限変位場は求められていない。一般に、非線形問題では、そり関数は変形に依存するとされており、文献11)では断面剛の仮定を変位後の横断面内の相対変位成分が零と解釈し、従来の理論より精度の高い、統一のとれた2次の有限変位場を求めている。このような断面変形を考慮しない有限変位理論においては、断面剛の仮定からそり変位を決定することができる。しかしながら、断面変形を許した理論においては、断面変形によるそり変位をも考慮する必要があり、長方形薄肉断面ばりでは、ねじれによるそり変位に比べて断面変形によるそり変位ははるかに大きくなる¹³⁾。

本報告の目的は、閉断面をもつ薄肉断面ばりの、断面変形を考慮できる一次元有限変位理論を展開することにある。変位法に基づく解析においては変位場の設定が重要である^{2), 5)}。ここでは理論の本質を失わない範囲で取扱いを簡単にするため、二軸対称の長方形薄肉断面ばり

* 正会員 JR 東日本(株)(前・早稲田大学大学院修士課程)

** 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科
(〒160 新宿区大久保 3-4-1)*** 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科
(同上)

をとりあげる。部材形状としては、初期曲率と初期ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材を対象とし、妥当なひずみ場の仮定を基礎に、断面変形の影響を含む、一次元はり理論に適合する有限変位場を誘導した。そり変位の決定に際しては、はりの曲げ問題で考えられているはり軸方向へのせん断変形に関する仮定をねじれ変形と断面変形が生ずる場合に拡張し、これを用いて部材軸のねじれおよび断面変形によるそり変位を求め、それぞれのそり関数が変形に依存することを示した。

次に、得られた有限変位場をもとに、仮想仕事の原理を用いて断面変形を考慮した薄肉空間曲線ばりのつり合い式と境界条件を求めた。ここに求められた支配方程式は、有限変位・有限回転および断面変形を生ずる問題に適用できる。また、実際の計算への適用を考え、求められた有限変位理論の支配方程式に対する線形理論を述べ、従来の研究との比較を行い、既往の断面変形を考慮した理論におけるつり合い式は、本文で導かれたつり合い式に含まれることを示した。さらに、断面変形の影響を無視すれば、そりの高次微小項を除いて、既往の有限変位理論におけるつり合い式をも含むことを示した。

2. 仮定・座標系・変形前の幾何量

断面変形を考慮したはり理論の基礎方程式を導くにあたり、本論では次の仮定を用いた。

- (i) ひずみは1に比べて微小であるが、変位成分の微係数の2次の微小項は必ずしも無視し得ない。
- (ii) 板厚中心線は伸び縮みしない。断面内において板厚中心線に垂直な線素は変形後も板厚中心線に対し直角を保つ。
- (iii) 薄板要素の板厚中心面に垂直な面内でのせん断ひずみは小さく、無視し得る。
- (iv) 板厚中心面内のせん断ひずみのうち、直応力や分布外力とつり合い状態にあるせん断応力によるせん断ひずみは小さく、無視し得る。

Fig. 1 に示すような、板幅 $2b$ 、板厚 t_2 のフランジと板幅 $2h$ 、板厚 t_1 のウェブをもつ二軸対称の薄肉箱形空間曲線ばりを考える。部材軸をその空間曲線ののり平面が部材の横断面と一致するように選ぶ⁴⁾。この部材軸と横断面の交点を S (図心) とすれば、 S 点における部材軸の接線と横断面の主軸が互いに直交する局所デカルト座標系 (y_1, y_2, y_3) が選べる。 y_1 軸は部材軸の接ベクトルの方向と一致し、対称軸 y_2, y_3 は部材軸からの距離を表わす直線軸である。

さらに、部材内の任意点の位置を記述するために、2つの座標系を導入する。その1つは局所デカルト座標系 (z_1, z_2, z_3) であり、 z_1 の方向は y_1 の方向と一致している。他の1つは曲線座標系 (ζ, s, n) である。

ここに、 ζ は部材軸に沿ってとった座標、 s は横断面の板厚中心線に沿ってとった座標であり中心線上の任意点 Q に原点をもつ。また、 n は板厚中心線を原点とし、 s 座標に垂直な座標である。なお、本報告では座標系はすべて右手系とする。

部材軸の接線方向の単位基底ベクトルを \hat{e}_1 とし、横断面内の対称軸 y_2, y_3 方向の単位基底ベクトルとして、 \hat{e}_2 と \hat{e}_3 を導入する。このとき、Frenet-Serret の公式より、 ζ による微分法則は次の式で定義できる。

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{e}}_{1,\zeta} \\ \dot{\hat{e}}_{2,\zeta} \\ \dot{\hat{e}}_{3,\zeta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $(\cdot)_{,\zeta}$ は ζ に関する微分を示し、 x_1 は初期ねじれ率、 x_2, x_3 は初期曲率であり、これらは一定でなく ζ の関数であるとする。

板厚中央面上の位置ベクトルは、Fig. 1 より、部材軸の位置ベクトル \hat{x} を用いて、

$$\hat{r}(\zeta, s) = \hat{x}(\zeta) + \hat{s}(\zeta, s) \dots\dots\dots (2)$$

と表わせる。ここに、

$$\hat{s} = \hat{y}_2 \hat{e}_2 + \hat{y}_3 \hat{e}_3 \dots\dots\dots (3)$$

であり、 $(\hat{\cdot})$ は板厚中央面上の値を示す。

部材軸ののり平面すなわち横断面内にある、変形前の中央面上の基底ベクトル \hat{a}_3 は、

$$\hat{a}_3 = -\hat{y}_{3,s} \hat{e}_2 + \hat{y}_{2,s} \hat{e}_3 \dots\dots\dots (4)$$

とかける。ここに、 $(\cdot)_{,s}$ は s に関する微分を示す。

$$\text{式(4)より、部材内の任意点の位置ベクトルは、} \\ \mathbf{r} = \hat{r} + \hat{a}_3 n \dots\dots\dots (5)$$

と表わせる。したがって、式(5)を ζ, s, n で微分することにより、変形前の任意点の基底ベクトルは次のように求まる。

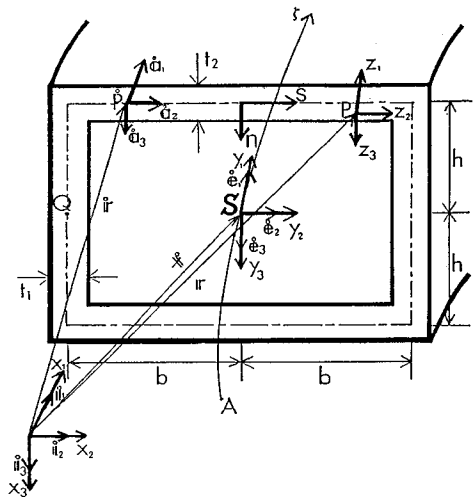


Fig. 1 Curved and twisted thin-walled box girder.

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_{,s} = \sqrt{g} \mathbf{e}_1 - x_1 y_3 \mathbf{e}_2 + x_1 y_2 \mathbf{e}_3 \dots\dots\dots (6 \cdot a)$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_{,s} = \dot{y}_{2,s} \mathbf{e}_2 + \dot{y}_{3,s} \mathbf{e}_3 \dots\dots\dots (6 \cdot b)$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{r}_{,n} = -\dot{y}_{3,s} \mathbf{e}_2 + \dot{y}_{2,s} \mathbf{e}_3 \dots\dots\dots (6 \cdot c)$$

ここに、 $(\)_{,n}$ は n に関する微分を表わし、

$$\sqrt{g} = 1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$y_2 = \dot{y}_2 - \dot{y}_{3,s} n \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

$$y_3 = \dot{y}_3 + \dot{y}_{2,s} n \dots\dots\dots (7 \cdot c)$$

である。

3. 有限変位場

変形後の任意点 P の位置ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ は、全変位ベクトルを \mathbf{V} とすれば、

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{V} \dots\dots\dots (8)$$

と表わせる。

全変位ベクトル \mathbf{V} を基準状態である変形前の基底ベクトルの成分に分けて考えると、

$$\mathbf{V} = w \mathbf{e}_1 + u \mathbf{e}_2 + v \mathbf{e}_3 \dots\dots\dots (9)$$

とおける。本報告では、横断面内の任意点の全変位を、平面保持則に従う変位、部材軸回りのねじれによる変位、断面変形による変位、そり変位に分けて考察する。

すなわち、任意点 P の全変位ベクトル \mathbf{V} は次のようにかける。

$$\mathbf{V} = \bar{v} + \bar{v} + \hat{v} + w \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 \bar{v} 、 \bar{v} 、 \hat{v} 、 w はそれぞれ、平面保持則に従う変位ベクトル、部材軸回りのねじれによる変位ベクトル、断面変形による変位ベクトル、ねじれおよび断面変形によって生じるそりに伴う変位ベクトルである。Fig. 4 に示すように、 \bar{v} により点 S は S' に移動し、変形前の単位基底ベクトル \mathbf{e}_i は単位基底ベクトル $\bar{\mathbf{e}}_i$ となる。さらに、 \bar{v} により $\bar{\mathbf{e}}_i$ は単位基底ベクトル $\bar{\mathbf{e}}_i$ となる。したがって、 \mathbf{e}_i から $\bar{\mathbf{e}}_i$ への変換行列、 $\bar{\mathbf{e}}_i$ から $\bar{\mathbf{e}}_i$ への変換行列、 \mathbf{e}_i から $\bar{\mathbf{e}}_i$ への変換行列はそれぞれ次のように定義できる^{9),10)}。

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \Phi_{im} \mathbf{e}_m \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \psi_{im} \bar{\mathbf{e}}_m \dots\dots\dots (11 \cdot b)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_i = D_{im} \mathbf{e}_m (= \psi_{ik} \Phi_{km} \mathbf{e}_m) \dots\dots\dots (11 \cdot c)$$

次に、Fig. 3 に示す角変化 $\psi(\xi)$ で表わされる断面変形量を用いて、断面変形 \hat{v} による変換行列を表わす。断面変形を許すと s 方向には変位 ξ が生じ、長方形薄

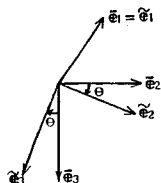


Fig. 2 Angle of torsion.

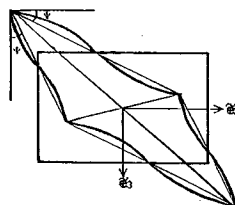


Fig. 3 Angle of distortion.

肉断面の隅角部を剛結とすると構成要素の板曲げによって n 方向には変位 η が発生する。薄板に関する仮定を考慮すれば、変位 ξ 、 η は次のように表わせる (具体的な誘導は 6. (2) に示す)。

$$\xi = |h_m + 2n(y_{3,s}^2 - y_{2,s}^2) - n\alpha_s| \tan \phi \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

$$\eta = (h_{s1} + a) \tan \phi \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

ここで、 h_m 、 h_{s1} は次のように定義される断面上の位置に依存する量である。

$$h_{s1} = y_2 y_{2,s} - y_3 y_{3,s} \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

$$h_m = y_2 y_{3,s} + y_3 y_{2,s} \dots\dots\dots (13 \cdot b)$$

また、 α は s のみの関数で、長さの次元をもつ量である。 y_2 、 y_3 と s 、 n の幾何学的関係を考慮すると、式 (12) の結果から断面変形に伴う座標変換式は次のように表わせる。

$$\hat{y}_2 = (y_3 - 2y_2 y_{2,s} n - y_2 y_{3,s} n \alpha_s - y_{3,s} \alpha) \tan \phi + y_2 \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

$$\hat{y}_3 = (y_2 + 2y_3 y_{2,s} n - y_{3,s} n \alpha_s + y_{2,s} \alpha) \tan \phi + y_3 \dots\dots\dots (14 \cdot b)$$

このように、本報告では、ねじれを基底ベクトルの交換で考慮し、断面変形を位置ベクトルの交換で考えたため、ねじれおよび断面変形による有限回転の合成が可能となった。

一方、そり変位は近似的に $\bar{\mathbf{e}}_1$ 方向へ生ずるものと仮定すれば、

$$w = w_p \bar{\mathbf{e}}_1 \dots\dots\dots (15)$$

とおける。 w_p については、変形によるねじれ率 $\bar{\Gamma}_\theta$ 、断面変形の軸方向の変化率 Γ_ψ とそれらのそり関数を用い、

$$w_p = -\omega \bar{\Gamma}_\theta - \omega_1 \Gamma_\psi \dots\dots\dots (16)$$

と表現する。ここに、 ω 、 ω_1 は文献 10) と同様の手法で以下のように求まる。

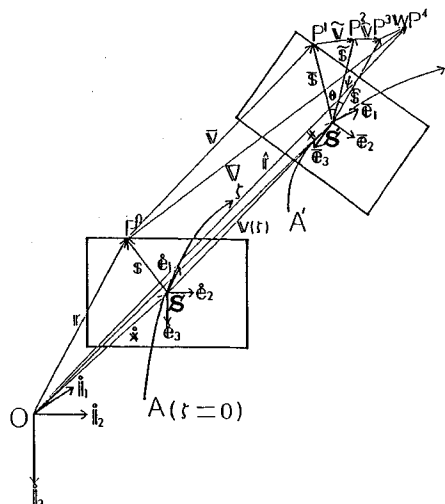


Fig. 4 Displacement vectors.

$$\omega = \frac{h_s + y_2 v_n^3 - y_3 v_n^2 + (y_3 v^2|_\xi - y_2 v^3|_\xi)(v_n^1 - y_{2n} v^2|_\xi - y_{3n} v^3|_\xi)}{\sqrt{\dot{g}}} \cdot n$$

$$+ \sqrt{g} \int_{s_0}^s \left\{ \frac{h_n - y_3 v_s^2 + y_2 v_s^3 + (y_3 v^2|_\xi - y_2 v^3|_\xi)(v_s^1 - y_{2s} v^2|_\xi - y_{3s} v^3|_\xi)}{\dot{g}} \right.$$

$$\left. - \frac{\int h_n - y_3 v_s^2 + y_2 v_s^3 + (y_3 v^2|_\xi - y_2 v^3|_\xi)(v_s^1 - y_{2s} v^2|_\xi - y_{3s} v^3|_\xi) ds}{\int \frac{1}{\dot{g} \sqrt{\dot{g}} t} ds} \cdot \frac{1}{\dot{g} \sqrt{\dot{g}} t} \right\} ds \dots\dots\dots (17 \cdot a)$$

$$\omega_1 = \frac{h_{s1} + \alpha + y_{3\alpha} v_n^2 + y_{2\alpha} v_n^3 - (y_{2\alpha} v^3|_\xi + y_{3\alpha} v^2|_\xi)(v_n^1 - y_{2n} v^2|_\xi - y_{3n} v^3|_\xi)}{\sqrt{\dot{g}}} \cdot n$$

$$+ \sqrt{g} \int_{s_0}^s \left\{ \frac{h_{n1} + y_{3\alpha} v_s^2 + y_{2\alpha} v_s^3 - (y_{2\alpha} v^3|_\xi + y_{3\alpha} v^2|_\xi)(v_s^1 - y_{2s} v^2|_\xi - y_{3s} v^3|_\xi)}{\dot{g}} \right.$$

$$\left. - \frac{\int h_{n1} + y_{3\alpha} v_s^2 + y_{2\alpha} v_s^3 - (y_{2\alpha} v^3|_\xi + y_{3\alpha} v^2|_\xi)(v_s^1 - y_{2s} v^2|_\xi - y_{3s} v^3|_\xi) ds}{\int \frac{1}{\dot{g} \sqrt{\dot{g}} t} ds} \cdot \frac{1}{\dot{g} \sqrt{\dot{g}} t} \right\} ds \dots\dots\dots (17 \cdot b)$$

ここに、 ω は有限変位理論より求まる初期曲率と初期ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材のそり関数であり、変形による部材軸のねじれによって生ずる \bar{e}_1 方向の変位を表わしている。 ω_1 は断面変形を認めたことにより新たに導入された量で断面変形によって生ずる \bar{e}_1 方向の変位を表わしており、 ω と同じように有限変位理論より求まる薄肉空間曲線ばりのそり関数である。なお、式(17)において、 v^i は S 点の基底ベクトル \hat{e}_i 方向の変位成分であり、()_{*} は積分始点上の値を示し、 t は板厚である。また、()| $_\xi$ は ξ に関する共変微分を示す⁹⁾。

さらに、 $\bar{\Gamma}_0$ を変位ベクトル \bar{v} 、 \bar{v} が生じた後の部材軸のねじれ率とし、変形後の部材軸の位置ベクトルを x とすれば、変形による部材軸のねじれ率 $\bar{\Gamma}_0$ は、

$$\bar{\Gamma}_0 = \bar{\Gamma}_0 - \kappa_1 \dots\dots\dots (18 \cdot a)$$

$$= \frac{1}{|x|} [D_{31} D_{21,\xi} + D_{32} D_{22,\xi} + D_{33} D_{23,\xi}$$

$$+ \kappa_1 (D_{22} D_{33} - D_{23} D_{32}) + \kappa_2 (D_{23} D_{31} - D_{21} D_{33})$$

$$+ \kappa_3 (D_{21} D_{32} - D_{31} D_{22})] - \kappa_1 \dots\dots\dots (18 \cdot b)$$

と表わされる¹⁰⁾。式(18)において、変位成分に関し2次の微小項まで考慮したねじれ率を Γ_0 とすれば、

$$\Gamma_0 = \theta_\xi + \frac{1}{2} (v^2|_\xi v^3|_\xi - \frac{1}{2} (v^3|_\xi)^2 v^2|_\xi$$

$$- \frac{1}{2} \kappa_1 [(v^2|_\xi)^2 + (v^3|_\xi)^2] + \kappa_2 v^2|_\xi + \kappa_3 v^3|_\xi \dots\dots (19)$$

を得る。ここに、 θ はねじり角 (Fig. 2 参照) である。また、断面変形の軸方向の変化率 Γ_ϕ は、Fig. 3 に示す角変化 ϕ を用いて、

$$\Gamma_\phi = \phi_\xi \dots\dots\dots (20)$$

と表わされる。

したがって、部材軸の変位ベクトルを v と置けば、Fig. 4 より、任意点 P の全変位ベクトルは、

$$V = v + \bar{s} - s + \bar{\delta} - \bar{s} + \hat{s} - \hat{s} + w_p \bar{e}_1$$

$$= v - s + \hat{s} - (\omega \Gamma_0 + \omega_1 \Gamma_\phi) \bar{e}_1 \dots\dots\dots (21)$$

と表わせる。ここに、

$$v(\xi) = v^i(\xi) \hat{e}_i \dots\dots\dots (22 \cdot a)$$

$$s = y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3 \dots\dots\dots (22 \cdot b)$$

$$\bar{s} = y_2 \bar{e}_2 + y_3 \bar{e}_3 \dots\dots\dots (22 \cdot c)$$

$$\hat{s} = y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3 \dots\dots\dots (22 \cdot d)$$

$$\hat{\bar{s}} = \hat{y}_2 \bar{e}_2 + \hat{y}_3 \bar{e}_3 \dots\dots\dots (22 \cdot e)$$

である。ゆえに、全変位ベクトル V は次式で表わされる。

$$V = v^i \hat{e}_i - (y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3) + (\hat{y}_2 \bar{e}_2 + \hat{y}_3 \bar{e}_3)$$

$$- (\omega \Gamma_0 + \omega_1 \Gamma_\phi) \bar{e}_1$$

$$= v^i \hat{e}_i - (y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3) + (\hat{y}_2 D_{2m} \hat{e}_m + \hat{y}_3 D_{3k} \hat{e}_k)$$

$$- (\omega \Gamma_0 + \omega_1 \Gamma_\phi) D_{1n} \hat{e}_n \dots\dots\dots (23)$$

式(23)における D_{im} について、変位成分 v^i の微係数に対し、3次以上の高次微小項を無視し、仮定(i)より $v^i|_\xi \ll 1$ と置けば、任意点 P の全変位ベクトルは次のように書ける。

$$V = w \hat{e}_1 + u \hat{e}_2 + v \hat{e}_3$$

$$= (v^1 - y_2 \Gamma_2 - y_3 \Gamma_3 - y_{2\alpha} \Gamma_{2D} - y_{3\alpha} \Gamma_{3D} - \omega \Gamma_0 - \omega_1 \Gamma_\phi) \hat{e}_1$$

$$+ (v^2 - y_2 A_2 - y_3 A_3 - y_{2\alpha} A_{2D} + y_{3\alpha} A_{3D} - \omega v^2|_\xi \Gamma_0$$

$$- \omega_1 v^2|_\xi \Gamma_\phi) \hat{e}_2$$

$$+ (v^3 + y_2 B_2 - y_3 B_3 + y_{2\alpha} B_{2D} + y_{3\alpha} B_{3D} - \omega v^3|_\xi \Gamma_0$$

$$- \omega_1 v^3|_\xi \Gamma_\phi) \hat{e}_3 \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

$$\Gamma_2 = \cos \theta v^2|_\xi + \sin \theta v^3|_\xi \dots\dots\dots (25 \cdot a)$$

$$\Gamma_3 = \cos \theta v^3|_\xi - \sin \theta v^2|_\xi \dots\dots\dots (25 \cdot b)$$

$$\Gamma_{2D} = \cos \theta \tan \phi v^3|_\xi - \sin \theta \tan \phi v^2|_\xi \dots\dots (25 \cdot c)$$

$$\Gamma_{3D} = \cos \theta \tan \phi v^2|_\xi + \sin \theta \tan \phi v^3|_\xi \dots\dots (25 \cdot d)$$

$$A_2 = 1 - \cos \theta + \frac{1}{2} v^2|_\xi \Gamma_2 \dots\dots\dots (25 \cdot e)$$

$$A_3 = \sin \theta + \frac{1}{2} v^2|_\xi \Gamma_3 \dots\dots\dots (25 \cdot f)$$

$$A_{2D} = \sin\theta \tan\phi + \frac{1}{2} v^2 |_{\xi} \Gamma_{2D} \dots\dots\dots (25 \cdot g)$$

$$A_{3D} = \cos\theta \tan\phi - \frac{1}{2} v^2 |_{\xi} \Gamma_{3D} \dots\dots\dots (25 \cdot h)$$

$$B_2 = \sin\theta - \frac{1}{2} v^3 |_{\xi} \Gamma_2 \dots\dots\dots (25 \cdot i)$$

$$B_3 = 1 - \cos\theta + \frac{1}{2} v^3 |_{\xi} \Gamma_3 \dots\dots\dots (25 \cdot j)$$

$$B_{2D} = \cos\theta \tan\phi - \frac{1}{2} v^3 |_{\xi} \Gamma_{2D} \dots\dots\dots (25 \cdot k)$$

$$B_{3D} = \sin\theta \tan\phi - \frac{1}{2} v^3 |_{\xi} \Gamma_{3D} \dots\dots\dots (25 \cdot l)$$

であり、また $y_{2\alpha}$, $y_{3\alpha}$ は、

$$y_{2\alpha} = y_2 + 2 y_{3,s} n - y_{3,s} n \alpha_s + y_{2,s} \alpha \dots\dots\dots (26 \cdot a)$$

$$y_{3\alpha} = y_3 - 2 y_{3,s} n - y_{2,s} n \alpha_s - y_{3,s} \alpha \dots\dots\dots (26 \cdot b)$$

と書き表わされる。

4. ひずみ場・応力場

有限変位理論による変位-ひずみ関係式を求めるために、Green のひずみテンソルを導入する。

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{V}_j + \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_j) \dots\dots\dots (27)$$

式 (27) に式 (6), (24) を代入したのち、3 次以上の高次の微小項を無視すれば、薄板の仮定を満たす変位-ひずみ関係式として、

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = & \sqrt{g} \left(\Gamma_1 - y_2 \Omega_2 - y_3 \Omega_3 - y_{2\alpha} \Omega_{2D} - y_{3\alpha} \Omega_{3D} \right. \\ & \left. - \omega \Omega_{\theta} - \omega_1 \Omega_{\psi} + H \Gamma_{\theta} + H_1 \Gamma_{\psi} + R \frac{(\Gamma_{\theta})^2}{2} + R_1 \frac{(\Gamma_{\psi})^2}{2} \right) \dots\dots\dots (28 \cdot a) \end{aligned}$$

$$2 \gamma_{12} = -\frac{\theta}{\sqrt{g}} \Gamma_{\theta} - \frac{\theta_1}{\sqrt{g}} \Gamma_{\psi} \dots\dots\dots (28 \cdot b)$$

$$\gamma_{22} = -n \alpha_{,ss} \psi \dots\dots\dots (28 \cdot c)$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{13} = \gamma_{33} = 0 \dots\dots\dots (28 \cdot d \sim f)$$

が得られる。ここに、

$$\Gamma_1 = v^1 |_{\xi} + \frac{1}{2} (v^2 |_{\xi})^2 + \frac{1}{2} (v^3 |_{\xi})^2 \dots\dots\dots (29 \cdot a)$$

$$\Omega_2 = \Gamma_{2,\xi} - x_2 \sin\theta - x_3 (1 - \cos\theta) - \Gamma_3 \Gamma_{\theta} - x_1 \Gamma_3 \dots\dots\dots (29 \cdot b)$$

$$\Omega_3 = \Gamma_{3,\xi} - x_3 \sin\theta + x_2 (1 - \cos\theta) + \Gamma_2 \Gamma_{\theta} + x_1 \Gamma_2 \dots\dots\dots (29 \cdot c)$$

$$\Omega_{2D} = \Gamma_{2D,\xi} - x_2 \cos\theta \tan\phi + x_3 \sin\theta \tan\phi + \Gamma_3 \Gamma_{\psi} \dots\dots\dots (29 \cdot d)$$

$$\Omega_{3D} = \Gamma_{3D,\xi} - x_2 \sin\theta \tan\phi + x_3 \cos\theta \tan\phi - \Gamma_2 \Gamma_{\psi} \dots\dots\dots (29 \cdot e)$$

$$\Omega_{\theta} = \Gamma_{\theta,\xi} \dots\dots\dots (29 \cdot f)$$

$$\Omega_{\psi} = \Gamma_{\psi,\xi} \dots\dots\dots (29 \cdot g)$$

$$H = \frac{x_1}{\sqrt{g}} [(y_2)^2 + (y_3)^2 + x_2 y_2 \omega + x_3 y_3 \omega] - \omega_{,\xi} \dots\dots\dots (29 \cdot h)$$

$$H_1 = \frac{x_1}{\sqrt{g}} [y_2 y_{2\alpha} + y_3 y_{3\alpha} + x_2 y_2 \omega_1 + x_3 y_3 \omega_1] - \omega_{1,\xi} \dots\dots\dots (29 \cdot i)$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{g}} [(y_2 + x_2 \omega)^2 + (y_3 + x_3 \omega)^2] \dots\dots\dots (29 \cdot j)$$

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} [(y_{2\alpha} - x_2 \omega_1)^2 + (y_{3\alpha} - x_3 \omega_1)^2] \dots\dots\dots (29 \cdot k)$$

$$\begin{aligned} \theta = & n \left\{ (\sqrt{g} + 1) + h_n (\sqrt{g} - \sqrt{g}) \left(2 + \frac{x_2 \dot{y}_{2,s} + x_3 \dot{y}_{3,s}}{\sqrt{g}} \cdot n \right) \right. \\ & \left. + \sqrt{g} \{ y_3 v^2_{,s} - y_2 v^3_{,s} - (y_3 v^2 |_{\xi} - y_2 v^3 |_{\xi}) \right. \\ & \left. \cdot (v^1_{,s} - y_{2,s} v^2 |_{\xi} - y_{3,s} v^3 |_{\xi}) \right\} \\ & - \frac{\int \frac{h_n}{g} ds}{\int \frac{1}{g\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{t} ds} \cdot \frac{g}{g} \cdot \frac{1}{t} \dots\dots\dots (29 \cdot l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 = & 2 n \sqrt{g} \{ (\dot{y}_{2,s})^2 - (\dot{y}_{3,s})^2 + \alpha_{,s} \} + \frac{g}{\sqrt{g}} (h_n + \alpha) \\ & + n^2 (x_2 \dot{y}_{2,s} + x_3 \dot{y}_{3,s}) \{ (\dot{y}_{2,s})^2 - (\dot{y}_{3,s})^2 + \alpha_{,s} \} \\ & - \sqrt{g} \{ y_{2\alpha} v^3_{,s} + y_{3\alpha} v^2_{,s} \\ & - (y_{3\alpha} v^2 |_{\xi} + y_{2\alpha} v^3 |_{\xi}) (v^1_{,s} - y_{2,s} v^2 |_{\xi} - y_{3,s} v^3 |_{\xi}) \} \\ & - \frac{\int \frac{h_m}{g} ds}{\int \frac{1}{g\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{t} ds} \cdot \frac{g}{g} \cdot \frac{1}{t} \dots\dots\dots (29 \cdot m) \end{aligned}$$

である。

曲線座標系のひずみテンソル γ_{ij} を局所デカルト座標系におけるひずみテンソル ε_{ij} に変換し、応力とひずみの関係として、本報告では薄肉断面であることに配慮し次式を採用する。

$$\sigma^{11} = \varepsilon_{11} \bar{E} = \varepsilon_{11} E / (1 - \nu^2) \dots\dots\dots (30 \cdot a)$$

$$\sigma^{22} = \varepsilon_{22} \bar{E} = \varepsilon_{22} E / (1 - \nu^2) \dots\dots\dots (30 \cdot b)$$

$$\sigma^{12} = 2 \varepsilon_{12} G \dots\dots\dots (30 \cdot c)$$

ここに、 E は Young 率、 G はせん断弾性係数、 ν は Poisson 比である。

5. つり合い式と境界条件

部材両端における外力の \dot{e}_1 , \dot{e}_2 , \dot{e}_3 方向の成分を P_1 , P_2 , P_3 とし、分布外力の \dot{e}_1 , \dot{e}_2 , \dot{e}_3 方向の成分を \bar{P}_1 , \bar{P}_2 , \bar{P}_3 とすれば、仮想仕事の原理は次のように書き表わされる。

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma^{11} \delta \varepsilon_{11} + 2 \sigma^{12} \delta \varepsilon_{12} + \sigma^{22} \delta \varepsilon_{22}) \sqrt{g} d\xi ds dn \\ & - \iiint_V (P_1 \delta w + P_2 \delta u + P_3 \delta v) \sqrt{g} d\xi ds dn \\ & - \left[\iint_A (\bar{P}_1 \delta w + \bar{P}_2 \delta u + \bar{P}_3 \delta v) ds dn \right]_{\xi=\xi_*}^{\xi=\xi_{**}} = 0 \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ここに、 ξ_* と ξ_{**} ははりの両端断面の ξ 座標、 V ははりの体積、 A は横断面の面積を表わす。

したがって、つり合い式として

$$\begin{aligned} \delta v^1 : & N_{\varepsilon} - N(x_3 v^2|_{\varepsilon} - x_2 v^3|_{\varepsilon}) \\ & + \frac{1}{2}(M_{3,\varepsilon} + x_1 M_2 + M_2 \Gamma_{\theta} + M_{3Q} \Gamma_{\varphi})(x_3 \cos \theta - x_2 \sin \theta) \\ & + \frac{1}{2}(M_{2,\varepsilon} - x_1 M_3 - M_3 \Gamma_{\theta} - M_{2Q} \Gamma_{\varphi})(x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta) \\ & - M_{2Q,\varepsilon}(x_3 \cos \theta \tan \phi - x_2 \sin \theta \tan \phi) \\ & - M_{3Q,\varepsilon}(x_2 \cos \theta \tan \phi + x_3 \sin \theta \tan \phi) \\ & + \frac{1}{2} x_3 [M_1 v^3|_{\varepsilon}]_{,\varepsilon} + \frac{1}{2} x_3 M_1 (v^3|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \\ & + \frac{1}{2} x_2 [M_1 v^2|_{\varepsilon}]_{,\varepsilon} + \frac{1}{2} x_2 M_1 (v^2|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \\ & + x_1 M_1 (x_3 v^2|_{\varepsilon} - x_2 v^3|_{\varepsilon}) \\ & + N^* + M_3^* (x_3 \cos \theta - x_2 \sin \theta) \\ & + M_2^* (x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta) \\ & - M_{2Q}^* (x_3 \cos \theta \tan \phi - x_2 \sin \theta \tan \phi) \\ & - M_{3Q}^* (x_2 \cos \theta \tan \phi + x_3 \sin \theta \tan \phi) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \delta v^2 : & -x_3 N - [N v^2|_{\varepsilon}]_{,\varepsilon} + x_1 N v^3|_{\varepsilon} \\ & + [M_3 \cos \theta + M_2 \sin \theta]_{,\varepsilon} \\ & - [M_{2Q} \cos \theta \tan \phi + M_{3Q} \sin \theta \tan \phi]_{,\varepsilon} \\ & + [x_1 (M_2 \cos \theta - M_3 \sin \theta)]_{,\varepsilon} \\ & - [x_1 (M_{3Q} \cos \theta \tan \phi - M_{2Q} \sin \theta \tan \phi)]_{,\varepsilon} \\ & + x_1 [M_2 \cos \theta - M_3 \sin \theta]_{,\varepsilon} \\ & - (x_1)^2 (M_3 \cos \theta + M_2 \sin \theta) \\ & + [x_2 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3)]_{,\varepsilon} \\ & - x_1 x_3 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3) - [x_2 M_1]_{,\varepsilon} \\ & + x_1 x_3 M_1 + [x_1 M_1 v^2|_{\varepsilon}]_{,\varepsilon} + (x_1)^2 M_1 v^3|_{\varepsilon} \\ & + \frac{1}{2} [M_1 v^3|_{\varepsilon}]_{,\varepsilon} + \frac{1}{2} [M_1 (v^3|_{\varepsilon})_{,\varepsilon}]_{,\varepsilon} \\ & + \frac{1}{2} x_1 [M_1 v^2|_{\varepsilon}]_{,\varepsilon} + \frac{1}{2} x_1 M_1 (v^2|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \\ & + [M_2^* \cos \theta + M_3^* \sin \theta]_{,\varepsilon} \\ & - [M_{2Q}^* \cos \theta \tan \phi + M_{3Q}^* \sin \theta \tan \phi]_{,\varepsilon} \\ & + x_1 (M_2^* \cos \theta - M_3^* \sin \theta) \\ & - x_1 (M_{3Q}^* \cos \theta \tan \phi - M_{2Q}^* \sin \theta \tan \phi) \\ & - [x_2 H_{\omega}^*]_{,\varepsilon} + x_1 x_3 H_{\omega}^* - Q_2^* = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} \delta v^3 : & x_2 N - x_1 N v^2|_{\varepsilon} - [N v^3|_{\varepsilon}]_{,\varepsilon} \\ & - [M_2 \cos \theta - M_3 \sin \theta]_{,\varepsilon} \\ & + [M_{3Q} \cos \theta \tan \phi - M_{2Q} \sin \theta \tan \phi]_{,\varepsilon} \\ & + [x_1 (M_3 \cos \theta + M_2 \sin \theta)]_{,\varepsilon} \\ & - [x_1 (M_{3Q} \sin \theta \tan \phi + M_{2Q} \cos \theta \tan \phi)]_{,\varepsilon} \\ & + x_1 [M_3 \cos \theta + M_2 \sin \theta]_{,\varepsilon} \\ & + (x_1)^2 (M_2 \cos \theta - M_3 \sin \theta) \\ & + [x_3 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3)]_{,\varepsilon} \\ & + x_1 x_2 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3) - [x_3 M_1]_{,\varepsilon} - x_1 x_2 M_1 \\ & - \frac{1}{2} [M_1 v^2|_{\varepsilon}]_{,\varepsilon} - \frac{1}{2} [M_1 (v^2|_{\varepsilon})_{,\varepsilon}]_{,\varepsilon} \\ & + \frac{1}{2} x_1 [M_1 v^3|_{\varepsilon}]_{,\varepsilon} + \frac{1}{2} x_1 M_1 (v^3|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + [x_1 M_1 v^3|_{\varepsilon}]_{,\varepsilon} - (x_1)^2 M_1 v^2|_{\varepsilon} \\ & - [M_2^* \cos \theta - M_3^* \sin \theta]_{,\varepsilon} \\ & + [M_{3Q}^* \cos \theta \tan \phi - M_{2Q}^* \sin \theta \tan \phi]_{,\varepsilon} \\ & + x_1 (M_2^* \cos \theta + M_3^* \sin \theta) \\ & - x_1 (M_{2Q}^* \cos \theta \tan \phi + M_{3Q}^* \sin \theta \tan \phi) \\ & - [x_3 H_{\omega}^*]_{,\varepsilon} - x_1 x_2 H_{\omega}^* - Q_3^* = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32 \cdot c)$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : & -M_3 (x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta) \\ & + M_2 (x_3 \cos \theta - x_2 \sin \theta) \\ & + M_{2Q} (x_2 \cos \theta \tan \phi + x_3 \sin \theta \tan \phi) \\ & - M_{3Q} (x_3 \cos \theta \tan \phi - x_2 \sin \theta \tan \phi) \\ & - \frac{1}{2} [x_2 (v^3|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \cos \theta - (v^2|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \sin \theta] \\ & + M_2 [(v^2|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \cos \theta + (v^3|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \sin \theta] \\ & - M_{2Q} [(v^3|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \cos \theta \tan \phi - (v^2|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \sin \theta \tan \phi] \\ & - M_{3Q} [(v^2|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \cos \theta \tan \phi + (v^3|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \sin \theta \tan \phi] \\ & + x_1 (M_3 \Gamma_2 - M_2 \Gamma_3) \\ & - M_2^* (v^3|_{\varepsilon} \cos \theta - v^2|_{\varepsilon} \sin \theta) \\ & - M_3^* (v^2|_{\varepsilon} \cos \theta + v^3|_{\varepsilon} \sin \theta) \\ & + M_{2Q}^* (v^3|_{\varepsilon} \cos \theta \tan \phi - v^2|_{\varepsilon} \sin \theta \tan \phi) \\ & + M_{3Q}^* (v^2|_{\varepsilon} \cos \theta \tan \phi + v^3|_{\varepsilon} \sin \theta \tan \phi) \\ & - H_{\omega,\varepsilon}^* - m_{\theta}^* - m_{\alpha}^* = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32 \cdot d)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi : & \frac{1}{2} M_{2Q} (x_2 \sin \theta \sec^2 \psi - x_3 \cos \theta \sec^2 \psi) \\ & - \frac{1}{2} M_{3Q} (x_2 \cos \theta \sec^2 \psi + x_3 \sin \theta \sec^2 \psi) \\ & - M_{2Q} [(v^2|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \cos \theta \sec^2 \psi + (v^3|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \sin \theta \sec^2 \psi] \\ & + M_{3Q} [(v^3|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \cos \theta \sec^2 \psi - (v^2|_{\varepsilon})_{,\varepsilon} \sin \theta \sec^2 \psi] \\ & - N_{an} - M_{11,\varepsilon} \\ & + M_{2Q}^* (v^2|_{\varepsilon} \cos \theta \sec^2 \psi + v^3|_{\varepsilon} \sin \theta \sec^2 \psi) \\ & - M_{3Q}^* (v^3|_{\varepsilon} \cos \theta \sec^2 \psi - v^2|_{\varepsilon} \sin \theta \sec^2 \psi) \\ & - H_{\omega,1,\varepsilon}^* - m_q = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32 \cdot e)$$

が得られる。ここに、

$$M_1 = H_{\omega,\varepsilon} + Z + T + M_0 \Gamma_{\theta} \quad \dots\dots\dots (33 \cdot a)$$

$$M_{11} = H_{\omega,1,\varepsilon} + Z_1 + T_1 + M_{01} \Gamma_{\varphi} \quad \dots\dots\dots (33 \cdot b)$$

であり、断面力は、

$$N = \int_A \sigma^{11} dA, M_2 = \int_A \sigma^{11} y_3 dA \quad \dots\dots\dots (34 \cdot a, b)$$

$$M_3 = - \int_A \sigma^{11} y_2 dA, M_{2Q} = \int_A \sigma^{11} y_{3Q} dA \quad \dots\dots\dots (34 \cdot c, d)$$

$$M_{3Q} = - \int_A \sigma^{11} y_{2Q} dA, H_{\omega} = \int_A \sigma^{11} \omega dA \quad \dots\dots\dots (34 \cdot e, f)$$

$$H_{\omega 1} = \int_A \sigma^{11} \omega_1 dA, Z = \int_A \sigma^{11} H^* dA \quad \dots\dots\dots (34 \cdot g, h)$$

$$Z_1 = \int_A \sigma^{11} H_1^* dA, M_{\rho} = \int_A \sigma^{11} R dA \quad \dots\dots\dots (34 \cdot i, j)$$

$$M_{\rho 1} = \int_A \sigma^{11} R_1 dA, T = - \int_A \sigma^{12} \frac{\theta}{\sqrt{g}} dA \quad \dots\dots\dots (34 \cdot k, l)$$

$$T_1 = - \int_A \sigma^{12} \frac{\theta_1}{\sqrt{g}} dA \quad \dots\dots\dots (34 \cdot m)$$

$$N_{an} = \int_A \sigma^{22} n \alpha_{ss} \sqrt{g} dA \quad \dots\dots\dots (34 \cdot n)$$

$$N^* = \int_A P_1 \sqrt{g} dA, M_2^* = \int_A P_1 y_3 \sqrt{g} dA \quad \dots\dots\dots (34 \cdot o, p)$$

$$M_3^* = - \int_A P_1 y_2 \sqrt{g} dA \dots\dots\dots (34 \cdot q)$$

$$M_{2q}^* = \int_A P_1 y_{3q} \sqrt{g} dA, M_{3q}^* = - \int_A P_1 y_{2q} \sqrt{g} dA \dots\dots\dots (34 \cdot r, s)$$

$$H_\omega^* = \int_A P_1 \omega \sqrt{g} dA, H_{\omega_1}^* = \int_A P_1 \omega_1 \sqrt{g} dA \dots\dots\dots (34 \cdot t, u)$$

$$Q_2^* = \int_A P_2 \sqrt{g} dA, Q_3^* = \int_A P_3 \sqrt{g} dA \dots\dots\dots (34 \cdot v, w)$$

$$m_\theta^* = - \int_A (P_2 y_2 \sin \theta + P_2 y_3 \cos \theta - P_3 y_2 \cos \theta + P_3 y_3 \sin \theta) \sqrt{g} dA \dots\dots\dots (34 \cdot x)$$

$$m_\alpha^* = - \int_A (P_2 y_{3q} \sin \theta \tan \phi + P_2 y_{2q} \cos \theta \tan \phi - P_3 y_{3q} \cos \theta \tan \phi + P_3 y_{2q} \sin \theta \tan \phi) \sqrt{g} dA \dots\dots\dots (34 \cdot y)$$

$$m_\phi^* = - \int_A (P_2 y_{2q} \sin \theta \sec^2 \phi - P_2 y_{3q} \cos \theta \sec^2 \phi - P_3 y_{2q} \cos \theta \sec^2 \phi - P_3 y_{3q} \sin \theta \sec^2 \phi) \sqrt{g} dA \dots\dots\dots (34 \cdot z)$$

と表わされる。式 (34) では、断面変形を考慮したために新たに $M_{2q}, M_{3q}, H_{\omega_1}, Z_1, M_{\omega_1}, T_1, N_{\omega_1}, M_{2q}^*, M_{3q}^*, H_\omega^*, m_\theta^*, m_\alpha^*, m_\phi^*$ が定義されている。 M_ρ, M_{ρ_1} は有限変位を考えたときのみ現われる断面力であり、これによる σ^{11} の分布は式 (29-j, k) の R, R_1 に比例する成分をもつ。式 (34-h, i) の H^*, H_1^* はそれぞれ、

$$H^* = H + \frac{x_1 \theta}{\sqrt{g} \sqrt{g}} (y_2 y_{3,s} - y_3 y_{2,s}) \dots\dots\dots (35 \cdot a)$$

$$H_1^* = H_1 + \frac{x_1 \theta_1}{\sqrt{g} \sqrt{g}} (y_2 y_{3,s} - y_3 y_{2,s}) \dots\dots\dots (35 \cdot b)$$

である。

さらに、部材両端における境界条件は、

$$v^1 = \bar{v}^1 \text{ または } N - \bar{N}^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot a)$$

$$v^2 = \bar{v}^2 \text{ または}$$

$$\begin{aligned} N v^2 |_\xi - [M_3 \cos \theta + M_2 \sin \theta]_\xi \\ - x_1 (M_2 \cos \theta - M_3 \sin \theta) - x_2 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3) \\ + x_2 M_1 - \frac{1}{2} [M_1 v^3 |_\xi]_\xi - \frac{1}{2} M_1 (v^3 |_\xi)_\xi \\ - x_1 M_1 v^3 |_\xi + (M_{2q} \cos \theta \tan \phi + M_{3q} \sin \theta \tan \phi)_\xi \\ - x_1 M_{2q} \sin \theta \tan \phi + x_1 M_{3q} \cos \theta \tan \phi \\ - (M_2^* \cos \theta + M_3^* \sin \theta) \\ + (M_{2q}^* \cos \theta \tan \phi + M_{3q}^* \sin \theta \tan \phi) \\ + x_2 H_\omega^* - Q_2^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot b) \end{aligned}$$

$$v^3 = \bar{v}^3 \text{ または}$$

$$\begin{aligned} N v^3 |_\xi + [M_2 \cos \theta - M_3 \sin \theta]_\xi \\ - x_1 (M_3 \cos \theta + M_2 \sin \theta) - x_3 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3) \\ - x_3 M_1 + \frac{1}{2} [M_1 v^2 |_\xi]_\xi + \frac{1}{2} M_1 (v^2 |_\xi)_\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - x_1 M_1 v^3 |_\xi + (M_{2q} \sin \theta \tan \phi - M_{3q} \cos \theta \tan \phi)_\xi \\ + (x_1 M_{2q} \cos \theta \tan \phi + x_1 M_{3q} \sin \theta \tan \phi) \\ + (M_2^* \cos \theta - M_3^* \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + (M_{2q}^* \sin \theta \tan \phi - M_{3q}^* \cos \theta \tan \phi) \\ + x_3 H_\omega^* - Q_3^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\Gamma_2 = \bar{\Gamma}_2 \text{ または } M_2 - \bar{M}_2^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot d)$$

$$\Gamma_3 = \bar{\Gamma}_3 \text{ または } M_2 - \bar{M}_2^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot e)$$

$$\Gamma_{2b} = \bar{\Gamma}_{2b} \text{ または } M_{2q} - \bar{M}_{2q}^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot f)$$

$$\Gamma_{3b} = \bar{\Gamma}_{3b} \text{ または } M_{3q} - \bar{M}_{3q}^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot g)$$

$$\theta = \bar{\theta} \text{ または}$$

$$M_1 - M_3 \Gamma_3 - M_2 \Gamma_2 + H_\omega^* - \bar{m}_\theta^* - \bar{m}_\alpha^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot h)$$

$$\phi = \bar{\phi} \text{ または}$$

$$M_{11} - M_{3q} \Gamma_3 - M_{2q} \Gamma_2 + H_\omega^* - \bar{m}_\alpha^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot i)$$

$$\Gamma_\theta = \bar{\Gamma}_\theta \text{ または } H_\omega - \bar{H}_\omega^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot j)$$

$$\Gamma_\phi = \bar{\Gamma}_\phi \text{ または } H_{\omega_1} - \bar{H}_{\omega_1}^* = 0 \dots\dots\dots (36 \cdot k)$$

と表わされる。ここに、 $\bar{v}^1 \sim \bar{\Gamma}_\phi$ は境界で規定されている変位であり、

$$\begin{aligned} \bar{N}^* = \int_A \bar{P}_1 dA, \bar{M}_2^* = \int_A \bar{P}_1 y_3 dA, \bar{M}_3^* = - \int_A \bar{P}_1 y_2 dA \\ \dots\dots\dots (37 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{2q}^* = \int_A \bar{P}_1 y_{3q} dA, \bar{M}_{3q}^* = - \int_A \bar{P}_1 y_{2q} dA \dots\dots\dots (37 \cdot d \cdot e)$$

$$\bar{H}_\omega^* = \int_A \bar{P}_1 \omega dA, \bar{H}_{\omega_1}^* = \int_A \bar{P}_1 \omega_1 dA \dots\dots\dots (37 \cdot f \cdot g)$$

$$\bar{Q}_2^* = \int_A \bar{P}_2 dA, \bar{Q}_3^* = \int_A \bar{P}_3 dA \dots\dots\dots (37 \cdot h \cdot i)$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_\theta^* = - \int_A (\bar{P}_2 y_2 \sin \theta + \bar{P}_2 y_3 \cos \theta - \bar{P}_3 y_2 \cos \theta \\ + \bar{P}_3 y_3 \sin \theta) dA \dots\dots\dots (37 \cdot j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_\alpha^* = - \int_A (\bar{P}_2 y_{3q} \tan \phi \sin \theta + \bar{P}_2 y_{2q} \tan \phi \cos \theta \\ - \bar{P}_3 y_{3q} \tan \phi \cos \theta + \bar{P}_3 y_{2q} \tan \phi \sin \theta) dA \\ \dots\dots\dots (37 \cdot k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_\phi^* = - \int_A (\bar{P}_2 y_{2q} \sin \theta \sec^2 \phi - \bar{P}_2 y_{3q} \cos \theta \sec^2 \phi \\ - \bar{P}_3 y_{2q} \cos \theta \sec^2 \phi - \bar{P}_3 y_{3q} \sin \theta \sec^2 \phi) dA \\ \dots\dots\dots (37 \cdot l) \end{aligned}$$

である。式 (37) においても、断面変形を考慮したのに伴って、 $\bar{M}_{2q}^*, \bar{M}_{3q}^*, \bar{H}_{\omega_1}^*, \bar{m}_\alpha^*, \bar{m}_\phi^*$ が定義されている。

6. 考 察

(1) 既往の研究との比較

断面変形を考慮した一次元有限変位理論に関する研究は、これまで数が少なく、本報告で得られた薄肉空間曲線ばりのつり合い式の妥当性を直接比較・検討できる既往のつり合い式が見当たらないのが現状である。そこで、まず断面変形を考慮した既往の微小変位理論による研究と比較するために、薄肉空間曲線ばりの微小変位理論による支配方程式を求める。式 (24) において、変位成分

に関する線形項のみを残すと、全変位ベクトル V_L は、

$$V_L = (v^1 - y_2 v^2 |_{\xi} - y_3 v^3 |_{\xi} - \omega \Gamma_{\theta} - \omega_1 \Gamma_{\psi}) \hat{e}_1 + (v^2 - y_3 \theta + y_{2a} \psi) \hat{e}_2 + (v^3 + y_2 \theta + y_{2a} \psi) \hat{e}_3 \dots (38)$$

と書ける。式 (31) から薄肉空間曲線ばりのつり合い式は

$$\delta v^1 : N_{,\xi} + \kappa_3 (M_{3,\xi} + \kappa_1 M_2) + \kappa_2 (M_{2,\xi} - \kappa_1 M_3) + N^* + \kappa_3 M_3^* + \kappa_2 M_2^* = 0 \dots (39 \cdot a)$$

$$\delta v^2 : -\kappa_3 N + M_{3,\xi} + (\kappa_1 M_2)_{,\xi} + \kappa_1 M_{2,\xi} - (\kappa_1)^2 M_3 - (\kappa_2 M_1)_{,\xi} + \kappa_1 \kappa_3 M_1 + M_3^* + \kappa_1 M_2^* - (\kappa_2 H_{\omega}^*)_{,\xi} + \kappa_1 \kappa_2 H_{\omega}^* - Q_2^* = 0 \dots (39 \cdot b)$$

$$\delta v^3 : \kappa_2 N - M_{2,\xi} + (\kappa_1 M_3)_{,\xi} + \kappa_1 M_{3,\xi} + (\kappa_1)^2 M_2 - (\kappa_3 M_1)_{,\xi} - \kappa_1 \kappa_2 M_1 - M_2^* + \kappa_1 M_3^* - (\kappa_3 H_{\omega}^*)_{,\xi} - \kappa_1 \kappa_2 H_{\omega}^* - Q_3^* = 0 \dots (39 \cdot c)$$

$$\delta \theta : -\kappa_2 M_3 + \kappa_3 M_2 - M_{1,\xi} - H_{\omega,\xi}^* - m_3^* = 0 \dots (39 \cdot d)$$

$$\delta \psi : -\kappa_2 M_{3Q} - \kappa_3 M_{2Q} - M_{1,\xi} - N_{a\xi} - H_{\omega,\xi}^* - m_4^* = 0 \dots (39 \cdot e)$$

となる。断面変形に関する基礎式 (39・e) の第 1, 2 項は y_2, y_3 軸回りの曲げに関する項である。ここで得られたつり合い式 (39) において、 $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ とお

ば断面変形を考慮した微小変位理論による薄肉直線ばりのつり合い式¹³⁾と一致する。ただし、文献 13) では二次のせん断変形をも考慮している。式 (39) において、 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0; \kappa_3 = \text{const}$ とすれば、薄肉円弧ばりのつり合い式¹⁴⁾と完全に一致する。また、式 (39・a~d) において $\kappa_1 = \text{const}; \kappa_2 = \text{const}; \kappa_3 = \text{const}$ とし、断面変形に関する項を無視すれば、薄肉空間曲線部材の微小変位理論によるつり合い式³⁾と一致する。ただし、文献 3) ではそり関数を求める際に $g = \bar{g}$ と近似している。

仮想仕事の原理に基づくかぎり、変位場を仮定すると、すべての支配方程式が数学的な演算のみで求まる。そこで、本報告で得られた有限変位場の妥当性を確かめるため、既往の研究との比較を Table 1 に示した。

(2) 断面変形モードの妥当性

本報告では、薄肉閉断面ばりの断面変形を一次元棒理論を用いて扱うために、 s, n 方向の変位 ξ, η を次のようにして求めた。

横方向曲げモーメント M_s は変位 η を用いて、

$$M_s = -\bar{E} I_0 \eta_{,ss}, I_0 = I^2 / 12 \dots (40 \cdot a \cdot b)$$

と表わされるものとする、次のつり合い式が得られる。

Table 1 有限変位場の比較

| 対象 | 断面変形 | 研究者 | 本文との関係 | |
|--------|------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 平面曲線部材 | 無 | 西野 文雄 ⁵⁾ 倉方 慶夫 長谷川 彰夫 奥村 敏恵 | $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ と置き、式(24)において断面変形に関する項を無視し、ねじれ角 θ を除く変位成分について二次以上の高次微小項を省略すれば、本文の結果と一致する。 | |
| | | 西野 文雄 ⁶⁾ 倉方 慶夫 後藤 芳顕 | $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ と置き、式(24)の断面変形及びその項を無視し、式(23)の D_{in} を計算する際、 $e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = 0, \theta = 0$ とおけば、本文の結果と完全に一致する。 | |
| | | 薄木 征三 ⁷⁾ | 式(24)において $\kappa_1 = \kappa_2 = 0; \kappa_3 = \text{const}$ と置き、ねじれ角を除く変位成分に関し二次以上の高次微小項を無視し、断面変形の項を省略すると、そり変位の項を除き一致する。ただし、文献 7) では薄肉回転シュールの非線形ひずみ-変位関係式から変位場を求めており、ねじれ率を求める際、 $D_{22} = D_{33} = 1, D_{23} = D_{32} = 0$ としている。 | |
| | 視 | 事口 寿男 ⁸⁾ 久保 元生 中井 博 | 式(24)において $\kappa_1 = \kappa_2 = 0; \kappa_3 = \text{const}$ と置き、断面変形に関する項を無視し、そり関数に現れる非線形項を省略すると、本文の結果と一致する。ただし、文献 8) とはねじれ率の項の係数に差異がある。 | |
| | | 無 | Schroeder ⁹⁾ | 式(24)において、断面変形の項を無視すると、そり変位の項を除き一致する。すなわち、文献 9) ではそり変位を、微小変位理論に基づくそり関数とねじれ率 θ, ξ との積で表わしている。 |
| | | | 平嶋 政治 ¹⁰⁾ 井浦 雅司 依田 照彦 | 式(24)において断面変形の項を無視すれば、そり変位の項を除き本文の結果と完全に一致する。すなわち、文献 10) ではそり関数には断面内任意点での部材軸方向の母線の曲率は考慮されているものの、微小変位理論による式が用いられている。 |
| 線部材 | 考 | 林 正 ¹¹⁾ 岩崎 英治 前田 幸雄 | 式(24)において断面変形に関する項を無視すると、本文の結果と一致する。ただし、文献 11) とはそり変位に現れる、ねじれ率と伸び率・曲率との連成項に差異がある。 | |
| | | 高島 秀雄 ¹⁵⁾ 高島 秀雄 ¹⁶⁾ | 本文で三次曲線で表示されている断面変形を近似的に一次曲線で表わし、変位は変形後の材軸線の基底ベクトルと断面座標とが線形関係にある平面的な変位及びねじりによるそり変位のみを考慮している点に差異がある。そり変位は断面に固有のものであると仮定し、べき級数表示で与えている。 薄肉閉断面部材において、断面変形を一次曲線で近似しており、変位は平面的変位とねじりにるそり変位とから成ると仮定している。また本文のねじれ率に対応するものとして新しい変数を導入し、そり関数として微小変位理論による薄肉直線部材の St. Venant ねじりのそり関数を代用している点に差異がある。 | |

$$(-EI_0 \eta_{,ss})_{,ss} = 0 \dots\dots\dots (41)$$

式 (41) は、分布荷重のないはりのたわみの微分方程式に一致し、変位 η は座標 s の 3 次式となる。したがって、構成板要素の座標 s_1, s_2 と変位 $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ を用いると、長方形薄肉断面の板厚中心線上の変位は次のように置くことができる。ここで、 $()_1$ はウェブ、 $()_2$ はフランジに関する量を表わす¹³⁾。

$$\xi_1 = a_1, \eta_1 = C_1 S_1^3 + C_2 S_1^2 + C_3 S_1 + C_4 \dots\dots\dots (42 \cdot a, b)$$

$$\xi_2 = a_2, \eta_2 = C_5 S_2^3 + C_6 S_2^2 + C_7 S_2 + C_8 \dots\dots\dots (42 \cdot c, d)$$

ここに、 $C_1 \sim C_8, a_1, a_2$ は s 座標によらない未定係数である。この 10 個の未定係数は次の同じ個数の条件から決定される。

i) 対称軸上でモーメントが零

$$(M_s)_{s_1=0} = 0, (M_s)_{s_2=0} = 0 \dots\dots\dots (43 \cdot a, b)$$

ii) 隅角部における変位の連続条件

$$(\xi_1)_{s_1=h} = (\eta_2)_{s_2=-b} \dots\dots\dots (43 \cdot c)$$

$$(\eta_1)_{s_1=h} = (\xi_2)_{s_2=-b} \dots\dots\dots (43 \cdot d)$$

iii) 隅角部におけるモーメントの連続条件

$$(M_s)_{s_1=h} = (M_s)_{s_2=-b} \dots\dots\dots (43 \cdot e)$$

iv) 回転角がフランジとウェブでそれぞれ等しい。

$$(\eta_1)_{s_1=h} = (\eta_2)_{s_2=-b} \dots\dots\dots (43 \cdot f)$$

v) 対称軸上での変位は仮定したモード (Fig. 3) より次のように表わされる。

$$(\eta_1)_{s_1=0} = 0, (\eta_2)_{s_2=0} = 0 \dots\dots\dots (43 \cdot g, h)$$

$$(\xi_1)_{s_1=0} = b \tan \phi, (\xi_2)_{s_2=0} = -h \tan \phi \dots\dots\dots (43 \cdot i, j)$$

式 (43) の条件より、式 (42) は次のようになる。

$$\xi_1 = b \tan \phi \dots\dots\dots (44 \cdot a)$$

$$\eta_1 = \frac{J_b}{hA_0} S_1^3 \tan \phi - \left(S_1 + \frac{J_b h}{A_0} S_1 \right) \tan \phi \dots\dots\dots (44 \cdot b)$$

$$\xi_2 = -h \tan \phi \dots\dots\dots (44 \cdot c)$$

$$\eta_2 = -\frac{J_h}{bA_0} S_2^3 \tan \phi + \left(S_2 + \frac{J_h b}{A_0} S_2 \right) \tan \phi \dots\dots\dots (44 \cdot d)$$

ここに、

$$J_b = t_2^3/12, J_h = t_1^3/12, A_0 = bJ_h + hJ_b \dots\dots\dots (45 \cdot a \sim c)$$

である。式 (44) の結果を用いると変位 ξ, η は独立変数 ξ, s, η との関係から式 (12) のように求められる。

微小変位理論による薄肉直線ばり ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) のねじれ角 θ および断面変形角 ϕ に関する基礎式は、長方形薄肉断面に限定した場合、分布外力 $H_w^*, m_w^*, H_{\omega 1}^*, m_{\omega 1}^*$ が作用しなければ、式 (39 \cdot d, e) のつり合い式から次のように表わせる¹³⁾。

$$-\beta EI_{\omega 1 \omega 1} (\beta \Omega_{\theta, \xi \xi} + \Omega_{\phi, \xi \xi}) + G J_{\phi \phi} \Omega_{\theta} = 0 \dots\dots\dots (46 \cdot a)$$

$$EC\phi - EI_{\omega 1 \omega 1} (\beta \Omega_{\theta, \xi \xi} + \Omega_{\phi, \xi \xi}) = 0 \dots\dots\dots (46 \cdot b)$$

ここに、

$$C = \int_A (n a_{,ss})^2 \sqrt{g} dA, \beta = \frac{b t_1 - h t_2}{b t_1 + h t_2} \dots\dots\dots (47 \cdot a, b)$$

である。ここで、一端固定、他端自由の片持ち直線ばり

を考える。自由端にバイモーメント $\bar{H}_{\omega 1}^*$ 、ねじれモーメント $\bar{m}_{\omega 1}^*$ が作用していなければ、 $\theta = 0$ は解となり、このとき断面変形に関するつり合い式 (46 \cdot b) は、

$$EC\phi - EI_{\omega 1 \omega 1} \Omega_{\phi, \xi \xi} = 0 \dots\dots\dots (48)$$

となる。固定端での境界条件は、式 (36 \cdot i, k) より

$$\phi = 0, \Gamma_{\phi} = 0 \dots\dots\dots (49 \cdot a, b)$$

となり、自由端では、外力として $\bar{m}_{\omega 1}^*$ のみ作用させるとすれば、

$$\phi_{, \xi \xi} = 0, -EI_{\omega 1 \omega 1} \phi_{, \xi \xi \xi} - \bar{m}_{\omega 1}^* = 0 \dots\dots\dots (50 \cdot a, b)$$

が得られる。このとき $\bar{m}_{\omega 1}^*$ は Fig. 3 に示すような断面変形のみを引き起こす力であり、横方向バイモーメントとよばれる力である³⁾。

微小変位理論において、分布外力 $H_w^*, H_{\omega 1}^*$ がなく、 ω, ω_1 の板厚方向に由来する成分が無視できるとすると、

$$H_w = \beta H_{\omega 1} \dots\dots\dots (51)$$

とおけ、 H_w は $H_{\omega 1}$ に依存する量となる。したがって、式 (47 \cdot b) の β の値が零となる断面を有する片持ちばりを考えた場合も、分布外力および自由端にねじれモーメント $\bar{m}_{\omega 1}^*$ が作用しなければ、 $\theta = 0$ は解となり、自由端での外力として $\bar{H}_{\omega 1}^*$ のみ作用させると、式 (50) に代わって

$$\phi_{, \xi \xi \xi} = 0, -EI_{\omega 1 \omega 1} \phi_{, \xi \xi \xi} - \bar{H}_{\omega 1}^* = 0 \dots\dots\dots (52 \cdot a, b)$$

が得られ、この場合、 $\bar{H}_{\omega 1}^*$ も Fig. 3 に示すような断面変形のみを発生させるバイモーメントとなる。はり理論による断面変形角と有限要素法に基づく数値計算結果を比較すると、断面寸法/スパン長 = 1/4 ~ 1/8 の範囲で、7 ~ 13% はり理論による断面変形角の方が大きかった。しかしながら、そのときの断面変形モードに注目してみると、各薄板要素は Fig. 3 のような 3 次のモードを示し、条件式 (43) については有効数字 3 桁まで一致していた。

次に薄肉円弧ばり ($x_1 = x_2 = 0, x_3 = \text{const}$) について考える。分布外力が作用しないとすると、式 (39 \cdot e) から断面変形角 ϕ に関して、微小変位理論による次の支配方程式が得られる。

$$-x_3 M_{2q} - EI_{\omega 1 \omega 1} (\beta' \Omega_{\theta, \xi \xi} + \Omega_{\phi, \xi \xi}) + EC\phi = 0 \dots\dots\dots (53)$$

ここに、

$$\beta' = \frac{b t_1 (1 - x_3^2 b^2) - h t_2 (1 - 3 x_3^2 b^2)}{b t_1 (1 - x_3^2 b^2) + h t_2 (1 + 3 x_3^2 b^2)} \dots\dots\dots (54)$$

である。薄肉円弧ばりの場合、外力として $\bar{m}_{\omega 1}^*$ のみ作用させたとしても、また式 (54) の β' の値が零となる断面を選んで外力として $\bar{H}_{\omega 1}^*$ のみ作用させたとしても、式 (53) からわかるように曲げとそりに伴うねじれとの連成は避けられず、バイモーメントはもはや断面変形のみを引き起こす力ではなくなる。有限要素法に基づく数値計算を片持ち円弧ばりについて行い、式 (53) を満足する断面変形角を調べてみると、この場合も、Fig. 3 の断面変形角の定義の妥当性が直線ばりと同様の精度で確

かめられた。また、有限要素法に基づく数値計算によると、薄肉直線ばりに曲げ荷重を作用させたときの断面変形は、局部的なものでありその影響も小さいものであったが、薄肉円弧ばりにおいては、逆対称荷重のみならず曲げ荷重作用に対しても Fig. 3 に示したような断面変形が起こり、数値的にも小さな値とはならないことが確認された。したがって薄肉空間曲線ばりにおいて Fig. 3 に示した断面変形の、はりに及ぼす影響を無視することは必ずしも適当とはいえない。

以上のような理由から本報告では薄肉空間曲線ばりの断面変形を考慮した有限変位理論を展開するにあたって、Fig. 3 に示した断面変形モードを仮定し断面変形を有限回転として扱うための条件として式 (43) を採用した。

7. あとがき

本論文では、初期曲率と初期ねじれ率を有する薄肉箱形空間曲線部材の断面変形を考慮した有限変位理論を一次元のはり理論の範囲内で展開した。有限変位場を決定する際、そり関数として有限変位理論による薄肉空間曲線部材の変形に依存するそり関数を用い、せん断ひずみにはその非線形項を含んだ式を用いている。得られた有限変位場は、従来の薄肉断面部材の研究結果を含むものであり、薄肉空間曲線部材の断面変形の影響を考慮した一次元はり理論の有限変位場として、妥当な変位場であると考えられる。

また、断面変形モードについては、微小変位理論と本報告の結果との対応関係を、はり理論の立場から明らかにし、断面変形モードの力学的意味を明確にした。

おわりに、本報告の作成にあたり宮崎文徳君（現・フジタ工業勤務）、村上 聖君（現・日産火災海上勤務）の協力を得た。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Vlasov, V. Z. : Thin-Walled Elastic Beams, 2nd ed., Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961.
- 2) 西野文雄・深沢泰晴：ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化，土木学会論文報告集，No. 247, pp. 9~19, 1976年.
- 3) 築地恒夫：初期曲率，ねじれ率を有する薄肉断面曲線はりの基礎方程式，土木学会論文報告集，No. 230, pp. 11~22, 1974年.
- 4) Schröter, H.-J. : Anwendung einer Theorie räumlich stark gekrümmter Stäbe auf beliebig geformte, gestützte und belastete freitragende Wendelschalen, Der Stahlbau, 42. Jahrgang, Heft 11, S. 338~345, November, 1973; Heft 12, S. 362~367, Dezember, 1973.
- 5) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225, pp. 1~15, 1974年.
- 6) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，No. 237, pp. 11~26, 1974年.
- 7) 薄木征三：変形を考慮した薄肉断面円弧アーチの曲げねじれ座屈，土木学会論文報告集，No. 263, pp. 35~48, 1977年.
- 8) 事口寿男・久保元生・中井 博：薄肉曲線ばりの幾何学的非線形挙動と横倒れ座屈解析への応用，第 24 回構造工学シンポジウム，構造非線形問題，pp. 69~76, 1978年.
- 9) Schroeder, F.H. : Allgemeine Stabtheorie des dünnwandigen räumlich vorgekrümmten und vorgewundenen Träger mit großen Verformungen, Ingenieur-Archiv, 39. Band, S. 87~103, 1970.
- 10) 平嶋政治・井浦雅司・依田照彦：初期曲率・ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材の有限変位理論，土木学会論文報告集，No. 292, 1979年.
- 11) 林 正・岩崎英治・前田幸雄：薄肉曲線部材の有限変位場，構造工学論文集，Vol. 33 A, 1987年.
- 12) Janssen, J.D. and Veldpaus, F.E. : Über die Stärke und Steifigkeit von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt, Publications of IABSE, 32-II, pp. 85~106, 1972.
- 13) 西野文雄・長谷川彰夫・名取悦朗：断面変形とせん断変形を考慮した長方形薄肉断面はりの理論，土木学会論文報告集，No. 248, 1976年.
- 14) 平嶋政治・依田照彦・峯岸康久：ひずみ場の仮定に基づく長方形薄肉断面曲線ばりの断面変形に関する基礎式，第 35 回応用力学連合講演会講演予稿集，1985年.
- 15) 高島秀雄：反り変位の級数展開による空間曲線棒の一般理論，その 1. 断面変形を考慮した大変位・大回転理論，日本建築学会論文報告集，No. 261, 1977年.
- 16) 高島秀雄：空間曲線をもつ薄肉開断面材の解析，日本建築学会論文報告集，No. 267, 1978年.

(1988. 2. 16・受付)