

三辺測量網の図形調整と三辺測量鎖の誤差特性

ADJUSTMENT OF TRILATERATION NET BY CONDITION EQUATIONS AND CHARACTERISTICS OF ERRORS IN TRILATERATION CHAINS

町田 憲一*・森 忠次**

By Ken-ichi MACHIDA and Chuji MORI

In order to adjust a trilateration net, we used to apply the method by observation equations more frequently compared with the method by condition equations. The main reason is that the more complex a trilateration net is, the more difficult the formation of condition equations is. It is evident that finding and describing the condition equations which are necessary and sufficient for a given problem are not easy. But it is also true that the adjustment by condition equations has some merits described as follows. A gross error or a mistake can be found out by checking an error of closure in a condition equation at an early stage. The number of normal equations to be solved is generally small, and so the adjustment computation is carried out by a personal computer. The purposes of this paper are as follows. 1. To propose a method which will enable us to describe the condition equations by the use of simple rules for applying the adjustment by condition equations to complicated trilateration nets. 2. To describe linearized formulae of the condition equations. 3. To show a systematic computation work for obtaining cofactor (or variance-covariance) matrices of angles, directions of sides and coordinates of stations. 4. To show the characteristics of errors in several typical trilateration chains by investigating the cofactors (or variances). 5. To present some useful data for making a plan of the observation for practical trilateration chains.

Keywords: control surveying, trilateration nets, adjustment by condition equations

1. 緒 言

光波測距儀の発達普及により、従来の三角測量に代わって距離のみを測る三辺測量が可能になった。基準点測量網の辺長が大になれば、測角の精度に比べて光波測距儀を用いる測距の精度の方が勝る傾向にあるので、基準点測量として三辺測量は有力な手段である。

現在のところ、三辺測量網（以下、三辺網という）の調整は、図形調整（条件方程式）法より座標調整（観測方程式）法による方が有利とされている¹⁾。その大きな理由は、三辺網が複雑になると調整のための必要十分な条件方程式（以下、条件式という）の規則的作成が困難であるという点²⁾と、条件式が非線形であるという点にある。

一方では、図形調整法は次のような利点を有する。

- i) 調整に先立ち、閉合誤差の大小により観測の良否や、誤りの有無を推定できる。
- ii) 多数の新基準点を増設する測量では、座標調整法に

比べて正規方程式の数が少なく済み、調整は手近なパーソナルコンピュータで間に合うことが多い。

- iii) 観測値の誤差が、観測量の最確値やこれから得られる非測定角、辺の非測定方向角、測点座標（以下、これらを角、方向角、座標という）の諸量の誤差に、どのように伝播するかを調べるのに好都合である。

本文は、これらの図形調整法の利点を活用できるように、平面上の三辺網を対象にして、最初に三辺網の図形調整のための必要十分な条件式の規則的作成法を提示する³⁾。次に、線形条件式の誘導、三辺網の組織的な図形調整法、諸量の誤差（重み係数行列、分散共分散行列）の計算法をそれぞれ示す⁴⁾。さらに、代表的な数種の三辺測量鎖について数値計算を行い、各鎖ごとの誤差の特性を明らかにし、従来の三角測量鎖などの座標誤差と比較することによって、三辺測量鎖の精度を検討する。最後に、実用的な三辺測量鎖を計画する場合の一資料を提示する。

2. 必要十分な条件式の規則的作成法

(1) 条件式数

三辺網の図形調整のための条件式数 q は、 m 、 p をそれぞれ観測辺数、未知点数とすると、既知点を 1 個まで

* 正会員 寒河江工業高等学校 土木科
(〒991 寒河江市緑町 148)

** 正会員 工博 岡山大学教授 工学部土木工学科
(〒700 岡山市津島中 3-1-1)

含む三辺網の場合は、

$$q = m - 2p + 3 \dots\dots\dots (1)$$

既知点を 2 個以上含む三辺網の場合は、

$$q = m - 2p \dots\dots\dots (2)$$

で表わせる。与えられた三辺網から、式 (1), (2) に示した数の必要十分な条件式を、紛れなく規則的に作成する方法を以下に提示する。

(2) 条件式の規則的作成法

既知点を 1 個まで含む三辺網は、既知点を 2 個以上含む三辺網の特殊な場合であるから後者を主にして考える。

a) 既知辺網の選定

既知点が 2 個以上あれば、最初の任意の 2 個の既知点間で 1 個、さらに他の既知点 1 個につき 2 個の辺長が与えられていると同等であるから、これらの既知辺ですべての既知点を結ぶ単純三辺網^{注1)}を作ることができる。この網を既知辺網ということにする。与えられた三辺網に、まずこの既知辺網を描き入れる。Fig. 1 は与えられた三辺網の例であり、Fig. 2 は Fig. 1 に既知辺網の一例を描き入れたものである。

b) 単純三辺網の選定

既知辺網を描き入れた三辺網において、観測辺と既知

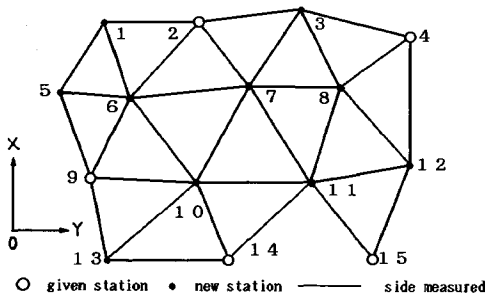


Fig. 1 An example of a trilateration net.

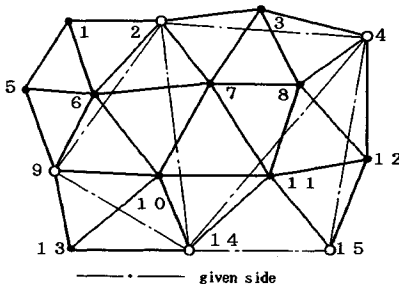


Fig. 2 An example of a simple net formed by given sides described into Fig. 1.

辺とを用いてすべての測点をたどる任意の単純三辺網を選ぶと、この網には拘束条件が成立しない。Fig. 3 は、Fig. 2 から選定した単純三辺網の例である。

単純三辺網を形成する辺以外の観測辺や既知辺があるときは、単純三辺網に拘束条件が成立することになる。

c) 拘束条件を成立させる辺の特定

単純三辺網に用いない観測辺と既知辺とをそれぞれ、余剰観測辺、指定辺として特定する。Fig. 4 は、Fig. 3 から特定された余剰観測辺と指定辺の例である。

Fig. 4 で特定された余剰観測辺数と指定辺数の和は、式 (2) から得られる条件式数に一致する。また、Fig. 3 において、たとえば 14, 15 の代わりに 8, 12 を単純三辺網の 1 辺に選ぶとき (観測辺のみから成る単純三辺網の場合) は、Fig. 4 の辺 8, 12 が余剰観測辺でなくなり、その代わりに辺 14, 15 が指定辺に加えられる。

Fig. 1 において、既知点がないものとしたときは、たとえば上述の観測辺のみから成る単純三辺網を選定すれば、この場合と同じ余剰観測辺が特定され、その数は式 (1) から得られる条件式数に一致する。

d) 拘束条件

Fig. 4 において、個々の余剰観測辺と指定辺とが、これらの両端点に連なる最小連結数の単列三辺形鎖 (単純三辺網の一部) の両端点間の距離を拘束すると考える。なお、Fig. 4 において余剰観測辺長 4, 12 は、最小連結数の単列三辺形鎖 (4, 3, 7, 11, 12, 8) を拘束すると考えてもよい。Fig. 5 は、Fig. 4 から抽出した拘束条件が

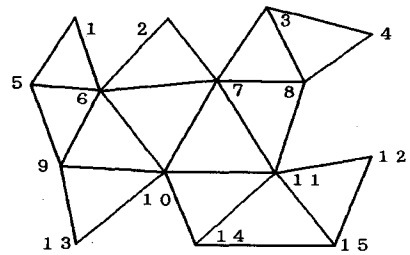


Fig. 3 An example of a simple trilateration net.

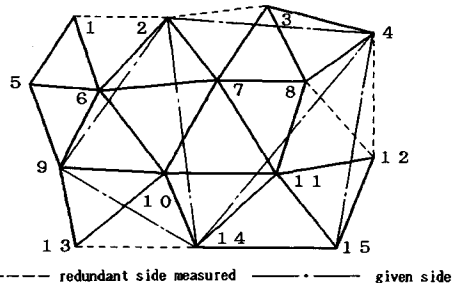


Fig. 4 Redundant sides measured and given sides specified by Fig. 3.

注 1) 三辺網の形状、寸法 (測点の位置) が一義的に定まるものを単純三辺網ということにする。この三辺網は、単列であって分岐してもよいが閉じた構成とはならない。

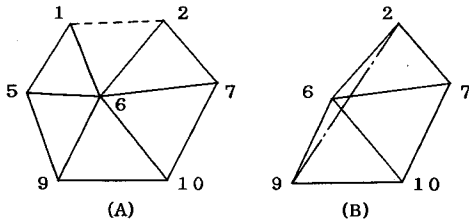


Fig. 5 Examples of two types of single trilateral chains with a constraint.

1個成立する代表的な2種類の単列三辺形鎖の例である。

Fig. 5の(A), (B)の拘束条件の採り方を次のように統一する。(A):単列三辺形鎖(1, 5, 9, 10, 7, 2, 6)の観測辺長の最確値を用いて得られる辺長 $\overline{1, 2}$ と, 余剰観測辺長 $\overline{1, 2}$ の最確値とは等しい。(B):単列三辺形鎖(2, 6, 9, 10, 7)の観測辺長の最確値を用いて得られる辺長 $\overline{2, 9}$ と, 指定辺長 $\overline{2, 9}$ とは等しい。

e) 必要十分な条件式

Fig. 5において, 観測辺長の最確値を用いて算出される単列三辺形鎖の両端点間の距離を \hat{l}_c , 余剰観測辺長の最確値または指定辺長を \hat{l} とすると, 拘束条件は次式で表わせる。

$$\hat{l}_c = \hat{l} \dots \dots \dots (3)$$

したがって, 与えられた三辺網の必要十分な条件式は, すべての余剰観測辺と指定辺とで拘束される単列三辺形鎖を式(3)で表示したものになる。たとえば, Fig. 5(A), (B)については次のように表示すればよい。

$$\hat{l}_{c12} = \hat{l}_{12}, \hat{l}_{c29} = \hat{l}_{29}$$

拘束条件式(3)で三辺網の測点相互の関係位置(三辺網の形状, 寸法)が決定される。

三辺網を与えられた座標系に合致させるときは, 三辺網全体を移動, 回転させればよい。平行移動は任意の1個の既知点で行い, その既知点と他の任意の1個の既知点とを結ぶ方向が, 所定の値になるように三辺網全体を回転させればよい。回転量が未知のときは, 回転量の未知の変数 \hat{Z} を導入し, そのための拘束条件が1個成立することになる。

Fig. 1においては, 辺14, 15の方向が既知であるから

\hat{Z} は不要であるが, もしも測点15が未知点であれば, たとえば既知点14, 2間で \hat{Z} を決定する必要がある。辺14, 2に関する条件式はすでに決定されているから, あとは測点14, 2間の X 座標の差または Y 座標の差が合致(したがって, $\overline{14, 2}$ の方向が合致)するように \hat{Z} を決めればよい。

一般に, 平行移動した既知点から \hat{Z} を決めるための他の既知点 P_e の座標を \hat{X}_e, \hat{Y}_e とし, 平行移動した既知点から \hat{Z} と観測辺長の最確値とを用いて得られる P_e の座標を $\hat{X}_{ce}, \hat{Y}_{ce}$ とすると, 次の拘束条件のいずれかが成立する。

$$\hat{X}_{ce} = \hat{X}_e, \hat{Y}_{ce} = \hat{Y}_e \dots \dots \dots (4)$$

3. 条件式の線形化

式(3)の条件式を観測値の残差に関する線形条件式に直さなければならない。以下はその誘導を示す。

Fig. 6は, 拘束条件が1個成立する単列三辺形鎖の一般形を表わす。図中の記号の意味は次のとおりである。

- XY軸: 任意の平面直角座標軸
 - $P_1(X_1, Y_1), P_e(X_e, Y_e)$: それぞれ単列三辺形鎖の始点, 終点とその座標(X_1, Y_1 の誤差はないものと仮定する)
 - i : 三辺形番号($i=1, 2, \dots, n$)
 - l : 観測辺長(添字のないものは余剰観測辺長)
 - α, α' : 三辺形の角(非測定)
 - β : 辺の方向角(非測定)
 - rt : r は X_e, Y_e の算出に直接使用する辺, t はその番号($t=1, 2, \dots, m$)
 - P_s : rt の付いた辺上の測点とその番号($s=2, 3, \dots, m$)
 - j : 辺長の番号($j=1, 2, \dots, 2n+1$, また $j \geq r_1, r_2, \dots, r_m$)
 - β_{r1} : l_{r1} の方向角(指定値, 誤差はないものと仮定する)
 - $[\alpha]_s$: 測点 P_s におけるすべての角の和
- また, 以下には次の記号を用いるものとする。
- $\hat{\cdot}$: 観測量の最確値, またはこれを用いて得られる量
 - v : 残差($v = \hat{l} - l$, 無添字は余剰観測辺長の残差)
 - δ : 補正(たとえば, $\delta\alpha = \hat{\alpha} - \alpha, \delta\beta_{rt} = \hat{\beta}_{rt} - \beta_{rt}, \delta X_e$

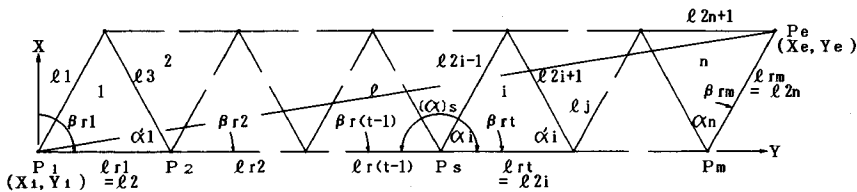


Fig. 6 Notation of a single trilateral chain with a constraint.

$=\hat{X}_e - X_e$ など)

測点 P_e の座標 \hat{X}_e, \hat{Y}_e は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_e &= X_1 + \sum_{t=1}^m (\hat{l}_{rt} \cos \hat{\beta}_{rt}) \\ \hat{Y}_e &= Y_1 + \sum_{t=1}^m (\hat{l}_{rt} \sin \hat{\beta}_{rt}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式 (5) の右辺を変数の近似値のまわりにテーラー展開し、微小量 $v_{rt}, \delta\beta_{rt}$ に関して線形化すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_e &= X_e - \sum_{t=2}^m (\delta\beta_{rt} y_{rt}) + \sum_{t=1}^m (v_{rt} \cos \beta_{rt}) \\ \hat{Y}_e &= Y_e + \sum_{t=2}^m (\delta\beta_{rt} x_{rt}) + \sum_{t=1}^m (v_{rt} \sin \beta_{rt}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$x_{rt} = l_{rt} \cos \beta_{rt}, \quad y_{rt} = l_{rt} \sin \beta_{rt}$$

$$X_e = X_1 + \sum_{t=1}^m x_{rt}, \quad Y_e = Y_1 + \sum_{t=1}^m y_{rt}$$

式 (6) から、 X_e, Y_e の補正 $\delta X_e, \delta Y_e$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta X_e &= - \sum_{t=2}^m (\delta\beta_{rt} y_{rt}) + \sum_{t=1}^m (v_{rt} \cos \beta_{rt}) \\ \delta Y_e &= \sum_{t=2}^m (\delta\beta_{rt} x_{rt}) + \sum_{t=1}^m (v_{rt} \sin \beta_{rt}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

また、辺の方向角は P_1 から P_e に向かって常に左側の角を用いて計算するものとする $\hat{\beta}_{rt}, \beta_{rt}$ は、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_{rt} &= \hat{\beta}_{r(t-1)} - 180^\circ + [\hat{a}]_s \\ \beta_{rt} &= \beta_{r(t-1)} - 180^\circ + [a]_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

で表わせるから、式 (8) の 2 式の差をとれば次式が得られる。

$$\delta\beta_{rt} = \delta\beta_{r(t-1)} + [\delta a]_s \dots\dots\dots (9)$$

式 (7) の 2 式の右辺第 1 項は、式 (9) を代入するとそれぞれ次式で表わせる (負号を除く)。

$$\begin{aligned} \sum_{t=2}^m (\delta\beta_{rt} y_{rt}) &= [\delta a]_2 \sum_{t=2}^m y_{rt} + [\delta a]_3 \sum_{t=3}^m y_{rt} + \dots \\ &\quad + [\delta a]_m y_{rm} \equiv \sum_{s=2}^m \left([\delta a]_s \sum_{t=s}^m y_{rt} \right) \\ \sum_{t=2}^m (\delta\beta_{rt} x_{rt}) &= [\delta a]_2 \sum_{t=2}^m x_{rt} + [\delta a]_3 \sum_{t=3}^m x_{rt} + \dots \\ &\quad + [\delta a]_m x_{rm} \equiv \sum_{s=2}^m \left([\delta a]_s \sum_{t=s}^m x_{rt} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

一方、式 (3) の \hat{l}_c は次式で計算できる。

$$\hat{l}_c = (\hat{X}_e^2 + \hat{Y}_e^2)^{1/2} \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) の右辺を変数の近似値のまわりにテーラー展開し、微小量 $\delta X_e, \delta Y_e$ に関して線形化すると次式が得られる。

$$\hat{l}_c = l_c + \frac{X_e}{l_c} \delta X_e + \frac{Y_e}{l_c} \delta Y_e \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $l_c = (X_e^2 + Y_e^2)^{1/2}$

そして、拘束条件は式 (3) で表わせるから、式 (3) に式 (12), (7) の順で代入し、さらに式 (10) を代入すると次式が得られる。

$$\sum_{s=2}^m ([\delta a]_s D_s) + \sum_{t=1}^m (v_{rt} E_{rt}) - v + w = 0 \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$D_s = \frac{Y_e}{l_c} \sum_{t=s}^m x_{rt} - \frac{X_e}{l_c} \sum_{t=s}^m y_{rt}$$

$$E_{rt} = (X_e/l_c) \cos \beta_{rt} + (Y_e/l_c) \sin \beta_{rt}$$

$$w = l_c - \hat{l}$$

さて、 $\delta a_i, \delta a'_i$ は Fig. 6 の三辺形 i の各辺の記号を用いて次式で表わせる⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \delta a_i &= A_i v_{2i} + B_i v_{2i+1} + C_i v_{2i-1} \\ \delta a'_i &= A'_i v_{2i+1} + B'_i v_{2i-1} + C'_i v_{2i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$A_i = -(l_{2i}^2 + l_{2i+1}^2 - l_{2i-1}^2) / (2 \sin \alpha_i l_{2i} l_{2i-1})$$

$$B_i = l_{2i+1} / (\sin \alpha_i l_{2i} l_{2i-1})$$

$$C_i = -(-l_{2i}^2 + l_{2i+1}^2 + l_{2i-1}^2) / (2 \sin \alpha_i l_{2i} l_{2i-1})$$

$$\alpha_i = \cos^{-1} [(l_{2i}^2 - l_{2i+1}^2 + l_{2i-1}^2) / (2 l_{2i} l_{2i-1})]$$

であり、 A_i, B_i, C_i, α_i は A, B, C, α の式中で、 $l_{2i}, l_{2i+1}, l_{2i-1}$ をそれぞれ $l_{2i+1}, l_{2i-1}, l_{2i}$ に代えたものである。

式 (13) の $[\delta a]_s$ に式 (14) を代入して、 v_j と v とに関する次の形の線形条件式が得られる。

$$\sum_{j=1}^{2m+1} (a_j v_j) - v + w = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 a_j は l_j の関数、 l_j が既知辺であれば $v_j = 0$ 、 l が指定辺であれば $v = 0$ 、 $w = l_c - \hat{l}$ である。

次に、式 (4) の線形条件式を誘導する。Fig. 6 において、 P_1, P_e を既知点と考えこれらの座標をそれぞれ $(\hat{X}_1, \hat{Y}_1), (\hat{X}_e, \hat{Y}_e)$ とする。そして、 P_1 を平行移動した既知点とし、辺 $\overline{P_1 P_e}$ の方向を正しく合わせるため β_{r1} を回転量の未知の変数 \hat{Z} にすると、 \hat{Z} と観測辺長の最確値とを用いた P_e の X 座標 \hat{X}_{ce} は次式から求められる。

$$\hat{X}_{ce} = \hat{X}_1 + \hat{l}_{r1} \cos \hat{Z} + \sum_{t=2}^m (\hat{l}_{rt} \cos \hat{\beta}_{rt}) \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $\hat{Z} = \tilde{Z} + Z$ (\tilde{Z} は \hat{Z} の近似値、 Z は \tilde{Z} の補正) とおけば式 (16) 中の $\hat{\beta}_{rt}$ は、

$$\hat{\beta}_{rt} = \tilde{Z} + Z + \beta_{rt} + \delta\beta_{rt} + \text{定数}$$

で表わせるから式 (16) を変数の近似値のまわりにテーラー展開し、微小量 $v_{rt}, \delta\beta_{rt}, Z$ に関して線形化し、式 (10) の第 1 式を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{X}_{ce} &= X_{ce} - \sum_{s=2}^m \left([\delta a]_s \sum_{t=s}^m y_{rt} \right) \\ &\quad + \sum_{t=1}^m (v_{rt} \cos \beta_{rt}) - \sum_{t=1}^m y_{rt} Z \end{aligned} \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 X_{ce} は式 (6) の X_e の式において、 X_1 の代わりに \hat{X}_1 を用いたもの、 $\delta\alpha$ は式 (14) の値である。

式 (17) を拘束条件式 (4) の第 1 式に代入すると、次の形の線形条件式が得られる。

$$\sum_{j=1}^{2n+1} (a_{xj} v_j) - b_x Z + w_x = 0 \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 a_{xj} は l_j の関数、 b_x は式 (17) の右辺第 4 項の Z の係数、 $w_x = X_{ce} - \hat{X}_e$ 、 l_j が既知辺であれば $v_j = 0$ である。

同じようにして、式 (4) の第 2 式に関する線形条件式も得られる。

4. 三辺網の調整

式 (15) の線形条件式を用いて最小二乗法により三辺網を調整すればよく、三辺網を所定の座標系に合致させるときは、さらに式 (18) を援用すればよい。以下、一般化するため式 (18) を併用する場合、すなわち観測した未知量と観測しない未知量とを条件式に含む調整計算として取り扱う。この場合の最小二乗法を適用するときの記号、式を行列表示すると次のようである^{6),7)}。

q : 条件式数、 l : 観測値、 \hat{l} : 観測量の最確値、 P : 観測値の重み行列、 $Q = P^{-1}$: 観測値の重み係数行列、 $v = \hat{l} - l$: 残差、 k : 観測しない未知量個数、 \hat{Z} : 観測しない未知量 (回転量の未知の変数)、 \tilde{Z} : \hat{Z} の近似値、 $Z = \hat{Z} - \tilde{Z}$: \tilde{Z} の補正、 λ : 未定係数、 $Av + BZ + w = 0$: 残差と補正とで表わした線形条件式 (w : 定数、 l と Z との関数)、 $Z = -(B^T N^{-1} B)^{-1} B N^{-1} w$ ここに、 $N = AQA^T$ 、 $\lambda = -N^{-1} (BZ + w)$ 、 $v = QA^T \lambda$ 、 $\sigma_0^2 = (v^T P v) / (q - k)$: 重み 1 の観測の分散

以下、ことわりのないとき Q はこの添字 1 文字の量の重み係数行列を示す。

$$Q_{22} = (B^T N^{-1} B)^{-1}, \quad Q_{\lambda\lambda} = N^{-1} - N^{-1} B Q_{22} B^T N^{-1},$$

$$Q_{vv} = QA^T Q_{\lambda\lambda} A Q, \quad Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q - Q_{vv},$$

$$Q_{22,\hat{l}} = -Q_{22} B^T N^{-1} A Q : \hat{Z} \text{ と } \hat{l} \text{ との重み係数行列},$$

$$\hat{g}^T = (\hat{Z}^T, \hat{l}^T) : \hat{Z} \text{ と } \hat{l} \text{ との合成},$$

$$Q_{\hat{g}\hat{g}} = \begin{pmatrix} Q_{22} & Q_{22,\hat{l}} \\ Q_{22,\hat{l}} & Q_{\hat{l}\hat{l}} \end{pmatrix}$$

\hat{u} が次のように \hat{g} の線形関数で表わせるとき、

$$\hat{u} = F \hat{g} \dots\dots\dots(19)$$

\hat{u} の重み係数行列 $Q_{\hat{u}\hat{u}}$ は次式で求められる。

$$Q_{\hat{u}\hat{u}} = F Q_{\hat{g}\hat{g}} F^T \dots\dots\dots(20)$$

また、分散共分散行列の計算は簡単であり、たとえば \hat{l} の分散共分散行列 $\Sigma_{\hat{l}\hat{l}}$ は次式で求められる。

$$\Sigma_{\hat{l}\hat{l}} = Q_{\hat{l}\hat{l}} \sigma_0^2$$

本文の計算では、 $k=1$ の場合のみであり、式 (18) を併用しないときは $B=0$ に相当し、 $\hat{g} = \hat{l}$ 、 $Q_{\hat{g}\hat{g}} = Q_{\hat{l}\hat{l}}$ になる。

5. 諸量の重み係数行列の計算

(1) 微小変動を含む諸量の表示

角 $\hat{\alpha}_i$ 、 $\hat{\alpha}'_i$ は式 (14) の α_i 、 α'_i の式において、観測値を観測量の最確値に代えたものから求められる。そして、これら 2 式の右辺を変数の最確値のまわりにテーラー展開すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i &= \hat{A}_i \delta \hat{l}_{2i} + \hat{B}_i \delta \hat{l}_{2i+1} + \hat{C}_i \delta \hat{l}_{2i-1} + \text{定数} \\ \hat{\alpha}'_i &= \hat{A}'_i \delta \hat{l}_{2i+1} + \hat{B}'_i \delta \hat{l}_{2i-1} + \hat{C}'_i \delta \hat{l}_{2i} + \text{定数} \end{aligned} \dots\dots\dots(21)$$

ここに、 \hat{A}_i 、 \hat{B}_i 、 \hat{C}_i 、 \hat{A}'_i 、 \hat{B}'_i 、 \hat{C}'_i は、式 (14) の A_i 、 B_i 、 C_i 、 α_i 、 A'_i 、 B'_i 、 C'_i の式において、観測値を観測量の最確値に代えたものである。以下、 $\hat{\alpha}_i$ 、 $\hat{\alpha}'_i$ をすべてまとめて $\hat{\alpha}$ と表示する。

方向角 $\hat{\beta}_{rt}$ は式 (8) の第 1 式から求められ、この式の右辺を変数の最確値のまわりにテーラー展開すると次式が得られる。

$$\hat{\beta}_{rt} = \delta \hat{\beta}_{r(t-1)} + [\delta \hat{\alpha}]_s + \text{定数} \dots\dots\dots(22)$$

r の付かない辺の方向角も式 (22) と同じ形で表わせるから、以下これらをすべてまとめて $\hat{\beta}$ と表示する。

測点 P_s の座標 \hat{X}_s 、 \hat{Y}_s は Fig. 6 より次式で得られる。

$$\begin{aligned} \hat{X}_s &= \hat{X}_1 + \sum_{t=1}^{s-1} (\hat{l}_{rt} \cos \hat{\beta}_{rt}) \\ \hat{Y}_s &= \hat{Y}_1 + \sum_{t=1}^{s-1} (\hat{l}_{rt} \sin \hat{\beta}_{rt}) \end{aligned} \dots\dots\dots(23)$$

式 (23) の右辺を変数の最確値のまわりにテーラー展開すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{X}_s &= \sum_{t=1}^{s-1} (\cos \hat{\beta}_{rt} \delta \hat{l}_{rt} - \hat{l}_{rt} \sin \hat{\beta}_{rt} \delta \hat{\beta}_{rt}) + \text{定数} \\ \hat{Y}_s &= \sum_{t=1}^{s-1} (\sin \hat{\beta}_{rt} \delta \hat{l}_{rt} + \hat{l}_{rt} \cos \hat{\beta}_{rt} \delta \hat{\beta}_{rt}) + \text{定数} \end{aligned} \dots\dots\dots(24)$$

r の付かない辺上の測点の座標も式 (24) と同じ形で表わせるから、以下これらをすべてまとめて \hat{X}_s 、 \hat{Y}_s と表示する。

なお、式 (21)、(22)、(24) の $\delta \hat{l}_{2i}$ 、 $\delta \hat{\beta}_{r(t-1)}$ 、 $\delta \hat{l}_{rt}$ などは、それぞれ \hat{l}_{2i} 、 $\hat{\beta}_{r(t-1)}$ 、 \hat{l}_{rt} などと同じ誤差を含む量と考えればよく、 $\hat{\beta}_{rt}$ は \hat{Z} と考えればよい。

(2) 座標の重み係数行列

座標の重み係数行列は、式 (21)、(22)、(24) で表示した諸量を用いて、次の順序で組織的に計算できる。

a) \hat{g} 、 $\hat{\alpha}$ の重み係数行列 $Q_{\hat{g}\hat{\alpha}}$

\hat{g} 、 $\hat{\alpha}$ をまとめて \hat{e} と表示し、これを式 (19) の形にまとめて $\hat{e} = F_1 \hat{g}$ と表わせば、 \hat{e} の重み係数行列 $Q_{\hat{e}\hat{e}}$ は式 (20) より次式で計算できる。 $Q_{\hat{e}\hat{e}} = F_1 Q_{\hat{g}\hat{\alpha}} F_1^T$

b) \hat{g} 、 $\hat{\beta}$ の重み係数行列 $Q_{\hat{g}\hat{\beta}}$

\hat{g} 、 $\hat{\beta}$ をまとめて \hat{t} と表示し、これを式 (19) の形に

まとめて $\hat{t} = F_2 \hat{e}$ と表わせば、 \hat{t} の重み係数行列 $Q_{\hat{t}\hat{t}}$ は式 (20) より次式で計算できる。 $Q_{\hat{t}\hat{t}} = F_2 Q_{\hat{e}\hat{e}} F_2^T$

c) \hat{X}_s, \hat{Y}_s の重み係数行列 $Q_{\hat{X}_s\hat{X}_s}, Q_{\hat{Y}_s\hat{Y}_s}$

\hat{X}_s, \hat{Y}_s を式 (19) の形にまとめて $\hat{X}_s = F_3 \hat{t}, \hat{Y}_s = F_4 \hat{t}$ と表わせば、 \hat{X}_s, \hat{Y}_s の重み係数行列 $Q_{\hat{X}_s\hat{X}_s}, Q_{\hat{Y}_s\hat{Y}_s}$ は式 (20) より次式で計算できる。

$$Q_{\hat{X}_s\hat{X}_s} = F_3 Q_{\hat{t}\hat{t}} F_3^T, Q_{\hat{Y}_s\hat{Y}_s} = F_4 Q_{\hat{t}\hat{t}} F_4^T$$

なお、角と方向角 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ のみの重み係数行列 $Q_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}, Q_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$ は、それぞれ $Q_{\hat{e}\hat{e}}, Q_{\hat{t}\hat{t}}$ から $Q_{\hat{e}\hat{e}}$ を除いたものになる。

条件式がない場合の諸量の分散共分散行列の計算は、次のようにすればよい。

u' が観測値 l (互いに独立) の線形関数 ($u' = F'l$) で表わせるとき、 l の分散共分散行列 Σ (観測値の分散のみの対角行列) が既知であれば、 u' の分散共分散行列 $\Sigma_{u'u'}$ は式 (20) と同じ形の $\Sigma_{u'u'} = F' \Sigma F'^T$ で表わせる。したがって、(1) の式 (21), (22), (24) および (2) において、記号 $\hat{\cdot}$ をすべて除いた記号を用い、a) の $\hat{g}, Q_{\hat{g}\hat{g}}$ をそれぞれ l, Σ に代え、以後の Q の付いた量を分散共分散行列を表わす Σ の量に読み代えればよい。

6. 三辺測量鎖の誤差特性

特定の網に対する三辺測量などの実施例によって、座標誤差を比較検討したものに、Wolf らの研究⁸⁾があるが、本文では単純な(規則的な)三辺測量鎖を対象にして、その座標誤差などの特性を調べることにする。

(1) 単列三辺形鎖

Fig. 7 のような記号を付けた 9 個の正三辺形から成る、拘束条件のない単列三辺形鎖について数値計算を実施した。その結果の一部の諸量の誤差(分散)を示すと

Table 1 Variances of angles, directions and coordinates of stations in the chain without constraint.

Angle	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$				
$6 \sigma^2$	2.0				
Direction	β_1	β_3	β_5	β_7	β_9
$6 \sigma^2$	0	22/3	30/3	38/3	46/3
Station	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9
$6 \sigma^2$	0.0	22/3	82/3	196/3	380/3
$6 \sigma^2$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
$6 \sigma^2$	1.0	28/3	91/3	208/3	395/3

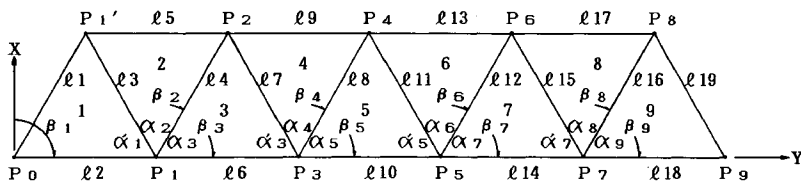


Fig. 7 Notation of a single trilateral chain without constraint.

Table 1 のとおりである。ただし、観測辺長 $l_1 \sim l_9$ は互いに独立で全部 1、その分散 σ^2 も全部 1 とし、 P_0 と P_9 、 P_1 方向固定 ($\beta_1 = 90^\circ$, 誤差はなし) と仮定したときの値である。表中の σ_p^2 は $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$ で得られる量(以下、位置誤差という)であり、これは座標軸の回転に無関係な量で、誤差楕円に代えてこれで測点の位置誤差を評価できる⁹⁾。

この鎖の諸量の誤差の特徴として、Table 1 から次のことがいえる。

- i) 角の誤差は全部等しく 2 である。
- ii) 辺 $l_6, l_{10}, l_{14}, l_{18}$ の方向角の誤差は 8/3 ずつ 1 次式で増える。
- iii) σ_x^2 は i (以下、奇数) に関して正しく 3 次式で増える (i に関して 3 次差分が同じ)。 σ_y^2 は i に関して正しく 1 次式で増える。 σ_p^2 は i に関して正しく 3 次式で増える (i に関して 3 次差分が同じ)。
- iv) P_0 から離れるに従い、 Y 座標の誤差に比べて X 座標の誤差がきわめて大きくなる。換言すれば、片持ばりの曲げ変形量に似た誤差の増え方をする。

(2) 拘束条件を付けた単列三辺形鎖

Fig. 7 において、次の①~⑦の拘束条件を付けた単列三辺形鎖について考える。拘束条件は、余剰観測辺長(または指定辺長)、その数、その誤差(分散)の仮定の順に記すと次のとおりである。

- ①: $P_0, P_9 = l_{20}; 1; l_{20}\sigma^2$ (中距離観測)
- ②: $P_0, P_9 = 1; \text{なし}$ (きわめて高精度の観測)
- ③: P_0, P_9 が既知点; 2; なし
- ④: $P_0, P_2, P_1, P_4, P_3, P_6, P_5, P_8, P_6, P_9; 5; \sigma^2$
- ⑤: ④と $P'_1, P_3, P_2, P_5, P_4, P_7; 8; \sigma^2$
- ⑥: ①と⑤; 9; ①と⑤と同じ
- ⑦: ①と $P_0, P_9, P'_1, P_9; 3; ①$ と同じ

ただし、単列三辺形鎖の辺長とその分散、1 点 1 方向固定の仮定は (1) と同じである。

これらの余剰観測辺(指定辺) 1 個ごとに式 (15) で表わした線形条件式が 1 個ずつ得られ、③については他に式 (18) で表わした線形条件式が得られるので、これらを用いて前述の方法で調整し諸量の重み係数行列を計算することになる。拘束条件①, ②, ③に対して、このようにして実施した数値計算の結果の一部の誤差(以下、重み係数をいう)を示すと Table 2 のようである。

Table 2 Cofactors of sides, angles, directions and coordinates of stations in the chain with various constraints.

Constraint	Side	$\ell 2, \ell 6, \ell 10, \ell 14, \ell 18$	$\ell 20$	Other		
①	Q $\ell\ell$	0.90	2.50	1.00		
②		0.80	0.00	1.00		
③		0.80	0.00	1.00		
Constraint	Angle	$\hat{\alpha} 2, \hat{\alpha} 4, \hat{\alpha} 6, \hat{\alpha} 8$	Other			
①	Q $\hat{\alpha}\hat{\alpha}$	2.00	1.97			
②		2.00	1.93			
③		2.00	1.93			
Constraint	Direction	$\beta 1$	$\beta 3$	$\beta 5$	$\beta 7$	$\beta 9$
①	Q $\beta\beta$	0.0	7.2	9.5	11.5	13.2
②		0.0	7.1	8.9	10.3	11.1
③		4.0	3.2	2.9	3.2	4.0
Constraint	Station	P ₁	P ₃	P ₅	P ₇	P ₉
①	Q $\times\times$	0.0	7.2	26.1	60.5	113
②		0.0	7.1	24.9	55.7	100
③		4.0	7.3	7.3	4.0	0.0
①	Q $\hat{\gamma}\hat{\gamma}$	0.9	1.6	2.1	2.4	2.5
②		0.8	1.2	1.2	0.8	0.0
③		0.8	1.2	1.2	0.8	0.0
①	Q $P P$	0.9	8.8	28.2	62.9	116
②		0.8	8.3	26.1	56.5	100
③		4.8	8.5	8.5	4.8	0.0

表中の Q PP は Q $\hat{\gamma}\hat{\gamma}$ + Q $\hat{\gamma}\hat{\gamma}$ の量 (以下, 位置誤差という) である。

Table 2 から, 観測値の誤差が観測量の最確値やこれから得られる諸量の誤差に伝播する様子を読み取れる。

ここで, 重み 1 の観測の分散を σ_0^2 とすると, $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 1$ (理想的な観測) と仮定するとき, Table 1 の値は重み係数と考えることができる。以下, Table 1 と他の表とを比較するときはそのように取り扱うものとする。

Table 1, 2 を比較すると, 各拘束条件ごとの誤差の特徴として次の点が挙げられる。

- i) ①, ②の諸量の誤差の増大傾向は, 単列三辺形鎖のそれと似ている。
- ii) ①は視通が確保できれば, 観測辺数が 1 個増すに過ぎないが座標誤差軽減のためやや有効である。
- iii) ②は①と比べて, 高性能の測距儀を使用しなければならぬ割にそれほど効果があるとはいえない。
- iv) ③は座標誤差が鎖の中央に関して左右対称となり, 既知点から離れるに従い緩やかに増え, その量は他の拘束条件と比べてきわめて小さく, 換言すれば, 両端回転支持のはりの曲げ変形量に似た誤差の増え方をする。座標誤差軽減のためにはきわめて有利な拘束条件である。

拘束条件④~⑦についても数値計算を実施し, その結果の位置誤差の一部をまとめたものが Table 3 である。

Table 1, 2, 3 の位置誤差を比較して, 次のことがいえる。

- i) ④は位置誤差軽減のため幾分有効であるが, ⑤の

Table 3 Cofactors of positions of stations in the chain with various constraints.

Constraint	Station	P ₁	P ₃	P ₅	P ₇	P ₉
④	Q $P P$	0.9	7.5	24.0	56.4	109
⑤		0.9	6.9	22.3	53.6	107
⑥		0.8	6.4	19.9	46.2	87.2
⑦		0.8	8.4	27.4	61.8	114

ように 2 個の三辺形の対角線長を全部測っても④と比べてあまり効果がない。

- ii) 一般に余剰観測辺数が多いほど, 位置誤差は軽減するが, ⑤に鎖の両端点間を拘束する条件を 1 個加えた⑥は, 位置誤差軽減の効果が大きい。

(3) 有心六辺形鎖

Fig. 8 のような記号を付けた正三辺形から成る有心六辺形鎖 (a), (b) について考える。(a) は P₀ と β_1 (90°) 固定, (b) は P₀ と P₉ が既知点の場合である。

(a) については Fig. 8 において, 辺 2, 4, 6, 8, 8, 10 を除いたものを単純三辺網として選定でき, したがってこれら 4 個の辺を余剰観測辺として特定できるから, これらを式 (15) で表わした条件式ができる。

(b) については, (a) の外に辺 P₀, P₉ を指定辺として特定できるからこの分の条件式が 1 個追加され, さらに与えられた座標系に合致させるため式 (18) で表わした条件式を援用することになる。

このようにして数値計算を実施した結果について, 一部の測点の座標誤差を掲げると, Table 4 のとおりである。ただし, 全部の観測辺長とその分散をそれぞれ 1 としたときの値である。

Table 1, 2, 3, 4 を比較したこの鎖 (a) の特徴は, 配置できる測点数が多く観測辺数が比較的少ない割に,

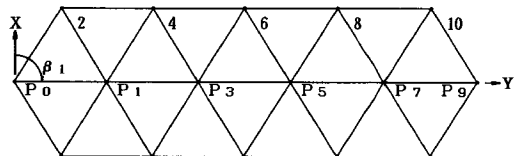


Fig. 8 Notation of a trilaterated hexagonal chain. (Type (a) : P₀ and β_1 (90°) are fixed, Type (b) : P₀ and P₉ are fixed.)

Table 4 Cofactors of coordinates of stations in the trilaterated hexagonal chain.

Type	Station	P ₁	P ₃	P ₅	P ₇	P ₉
a)	Q $\times\times$	0.0	3.3	11.3	25.3	46.7
	Q $\hat{\gamma}\hat{\gamma}$	0.9	1.5	1.8	2.2	2.8
	Q $P P$	0.9	4.8	13.1	27.5	49.5
b)	Q $\times\times$	1.9	3.3	3.3	1.9	0.0
	Q $\hat{\gamma}\hat{\gamma}$	0.7	0.9	0.9	0.7	0.0
	Q $P P$	2.6	4.2	4.2	2.6	0.0

他と比べて X 座標誤差の増え方が緩やかで小さくした
 がって位置誤差も小さいことである。位置誤差軽減のためには有利な鎖である。また、(b) は拘束条件③の単
 列三辺形鎖の位置誤差の特徴と同じ傾向にあり、位置誤
 差からみてきわめて有利な鎖といえる。

(4) 四辺形鎖

Fig. 9 のような記号を付けた、対角線が 2 個ある正四
 辺形から成る四辺形鎖 (a), (b) について考える。た
 だし、(a), (b) は (3) と同じ場合であり、(3) と
 同じように考え (a) の条件式は 5 個、(b) のそれは
 6 個と式 (18) を援用することになる。

数値計算の結果の一部を座標誤差について示すと
 Table 5 のようになる。ただし、全部の観測辺長の分散
 を 1 としたときの値である。

Table 1~Table 5 を比較して次のことがいえる。

- i) (a) は配置できる測点数に比べて観測辺数が多い割に、有心六辺形鎖 (a) と比較して座標誤差の軽減が少ない。しかし、拘束条件①~⑦ (③を除く) のいずれの単列三辺形鎖の位置誤差より小さい。
- ii) (b) は拘束条件③の単列三辺形鎖、有心六辺形鎖 (b) と同様に位置誤差からみてきわめて有利な鎖である。

(5) 単列三角形鎖との比較

Fig. 10 のような記号を付けた t (奇数とする) 個の正
 三角形から成り、1 個の三角形につき 1 個の角条件のある
 単列三角形鎖について考える。角 a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, \dots, t$) をそれぞれ独立した観測量の最確値とし、 l_i を
 基線、測点 P_0 と β_1 (90°) を固定とすると、測点 P_t の
 X 座標 \hat{X}_t は次式で求められる。

$$\hat{X}_t = \sum_{i=1}^t (\hat{l}_i \cos \hat{\beta}_i) = \sum_{s=1}^t \left\{ l_i \left(\prod_{i=1}^{s-1} \frac{\sin a_i}{\sin b_i} \right) \left(\frac{\sin c_i}{\sin b_i} \right)_{i=s} \right.$$

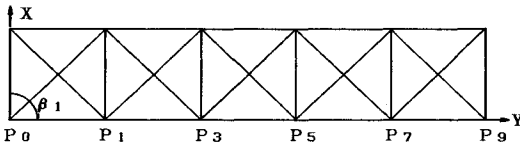


Fig. 9 Notation of a quadrilateral chain.

(Type (a) : P_0 and β_1 (90°) are fixed, Type (b) : P_0 and P_9 are fixed.)

Table 5 Cofactors of coordinates of stations in the quadrilateral chain.

Type	Station	P ₁	P ₃	P ₅	P ₇	P ₉
(a)	Q _{xx}	0.0	4.4	16.1	39.9	79.7
	Q _{yy}	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5
	Q _{pp}	0.9	6.2	18.8	43.5	84.2
(b)	Q _{xx}	2.3	4.1	4.1	2.3	0.0
	Q _{yy}	0.7	1.1	1.1	0.7	0.0
	Q _{pp}	3.0	5.2	5.2	3.0	0.0

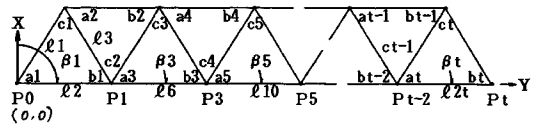


Fig. 10 Notation of a single row triangles.

$$\times \cos \sum_{i=3}^t (\beta_i + a_i + c_{i-1} + b_{i-2} + \text{定数}) \dots (25)$$

角の観測値の重みを全部等しく 1 と仮定すると、角の最
 確値の重み係数は周知のとおり次式で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{a_i, a_i} &= Q_{b_i, b_i} = Q_{c_i, c_i} = 2/3 \\ Q_{a_i, b_i} &= Q_{a_i, c_i} = Q_{b_i, c_i} = -1/3 \\ Q_{a_i, a_j} &= \dots = Q_{a_i, b_j} = \dots = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

式 (25), (26) を用いて重み係数伝播の法則を適用する
 と、 \hat{X}_t の重み係数 $Q_{\hat{X}_t, \hat{X}_t}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} Q_{\hat{X}_t, \hat{X}_t} &= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^t \left\{ \left(\frac{\partial \hat{X}_t}{\partial a_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{X}_t}{\partial b_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{X}_t}{\partial c_i} \right)^2 \right\} \\ &+ 2 \left(-\frac{1}{3} \right) \sum_{i=1}^t \left(\frac{\partial \hat{X}_t}{\partial a_i} \frac{\partial \hat{X}_t}{\partial b_i} + \frac{\partial \hat{X}_t}{\partial a_i} \frac{\partial \hat{X}_t}{\partial c_i} \right. \\ &\left. + \frac{\partial \hat{X}_t}{\partial b_i} \frac{\partial \hat{X}_t}{\partial c_i} \right) \dots (27) \end{aligned}$$

同じようにして P_t の Y 座標 \hat{Y}_t の重み係数 $Q_{\hat{Y}_t, \hat{Y}_t}$ も
 得られる。 $l_i=1$ として数値計算を行った結果は Table
 6 のとおりである。

この鎖の座標 (位置) 誤差 Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{pp} は、それぞ
 れ t (三角形奇数番目) に関して 3 次式で増大する (t
 に関して 3 次差分が同じ) ことがわかる。

また、測角と測距の重みを同じく 1 と仮定したとき、
 Table 1~Table 6 を比較して次のことがいえる。

- i) 単列三角形鎖の座標誤差は、三辺測量鎖のそれと異なり X, Y 座標誤差が同程度であり、 Q_{yy} は三辺測量鎖と比べて相当大きく、その代わり Q_{xx} は四辺形鎖よりも小さく、有心六辺形鎖に相当する位の値である。
- ii) 単列三角形鎖の位置誤差は、拘束条件⑥の単列三辺形鎖や四辺形鎖 (a) より幾分大きく、拘束条件②の単列三辺形鎖とはほぼ等しく、有心六辺形鎖の約 2 倍である。

測角の重みを 1 として、光波測距儀を用いる測距の重
 み p' は次式で表わせる¹⁰⁾。

$$p' = (\sigma_a l)^2 / (\sigma_l^2 + \gamma^2 l^2) \dots (28)$$

Table 6 Cofactors of coordinates of stations in the single row triangles.

Station	P ₁	P ₃	P ₅	P ₇	P ₉
Q _{xx}	0	6/3	26/3	68/3	140/3
Q _{yy}	2/3	10/3	32/3	76/3	150/3
Q _{pp}	2/3	16/3	58/3	144/3	290/3

ここに、 σ_α は測角の一方向の標準偏差、 l は測定距離、 σ_l は距離に無関係な標準偏差、 γ は距離による誤差の比例定数である。

たとえば、国土地理院の一次、二次基準点測量（以下、一次、二次という）の σ_α 、 σ_l 、 γ の標準は次のようである¹¹⁾。

一次： $\sigma_\alpha = \pm 1.0''$ 、 $\sigma_l = \pm 5 \text{ mm}$ 、 $\gamma = \pm 2 \times 10^{-6}$

二次： $\sigma_\alpha = \pm 1.4''$ 、 $\sigma_l = \pm 10 \text{ mm}$ 、 $\gamma = \pm 3 \times 10^{-6}$

ただし、 l は m 単位、 l の平均長は一次で 8 km、二次で 4 km である。そうすると、式 (28) から一次、二次ではそれぞれ $p' = 5.4$ 、 $p' = 3.0$ となる。いま、逆に考えて測距の重みを 1 としてこれを基準にすると、測角の重みはそれぞれ 1/5.4、1/3.0 となる。

二次基準点測量のときを考えることにすると、角の最確値の重み係数は式 (26) の 3 倍の値になる。したがって式 (27) より得られた (Q_{P_k, P_k} についても同じ) Table 6 の値は 3 倍となる。

そこで、Table 6 の値を 3 倍に考えるとき、Table 1 ~ Table 6 を通覧して次のことがいえる。

- i) 位置誤差からみて、拘束条件のない単列三辺形鎖でさえ単列三角形鎖の精度より高い。
- ii) 各種の拘束条件を付けた単列三辺形鎖、有心六辺形鎖、四辺形鎖は、単列三角形鎖の精度より格段に高い。

(6) 角と距離とを測った四角形鎖との比較

Fig. 11 のような記号を付けた角と距離とを測った正方形 6 個から成る四角形鎖の座標誤差は、Table 7 のようである¹²⁾。ただし、全部の辺長を 1、角は 90° または 180° 、測角と測距の重みはすべて等しく 1、そして、 P_0 と $\beta_1 (90^\circ)$ 固定としたときの値である。

Table 1 ~ Table 7 を比較して次のことがいえる。

- i) 四角形鎖の座標誤差の増大傾向は三辺測量鎖のそれに似ている。

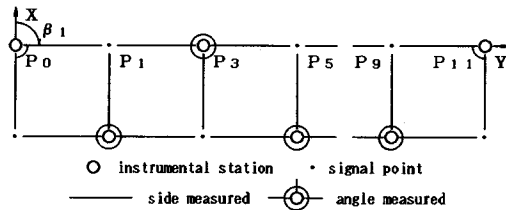


Fig. 11 Notation of a quadrangle chain.

Table 7 Cofactors of coordinates of stations in the quadrangle chain.

Station	P1	P3	P5	P7	P9	P11
Q x x	0.8	4.2	12.8	30.0	58.1	100.5
Q y y	0.8	1.7	2.5	3.4	4.2	5.1
Q p p	1.6	5.9	15.3	33.4	62.3	105.6

- ii) 拘束条件が 11 個もある四角形鎖の位置誤差は、拘束条件①~⑦ (③を除く) を付けた単列三辺形鎖、四辺形鎖 (a) より少ないが、拘束条件が 4 個しかない有心六辺形鎖 (a) のそれよりは大きい。

(7) 実用的な三辺測量鎖の誤差の推定式

以上の事実から、三辺測量鎖として新設測点数の割に観測数の少ない拘束条件①型の単列三辺形鎖と有心六辺形鎖は、実用上の有用性があるものと考えられる。以下に、これら 2 種類の鎖を計画する場合の一資料を提示する。

未知点数を p 、未知点の位置誤差の合計を ΣQ とすると、図形の強さのみを考えた鎖の総合精度は $\Sigma Q/p$ で表わせる¹³⁾。また、未知点の位置誤差の最大値を Q_{max} とすると、これら 2 つの指標の許容値が与えられたとすると、 $\Sigma Q/p$ 、 Q_{max} がこれ以下になるように鎖を計画すればよい。計画する鎖の三辺形がほぼ正三辺形であるものと仮定するときの、二種類の鎖の $\Sigma Q/p$ と Q_{max} の推定式を求める。

Fig. 7, 8 において、接続三辺形数または有心六辺形数を n とし、 n を変化させたときの数値計算を実施し、 n と $\Sigma Q/p$ 、 Q_{max} との値をまとめると Table 8 のとおりになる。ただし、Fig. 7, 8 に示した P_0 と $\beta_1 (90^\circ)$ 固定を (a)、鎖の両端点が既知点とした場合を (b) とし、観測辺長の誤差の仮定は前述と同じである。

$\Sigma Q/p$ 、 Q_{max} を n の 3 次式 (一部 2 次式) と仮定し、Table 8 の値から最小二乗法で得られた結果は次のようである。

拘束条件①型の単列三辺形鎖 (a)

$$\Sigma Q/p = 0.023 n^3 + 0.227 n^2 + 0.189 n + 1.06$$

$$Q_{max} = 0.090 n^3 + 0.610 n^2 + 0.117 n - 0.28$$

拘束条件①型の単列三辺形鎖 (b)

$$\Sigma Q/p = 0.002 n^3 + 0.029 n^2 + 0.110 n + 1.74$$

$$Q_{max} = 0.005 n^3 - 0.006 n^2 + 0.531 n + 0.83$$

有心六辺形鎖 (a)

Table 8 Relation between $\Sigma Q/p$, Q_{max} and n .

Single trilateral chain with constraints							
Type	n	$\Sigma Q/p$	Q_{max}	Type	n	$\Sigma Q/p$	Q_{max}
(a)	3	4.3	8.0	(b)	3	2.4	2.5
	5	10.6	26.8		5	3.2	4.0
	9	38.2	115.8		9	6.4	8.8
	13	93.3	302.0		13	11.9	17.9
	17	184.9	620.0		17	20.6	33.1
Trilaterated hexagonal chain							
Type	n	$\Sigma Q/p$	Q_{max}	Type	n	$\Sigma Q/p$	Q_{max}
(a)	1	3.4	5.0	(b)	1	2.1	2.3
	2	6.1	13.4		2	2.3	2.8
	3	10.5	27.8		3	2.9	3.5
	4	17.1	49.5		4	3.7	4.9
	5	26.1	79.8		5	4.7	6.4

$$\sum Q/p = 0.058 n^3 + 0.532 n^2 + 0.674 n + 2.14$$

$$Q_{\max} = 0.217 n^3 + 1.700 n^2 + 1.783 n + 1.30$$

有心六辺形鎖 (b)

$$\sum Q/p = 0.129 n^2 - 0.111 n + 2.06$$

$$Q_{\max} = 0.193 n^2 - 0.127 n + 2.24$$

なお、上式で得られる $\sum Q/p$, Q_{\max} を標準偏差に直して用いる場合は、これらの値に σ_0^2 (予測値) をかけてその平方根をとればよい。

7. 結 言

本文により、三辺網の図形調整のための必要十分な条件式を、どのような複雑な三辺網についても誤りなく規則的に機械的に作成することができる。この方法は、複雑な水準測量網や多角測量網などの図形調整のための必要十分な条件式の作成に応用できる。

また、図形調整法の利点を活かして、残差、観測量の最確値とその重み係数行列や、これから得られる角、方向角、座標とその重み係数行列の算出などの一連の計算を、手近なパーソナルコンピュータを用いて組織的に迅速に正確に実行できることを示した。

そして、数値計算で得られた結果 (重み係数, 分散) を用いて単列三辺形鎖や数種の拘束条件を付けた単列三辺形鎖の誤差の伝播状況を示し、いくつかの三辺測量鎖について座標誤差の特徴を明らかにすることができた。

さらに、従来の単列三角測量鎖、角と距離とを測った四角形鎖の座標誤差と比較することによって、本文に掲げた三辺測量鎖の精度を検討し、これから三辺測量鎖は有効な測量鎖であることがわかった。

本文に示した諸表を用いれば、位置誤差の許容値が指定されたとき、目標とすべき σ_0 が推定できるので、器械や観測方法の選定に役立つ。

なお、実用上の有用性があると考えられる拘束条件①型の単列三辺形鎖と有心六辺形鎖の座標誤差の推定式を

盛り込み、基準点測量の一環として三辺測量鎖を採用し計画する際の一資料を提示した。

三辺測量鎖の観測辺長とその重みが等しくないときや、平面的な広がりのある三辺測量網の誤差の特性については、別に言及するつもりである。

本文の数値計算には、本文の諸式に基づいて試作したプログラムを用いた。このプログラミングに際しては、山形工業高等学校の山川茂夫氏に全面的な援助をいただいた。記して感謝を申し上げる。

参 考 文 献

- 1) 精密基準点測量改訂版, 日本測量協会, p.35, 昭和55年.
- 2) 北野芳徳: 今日測量, 土木学会誌, Vol.62, p.10, 1977.
- 3) 町田・森: 三辺測量網の図形調整における必要十分な条件式の決定法, 土木学会第40回年次学術講演会講演概要集第4部, IV-104, p.207, 昭和60年9月.
- 4) 町田・森: 三辺測量網のパソコンを使用する組織的図形調整法, 土木学会第41回年次学術講演会講演概要集第4部, IV-237, p.473, 昭和61年9月.
- 5) 北野芳徳: 辺長測量における四辺形調整の1方法について, 測量, Aug., p.28, 1962.
- 6) 森 忠次: 測量学2応用編, 丸善, pp.359~363, 1981.
- 7) Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung, Walter de Gruyter, pp.160~162, 1980.
- 8) Wolf, P.R. and Johnson, S.D.: Trilateration with short range EDM equipment and comparison with triangulation, Surveying and Mapping, Vol.34, No.4, pp.337~346, Dec. 1974.
- 9) 1), p.13.
- 10) 1), p.181.
- 11) 1), p.17.
- 12) 森 忠次: 角と距離とを測った単純な四角形鎖の誤差と効率, 土木学会論文集, 第359号, IV-3, p.125, 1985年7月.
- 13) 現代測量学1, 日本測量協会, p.282, 昭和56年.

(1988.4.4・受付)