

## シャドウ・コスト概念による観測交通量からの OD 交通量推計

A TRAFFIC DEMAND ESTIMATION MODEL BASED ON OBSERVED LINK VOLUMES  
THROUGH THE IDEA OF SHADOW COST

井上博司\*

By Hiroshi INOUE

Estimation of an origin-destination trip table based on observed link volumes in a network is studied, using traffic equilibrium method. The idea of link shadow cost is introduced, that is capable to be measured merely through the results of traffic behaviour of trip makers. The demand model is that the origin-destination trip depends on the average shadow cost between origin and destination. Then the problem is whether trip matrices exist that satisfy the demand function and reproduce observed link volumes. The existence and the uniqueness of the equilibrium solution for the problem are cleared through Brouwer's fixed point theorem. A numerical solution method is proposed using the above proof process. A computing example is shown, that makes clear the convergence and the preciseness of the solution.

*Keywords*: road travel demand, trip distribution, network equilibrium

## 1. はじめに

道路網の各所での交通量観測データから OD 交通量を推計する手法がこれまでいくつか開発されてきた。このような手法の目的は、交通需要構造の短期的な変化を費用と労力をかけずに、既存データより簡便的に推計することにある。たとえば、起終点間の経路選択にあまり変化がなければ、時々刻々変化する都市内の交通流動に対して適正な交通管制を実施するために、交通量観測データから需要構造の時間的な変化を検出することに適用することができよう。あるいはパーソン・トリップ調査を行った場合に、次の調査時点までの間の各期の需要構造の変化を、交通量常時観測資料等を用いて明らかにし、パーソン・トリップ調査の補完に役立てることもできる。またパーソン・トリップ調査において、スクリーン・ラインを横断する交通量を実測することによって、標本調査結果から推計された OD 交通量を補正することも可能である。

このために用いられる手法は、その適用目的や対象とする空間的な範囲、予測期間、入手可能なデータ、必要とされる推計精度等の相異によってこれまでさまざまな

方法が開発されてきた。それらの手法の多くはベースとなる OD 交通量分布が設定され、各道路区間での計算交通量が観測交通量に一致ないしは近接するという条件のもとで、できるだけベースに近い OD 交通量分布を求めるというものである。その際ベースとなる OD 交通量分布の設定法によって 2 つの型に大別できる。その 1 つはグラビティー・モデルを基本的な分布パターンとするものである。グラビティー・モデルにはいくつかの問題点があるにせよ単純・明解なモデルであり、かつ適合度も比較的高く実用性に富むという利点がある。この場合、モデルの発生係数、トリップ長指数等のパラメータの適正な値を、リンク交通量の計算値と観測値の整合性が得られるように推計することに主眼が置かれてきた。

Low<sup>1)</sup>はゾーン内交通量の値を、人口をもとにしたグラビティー・モデル値の線形回帰によって推計するモデルを作成した。Overgard<sup>2)</sup>はグラビティー・モデルの交通抵抗関数を、スクリーンラインを横断する計算交通量が観測交通量によく適合するように推定する手法を示した。Jensen and Nielsen<sup>3)</sup>はグラビティー・モデルのパラメータを、all or nothing による配分によって得られた計算交通量と観測交通量の残差平方和が最小となるように決定する手法を開発した。このモデルを Holm

\* 正会員 工博 岡山大学助教授 工学部土木工学科  
(〒700 岡山市津島中 3-1-1)

ら<sup>4)</sup>が改良し、グラビティー・モデルのパラメーターを、Wayne 法による配分によって得られた計算交通量と観測交通量とから最尤法によって推定する手法に発展させている。井上<sup>5)</sup>は OD 交通量相互の独立性を仮定したモデルを提案している。この方法では実際の OD 交通量がグラビティー・モデル値を平均値とする独立な正規分布に従うという前提のもとで、各リンクの計算交通量が観測交通量に一致するもののうち、OD 交通量の同時生起確率密度が最大となる OD 交通量の組が、グラビティー・モデルのパラメーターとともに求められる。飯田<sup>6)</sup>はグラビティー・モデルのパラメーターおよび OD 交通の経路選択が先決されているという前提のもとで、OD 交通の構造を二重制約型のグラビティー・モデルで表現し、各リンクの計算交通量が観測交通量にできるだけ近接するような発生・吸引交通量を求めることによって OD 交通量を推計する手法を提案している。その後このモデルは経路選択問題を内生化したモデル<sup>7)</sup>に、あるいは修正重力型<sup>8)</sup>、OD 推移確率固定型<sup>9)</sup>等のモデルに発展、改良されている。

観測交通量より OD 交通量を推計する手法の第二の型は、ベースの OD 交通量分布にグラビティー・モデル等の既存の交通量分布モデルを使用せずに、過去の OD 調査によって得られた OD 交通量パターンを用いるものである。この OD 交通量パターンは、リンクでの計算交通量が観測交通量に一致ないしは近接するように修正される。その際 OD 交通量の確率分布の取り扱い方の違いによっていくつかのモデルがある。井上<sup>10)</sup>は既存 OD 交通量パターンを先験的情報として、エントロピー最大化の考え方よりスクリーンラインでの計算交通量が実測交通量と一致する OD 分布のうちで、同時生起確率が最大となるものを求める方法を示した。Zuylen and Willumsen<sup>11)</sup>は、同様に既存 OD 交通量パターンより得られる先験確率を用いて、Brillouin の情報量最小化および Willson 型のエントロピー最大化の基準により OD 交通量を推計する手法を示した。井上<sup>12)</sup>は OD 交通量を互いに独立な正規確率変数として取り扱い、OD 交通量の不規則変動と OD 調査における標本誤差の双方を考慮して、リンクでの計算交通量と観測交通量とから OD 交通量の最尤推定値を得る方法を示した。飯田・高山<sup>13)</sup>も同様の前提のもとで、OD 交通量が周期変動し、互いに相関をもつ場合の推計法を明らかにしている。

従来の方法の多くは、経路選択に関する情報すなわち OD ペアごとの利用経路や経路選択率等を外生的に与えるという方法をとっている。しかしこれらを適正に先決することは非常に難しい。このため一部の方法では、Wayne 法や Dial 法などによる交通量配分を推計過程の

中に取り入れ、OD 交通量推計と交通量配分とを反復する方法をとっているものもみられるが、計算量の多さや解の一意性が保証されないことがあるなど問題を残している。経路選択を内生化したモデルとして、ネットワーク均衡の概念を取り入れた Nguyen<sup>14)</sup>の方法が興味深い。この方法は均衡交通量配分を行ったときに、リンク交通量が観測交通量に一致するような OD 交通量を推定しようとするものである。しかし Nguyen のモデルにおいては解は一意的には定まらず、無数の解が存在することが Gur ら<sup>15)</sup>によって指摘されている。Gur らはこのため OD 交通量の構造を外生的に生成されたターゲット・トリップ・テーブルにより与える方法を提案している。この方法は、均衡交通量配分を行ったときリンク交通量が観測交通量に一致し、かつターゲット・トリップ・テーブルとの残差平方和が最小となるような OD 交通量を求めようとするものである。Leblanc and Farhangin<sup>16)</sup>は Gur らのモデルの解を部分ラグランジェ乗数法によって求める方法を示している。

道路区間観測交通量より OD 交通量を推計する手法には以上のほか、ベイズ推定を用いる Maher<sup>17)</sup>の方法、対数線形モデルを用いる Bell<sup>18)</sup>の方法等いくつかの方法がある。

このようにこれまで多くの特徴ある方法が提案されてきているが、それぞれ問題点を有しており、今後とも明解で実用性にも優れた方法が開発されていかなければならない。本研究においてはシャドウ・コストという概念を定義し、交通均衡論的手法によりリンク観測交通量から OD 交通量を推計するモデルを提案する。既存の多くの方法ではベースとなる OD 交通量を重力モデルにより設定しているが、この場合起終点間の所要時間ないしはリンク所要時間を推定して与える必要がある。しかしその推定法には適当な方法がないのが現状であり、このためにベース OD 交通量を道路網に割り当てたときに生じるリンク観測交通量との誤差を統計的手法により処理している。これに対しここで提案するモデルでは、ベース OD 交通量には重力モデル式を適用するが、リンク所要時間自体を内生化的にすることによって、OD 間所要時間の推定を不要にしている。同時にベース OD 交通量を道路網に割り当てたときに、リンク観測交通量との誤差が生じないようにリンク所要時間を決定するため、誤差の統計的処理を不要にしている。本研究では、主としてこの交通均衡問題における解の存在性、唯一性、数値解法などの理論的な面を中心に考察を行っているが、本モデルをさらに発展させ、また実用化を図ることによって OD 交通量推計の新たな手法の提供が可能となるものと思われる。

## 2. OD 交通量推計モデル

先に述べた Nguyen のモデルにおいては、道路網上の交通流の分布に関しては Wardrop 均衡を仮定している。すなわち道路区間の走行所要時間が当該リンクの交通量に依存するという前提のもとで、各トリップはそれぞれの起終点間の所要時間最短の経路に流れると仮定している。しかし現実の道路網上の交通流は必ずしも Wardrop 均衡を実現していない。Wardrop 均衡が実現するためには、各ドライバーが道路網上の交通状態に関する十分な情報を取得することが必要である。現実の時々刻々変化する、あるいは日々の不規則な変動を伴う交通流に関しては、ドライバーは交通状態に関する十分な情報をもつことはできず、過去の経験や聞き伝え、マスメディアからの限られた情報等をもとに経路選択している。このため現実の経路選択では、混雑箇所を避けてより所要時間の短い迂回路に回るといった制御機構が働きにくく、特定の経路に交通量が集中しがちである。

本研究においてはこのような考察より、各 OD 交通の経路選択は固定して考える。また経路選択に関する情報すなわち起終点間の利用経路や経路選択率等は、OD 交通量を推計するにあたって先決されているものとする。さらに対象とする範囲のすべてのリンクで交通量が観測されているものとし、またすべてのノードペア間の OD 交通量を推計の対象とする。

本研究の基本的な考え方は次のとおりである。各トリップメーカーはトリップを行うにあたり、道路網のそれぞれのリンクに対して何らかのコストを想定するものとする。ただしこのコストは必ずしも実際のコストと一致するものではなく、トリップメーカーの経験やマスメディアからの情報等によって形成された具現化していない感覚的なコストである。これを隠れた影のコストという意味で、シャドウ・コストと呼ぶことにする。シャドウ・コストは直接には計量不可能であるが、ドライバーの行った交通行動の結果から間接的に計量することが可能であるとする。

トリップメーカーはこのシャドウ・コストに依存してトリップを行い、したがってトリップ需要関数は当該起終点間のシャドウ・コストに依存するものとする。需要関数としてはたとえば重力モデル式等が適用できるが、所要時間には起終点間のシャドウ・コストをあてる。起終点間のシャドウ・コストは、当該起終点間のトリップに対する利用経路上のシャドウ・コストの平均値としよう。これらの関係は OD 交通量に関する需要関数を規定するものである。このとき各リンクでの計算交通量が観測交通量に一致し、かつ起終点間のトリップ数が当該起終点間のシャドウ・コストに依存した需要関数を満足

するような OD 交通量およびリンク・シャドウ・コストの組を一意的に決定することが可能であろうかというのが本研究の主題である。

このためこの問題を次のように定式化しよう。いまノードペア  $ij$  間の OD 交通量を  $x_{ij}$ 、OD ペアの集合を  $Q$  とし、OD 交通量  $x_{ij}$ 、( $ij \in Q$ ) を列ベクトルによって

$$x = [x_{ij}]$$

と表わす。

OD ペア  $ij$  のトリップがリンク  $a$  を通る割合を  $p_{ija}$ 、( $ij \in Q, a \in L$ ) とし、これをマトリックスによって

$$P = ij \begin{bmatrix} \dots & \dots & a & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & p_{ija} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

と表わす。ここに  $L$  はリンクの集合であり、またリンク数を  $m$ 、OD ペア数を  $l$  とする。

各リンクの計算交通量は、

$$v_a = \sum_{ij} p_{ija} x_{ij}, \quad (a \in L) \dots \dots \dots (1)$$

に等しい。あるいはリンク計算交通量を列ベクトルによって

$$v = [v_a]$$

と表わすと、

$$v = P'x \dots \dots \dots (2)$$

となる。ここに  $'$  は転置を意味するものとする。

リンク観測交通量を列ベクトルによって

$$v^* = [v_a^*]$$

と表わすと、各リンクの計算交通量が観測交通量に一致するという条件は、

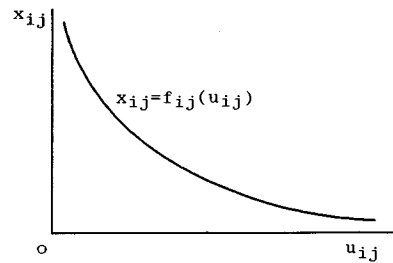
$$P'x = v^* \dots \dots \dots (3)$$

と表わすことができる。

次にリンク  $a$  のシャドウ・コストを  $c_a$ 、( $a \in L$ ) とし、これらを列ベクトルによって

$$c = [c_a]$$

と表わす。起終点  $ij$  間のトリップに対する利用経路上のシャドウ・コストの平均値は、



図一 トリップ需要関数

$$u_{ij} = \sum_a p_{ija} c_a \dots\dots\dots (4)$$

によって与えられる. この OD シャドウ・コストを列ベクトルによって

$$u = [u_{ij}]$$

と表わすと, 式 (4) の関係は

$$u = Pc \dots\dots\dots (5)$$

となる.

OD ペア  $ij$  の OD 交通量  $x_{ij}$  は, シャドウ・コスト  $u_{ij}$  の関数

$$x_{ij} = f_{ij}(u_{ij}) \dots\dots\dots (6)$$

によって表わすことができると仮定する.

関数  $f_{ij}(u_{ij})$  の組を列ベクトルによって,

$$f(u) = [f_{ij}(u_{ij})]$$

と表わすと, 式 (6) の関数は

$$x = f(u) \dots\dots\dots (7)$$

となる. 式 (5), (7) より OD 交通量  $x$  はリンク・シャドウ・コストの関数として

$$x = f(Pc) \dots\dots\dots (8)$$

と表わされる.

ここで需要関数  $f_{ij}(u_{ij})$  は次の条件を満足するものとする.

- (i)  $u_{ij} > 0$  に対して,  $f_{ij}(u_{ij}) > 0$
- (ii)  $u_{ij} > 0$  に対して,  $df_{ij}(u_{ij})/du_{ij} < 0$
- (iii)  $u_{ij} \rightarrow +\infty$  のとき,  $f_{ij}(u_{ij}) \rightarrow 0$

このとき各リンクでの計算交通量が観測交通量に一致し, かつ先の需要関数を満足する, すなわち

$$P'x = v^*$$

$$x = f(Pc)$$

となるような OD 交通量  $x > 0$  およびリンク・シャドウ・コスト  $c$  が一意に存在するであろうか.

### 3. 均衡解の存在性および唯一性

ここでは式 (3) および式 (8) を満足する均衡解の存在性を Brouwer の不動点定理を用いて明らかにし, また均衡解が唯一であることを示す.

Brouwer の不動点定理とは, 閉凸集合  $X$  から  $X$  自身への任意の連続写像  $f(x)$  には, 不動点  $\hat{x} = f(\hat{x})$  が少なくとも 1 つ存在するというものである<sup>19)</sup>.

いま  $l$  次元ベクトル空間  $V^l$  において, 非負実数値集合  $S$  を

$$S = \{x \geq 0 \mid P'x = v^*\} \dots\dots\dots (9)$$

と定義する.  $S$  内の任意の 2 点を  $x_1, x_2$  とし, 2 点  $x_1, x_2$  を結ぶ線分  $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, (0 \leq \alpha \leq 1)$  を考えると,

$$P'[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = v^*$$

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geq 0$$

よりこの線分は  $S$  内にある. また  $v^*$  の各要素は有限値をとることから  $x$  の要素は上に有界であり, よって集

合  $S$  は閉凸集合であることがいえる.

次に需要関数  $x_{ij} = f_{ij}(u_{ij})$  の逆関数を

$$u_{ij} = g_{ij}(x_{ij}), (ij \in Q) \dots\dots\dots (10)$$

とする. ただし関数  $g_{ij}(x_{ij})$  の定義域は,

$$x_{ij} \geq \epsilon, (ij \in Q) \dots\dots\dots (11)$$

とする. ここに  $\epsilon$  は十分小さい正の実数値である. 各要素を  $\epsilon$  とする列ベクトルを  $\epsilon$  と表わす.

逆需要関数  $g_{ij}(x_{ij})$  は, 需要関数  $f_{ij}(u_{ij})$  の性質より次の性質をもつ.

- (i)  $g_{ij}(x_{ij}) > 0$
- (ii)  $dg_{ij}(x_{ij})/dx_{ij} < 0$
- (iii)  $g_{ij}(\epsilon) = M_{ij}$

ただし  $M_{ij}$  は十分大きい正の実数値である.

逆需要関数を列ベクトルによって

$$g(x) = [g_{ij}(x_{ij})]$$

と表わす. また逆需要関数の定義域を非負実数値集合

$$D = \{x \mid x \geq \epsilon\} \dots\dots\dots (12)$$

によって表わす. 集合  $D$  は明らかに凸集合である. さらに, 非負実数値集合  $R$  を

$$R = S \cap D$$

とする. 集合  $R$  は集合  $S$  および  $D$  の性質より閉凸集合である.  $x \in R$  なるフロー  $x$  を実行可能フローと呼ぶ.

ここで集合  $R$  は空集合ではない, すなわち

$$P'x = v^*$$

を満足する正の実数値集合  $x$  が存在するものとする.

このとき均衡条件は,  $\hat{x} \in R$  に対して, 逆需要関数とリンク・シャドウ・コストとの間に

$$Pc = g(\hat{x})$$

という関係が成立することであるといいかえることができる.

いま  $R$  内の任意の点  $x$  に対し, 点  $x + g(x)$  に最も近い線形多様体  $P'x = v^*$  上の点を  $y$  とする. また  $x$  と  $y$  を結ぶ方向で, 関数

$$F(x) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} g_{ij}(x) dx \dots\dots\dots (13)$$

を最大にする  $R$  内の点を  $z$  とする.  $R$  は閉凸集合であることから, 任意の点  $x \in R$  に対して  $z$  が唯 1 つ決まる. それゆえ  $z = h(x)$  と表わす. ここで  $\forall x \in R$  に対して

$$Tx = h(x)$$

とおき, 写像

$$T: R \rightarrow R$$

を定義する.

写像  $T$  は閉凸集合  $R$  から  $R$  自身への連続写像であるから, Brouwer の不動点定理により不動点

$$\hat{x} = h(\hat{x})$$

が存在する.

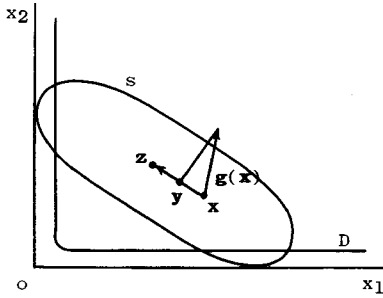


図-2 写像  $T: R \rightarrow R$

次にこの不動点が均衡点であることを示そう。

$y$  は条件

$$P'y = v^*$$

のもとで、 $\|y - x - g(x)\|$  を最小にする点である。これはラグランジュ関数

$\phi(y, \lambda) = \|y - x - g(x)\|/2 + \lambda(P'y - v^*)$  を停留する点である。ここに  $\lambda$  はラグランジュ乗数ベクトルを表わす。

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = y - x - g(x) + P\lambda$$

より  $\partial \phi / \partial y = 0$  とおくと、

$$y = x + g(x) - P\lambda \dots\dots\dots (14)$$

となる。ここで

$$\|y - x - g(x)\| \leq \|g(x)\|$$

であるから、

$$\|y - x - g(x)\| \|y - x - g(x)\| \leq g(x)' g(x)$$

これより

$$2(y - x)' g(x) \geq (y - x)' (y - x) \geq 0$$

よって

$$(y - x)' g(x) \geq 0 \dots\dots\dots (15)$$

が成り立つ。このことから  $y - x$  は関数  $F(x)$  に対する極大化方向である。

$z$  は関数

$$F(\alpha) = F(x + \alpha(y - x))$$

を最大にする集合  $R$  内の点である。ここで  $x$  および  $y$  は線形多様体  $P'x = v^*$  上の点であるから、 $x + \alpha(y - x)$  もこの線形多様体上にあり、したがってこれが集合  $R$  内の点であるためには、

$$x + \alpha(y - x) \geq \epsilon$$

であればよい。このことから、

$$0 \leq \alpha \leq \min_{y_{ij} - x_{ij} < 0} \frac{x_{ij} - \epsilon}{y_{ij} - x_{ij}} \dots\dots\dots (16)$$

でなければならない。

ここで  $\alpha$  の上限を

$$\bar{\alpha} = \min_{y_{ij} - x_{ij} < 0} \frac{x_{ij} - \epsilon}{y_{ij} - x_{ij}} = \frac{x_{pq} - \epsilon}{y_{pq} - x_{pq}} \dots\dots\dots (17)$$

とおく。

さて、

$$\begin{aligned} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= (y - x)' \nabla F(x + \alpha(y - x)) \\ &= (y - x)' g(x + \alpha(y - x)) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

また

$$\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} = (y - x)' \nabla^2 F(x + \alpha(y - x))(y - x) \dots\dots (19)$$

ここで、

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_{ij} \partial x_{i'j'}} = \begin{cases} \frac{dg_{ij}(x_{ij})}{dx_{ij}} < 0, & (ij = i'j' \text{ のとき}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

であるから  $\nabla^2 F(x)$  は負定値行列であり、このことから

$$\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} < 0 \dots\dots\dots (20)$$

である。また、

$$\frac{dF}{d\alpha} |_{\alpha=0} = (y - x)' g(x) \geq 0 \dots\dots\dots (21)$$

さらに  $\alpha = \bar{\alpha}$  のとき、

$$x_{pq} + \bar{\alpha}(y_{pq} - x_{pq}) = \epsilon$$

であることから

$$g_{pq}(x_{pq} + \bar{\alpha}(y_{pq} - x_{pq})) = M_{ij}$$

となり、また  $y_{pq} - x_{pq} < 0$  であることから、

$$\frac{dF}{d\alpha} |_{\alpha=\bar{\alpha}}$$

は十分小さい負の実数値をとる。以上より  $F(\alpha)$  が最大になる  $\alpha$  の値  $\alpha^*$  が、 $0 \leq \alpha < \bar{\alpha}$  の区間にある。

よって  $x \in R$  のとき、写像  $Tx = h(x)$  に対して

$$h(x) = x + \alpha^*(y - x) > \epsilon \dots\dots\dots (22)$$

となる。

任意の実行可能フロー  $x \in R$  に対して、写像  $Tx = h(x)$  により  $h(x) > \epsilon$  となるから、写像  $T$  の不動点は集合  $D$  の境界上にない、すなわち

$$\hat{x} > \epsilon \dots\dots\dots (23)$$

である。よって  $\epsilon \rightarrow 0$  のとき

$$\hat{x} > 0 \dots\dots\dots (24)$$

となる。すなわち不動点  $\hat{x}$  の要素はすべて正値である。

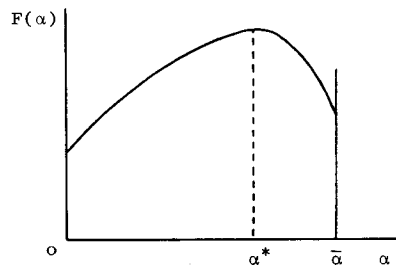


図-3  $F(\alpha)$  の最大点

さて不動点  $\hat{x}$  においては、 $z = \hat{x}$  であり、またこのことより  $y = \hat{x}$  である。式 (14) において、 $y = x = \hat{x}$  のとき、

$$g(\hat{x}) = P\lambda \dots \dots \dots (25)$$

が成り立つ。ここで  $c = \lambda$  とすると、不動点  $\hat{x}$  は式 (3) および (8) を満足する均衡点であることがわかる。

以上より写像  $T$  には不動点  $\hat{x} > 0$  が存在し、しかもこの不動点は均衡点であることが示された。ここで  $\hat{x} > 0$  より

$$g(\hat{x}) > 0$$

であり、したがって

$$Pc > 0 \dots \dots \dots (26)$$

となる。

リンク・シャドウ・コスト  $c$  は必ずしも正值になるとは限らない。しかし用いられるデータが現実とかけ離れた矛盾したものではなく、十分合理的であればリンク・シャドウ・コストは負にはなり得ない。特に各リンクの両端ノードを起終点とする OD 交通が、当該のリンクのみを経由するときには、たとえばリンク  $a$  の両端のノードを  $i, j$  とすると、

$$g_{ij}(x_{ij}) = c_a$$

という関係から、 $c_a > 0$  であり、したがって

$$c > 0$$

となる。すなわち正值のリンク・シャドウ・コストの組が存在する。

写像  $T$  による均衡点を  $\hat{x}$ 、 $R$  内の任意の点を  $x$  (ただし  $x \neq \hat{x}$ ) とすると、 $R$  は凸集合で  $\hat{x}$ 、 $x$  はともに  $R$  内の点であるから、 $\hat{x}$  と  $x$  を結ぶ線分は  $R$  内にある。ここでもし  $g(\hat{x})$  が  $x - \hat{x}$  の方向に正の要素をもつなら、 $\hat{x}$  と  $x$  を結ぶ線分上で  $\hat{x}$  よりも  $\hat{x} + g(\hat{x})$  に近い  $R$  内の点が存在する。ところが  $\hat{x}$  は  $\hat{x} + g(\hat{x})$  に最も近い  $R$  内の点である。よって  $g(\hat{x})$  は  $x - \hat{x}$  の方向に正の要素をもたない。すなわち任意の  $x \in R$  に対して、

$$g(\hat{x})(x - \hat{x}) \leq 0 \dots \dots \dots (27)$$

が成り立つ。

このことより均衡点  $\hat{x}$  は次のようにも表現することができる。

“ある実行可能なフロー  $\hat{x}$  が、各 OD ペアのコスト  $g(x)$  を  $\hat{x}$  のときのコストに固定するならば、 $\hat{x}$  のとき総 OD コスト  $g(\hat{x})x$  が最大となるのであれば、 $\hat{x}$  は均衡解である”。

これらの関係は、Smith<sup>20)</sup>が需要固定型交通均衡問題における均衡条件の一般的表現として導出した関係ときわめて類似したものである。

次に均衡解の一意性を証明しよう。いま仮に均衡点は 2 点あるとし、それらを  $x_1, x_2$  とすると、式 (27) より

$$g(x_1)(x_2 - x_1) \leq 0$$

$$g(x_2)(x_1 - x_2) \leq 0$$

が成り立つ。よって

$$(g(x_2) - g(x_1))(x_1 - x_2) \leq 0 \dots \dots \dots (28)$$

ここで Taylor の定理より、

$$g(x_2) = g(x_1) + \nabla g(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)$$

となる  $0 \leq \theta \leq 1$  が存在する。これを式 (28) に代入すると、

$$(x_1 - x_2)' \nabla g(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_1 - x_2) \geq 0 \dots \dots \dots (29)$$

ところで  $\nabla g(x) = \nabla^2 F(x)$  であり、また  $\nabla^2 F(x)$  は負定値行列であることより

$$(x_1 - x_2)' \nabla g(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_1 - x_2) \leq 0 \dots \dots \dots (30)$$

ここで等号は  $x_1 - x_2 = 0$  のときのみ成り立つ。

式 (29) および式 (30) より

$$(x_1 - x_2)' \nabla g(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_1 - x_2) = 0 \dots \dots \dots (31)$$

式 (30) で等号が成り立つのは  $x_1 - x_2 = 0$  のときのみだから、

$$x_1 = x_2$$

よって均衡点は唯一であることが示された。

#### 4. 解法および計算例

式 (3) および (8) を満足する均衡解  $\hat{x} > 0$  を求めるための 1 つの方法は、未知数  $c$  に関する非線形方程式

$$P'f(Pc) = v^* \dots \dots \dots (32)$$

を Newton-Raphson 法などの有力な方法を使って解くことである。この解を  $\hat{c}$  とすると、

$$\hat{x} = f(P\hat{c})$$

によって均衡解を得ることができる。

しかし式 (32) を Newton-Raphson 法を使って解く場合、その Jacobian 行列の逆行列を反復のたびに求める必要があり、ネットワークが大きくなった場合にはこの点が問題となろう。そこでここでは均衡解の存在性に関する証明過程を用いたアルゴリズムを考える。

解の存在性に関する証明過程より明らかなように、式 (3) および (8) を満足する均衡解  $\hat{x} > 0$  を求めることは、制約条件

$$P'x = v^*$$

$$x \geq 0$$

のもとで、目的関数

$$F(x) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} g_{ij}(x) dx$$

を最大にする  $x$  を求めることと等価である。

いま任意の実行可能解  $x > 0$  に対して、写像  $Tx = h(x)$  を実行する。このとき式 (14) より、

$$y = x + g(x) - P\lambda$$

であるが、ラグランジェ乗数  $\lambda$  は  $y$  が実行可能でなけ

ればならないことより、

$$\lambda = [P'P]^{-1}P'g(x) \dots\dots\dots (33)$$

で与えられる。よって

$$d = (E - P[P'P]^{-1}P')g(x) \dots\dots\dots (34)$$

とおき、また  $F(x + \alpha d)$  を最大にする  $\alpha$  の値  $\alpha^*$  を求めると、

$$z = x + \alpha^* d$$

となる。ここで  $E$  は単位行列である。

最適ステップサイズ  $\alpha^*$  の値は、近似的には次のように得られる。

$$F(x + \alpha d) \cong F(x) + \alpha d' \nabla F(x) + \frac{\alpha^2 d' \nabla^2 F(x) d}{2}$$

と近似し、これを  $\alpha$  で微分して 0 とおくと、

$$d' \nabla F(x) + \alpha d' \nabla^2 F(x) d = 0$$

これより、

$$\alpha^* = - \frac{d' \nabla F(x)}{d' \nabla^2 F(x) d} = - \frac{\sum_{ij} d_{ij} g_{ij}(x_{ij})}{\sum_{ij} d_{ij}^2 \frac{dg_{ij}(x_{ij})}{dx_{ij}}} \dots\dots\dots (35)$$

となる。こうして得られた  $z$  を次の反復段階での  $x$  の試行解とすればよい。

ところで最適点  $\hat{x}$  においては、

$$g(\hat{x}) = P\lambda$$

であり、また

$$\lambda = [P'P]^{-1}P'g(x)$$

であることより、

$$d = (E - P[P'P]^{-1}P')g(x) = 0 \dots\dots\dots (36)$$

となる。この関係は最適性の判定条件に用いることができる。

求解のアルゴリズムは次のとおりである。

[ステップ0] 初期実行可能解  $x^{(0)} > 0$  を決定する。  $n = 1$  とする。

[ステップ1]  $d^{(n)} = (E - P[P'P]^{-1}P')g(x^{(n-1)})$  を求める。

[ステップ2]  $\|d^{(n)}\| < \epsilon$  ならストップ。

[ステップ3]  $F(x^{(n-1)} + \alpha d^{(n)})$  を最大にする  $\alpha$  の値  $\alpha^*$  を求める。

[ステップ4]  $x^{(n)} = x^{(n-1)} + \alpha^* d^{(n)}$  とする。  $n = n + 1$  としてステップ1へ。

ここで  $\epsilon$  は適当な小さな正の実数値とする。なおマトリックス  $E - P[P'P]^{-1}P'$  は反復によって変わることがないから、はじめに一度だけ計算しておけばよい。

次にこのアルゴリズムを用いた計算例を示そう。

図-4 に示すような 6 ノード、18 リンクの簡単なネットワークを考える。

トリップ需要関数は重力モデル式

$$x_{ij} = a U_i V_j u_{ij}^\gamma$$

によって表わされるものとする。ここで  $u_{ij}$  は OD 間のシャドウ・コストであり、またパラメーター  $a, \gamma$  およ

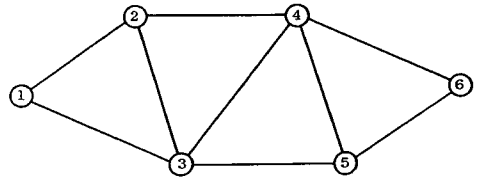


図-4 対象道路網

表-1 発生・吸引指標

i	$U_i$	$V_i$
1	3000	1000
2	4000	2000
3	5000	3000
4	6000	4000
5	5000	2000
6	4000	1000

び発生・吸引指標  $U_i, V_j$  の値は外生的に与えられるものとする。ここでは  $\alpha = 0.002, \gamma = 1.5$  とし、また  $U_i, V_j$  の値は表-1 に示すとおりとする。

各起終点間の利用経路および経路選択率は図-5 のとおりとする。いま仮にリンク・シャドウ・コストが図-6 に示す値であると仮定し、これより先の需要関数により OD 交通量を求めると、表-2 が得られる。これを図

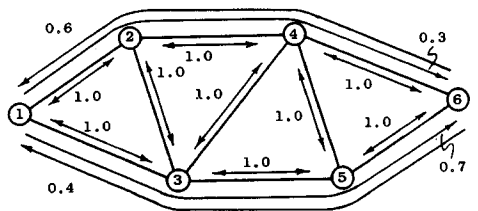


図-5 経路および経路選択率

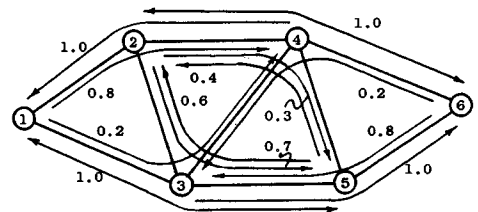
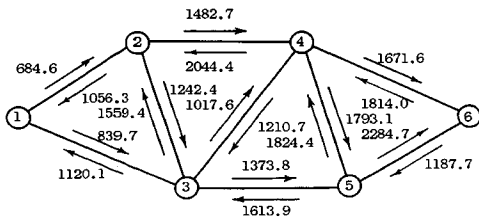


図-6 リンク・シャドウ・コスト

表一 OD 交通量

0 \ D	1	2	3	4	5	6
1	—	444.4	569.2	276.6	171.2	62.8
2	715.5	—	1060.7	1011.9	259.7	152.7
3	894.4	1360.8	—	962.3	1079.9	316.2
4	288.7	1295.9	1138.4	—	1295.9	1500.0
5	190.9	330.9	1111.1	1481.5	—	1924.5
6	86.8	275.4	361.4	1414.2	863.9	—



図一 リンク交通量

—5 に示された経路選択率により道路網に配分すると、  
図一に示すリンク交通量が得られる。

そこでこのリンク交通量を観測交通量として与えたとき、先の実アルゴリズムによる解が表一の OD 交通量と一致するかどうかをみよう。

ここでは初期実行可能解は、2 リンク以上を経由する OD ペアについては 100 とし、残りの 1 リンク経由の OD ペアに対し計算交通量が観測交通量に一致するように調整することによって求めている。40 回反復までの計算結果は表三に示すとおりである。

このときの解は表一に示された真の最適解に十分近い値になっている。また最終的に得られたラグランジュ乗数  $\lambda$  は図八に示すとおりであり、これも初めに仮定されたリンク・シャドウ・コストに十分近い値になっている。

以上の計算例より、本アルゴリズムによって十分精度

表三 計算結果

n	OD交通量 x						d	F(x)
0	—	574.6	649.7	100.0	100.0	100.0	—	$5.52599 \times 10^5$
	896.3	—	1172.4	1242.7	100.0	100.0		
	980.1	1499.4	—	997.6	1453.1	100.0		
	100.0	1744.4	1190.7	—	1343.8	1541.6		
	100.0	100.0	1544.4	1573.9	—	2114.7		
	100.0	100.0	100.0	1634.0	1067.7	—		
10	—	453.7	585.1	262.3	153.3	70.0	6.26319	$5.62540 \times 10^5$
	783.1	—	1079.4	1042.3	232.9	139.7		
	924.9	1390.6	—	965.1	1195.7	232.2		
	227.6	1432.2	1148.4	—	1303.9	1510.9		
	164.8	281.3	1211.3	1501.4	—	2003.6		
	76.1	226.6	311.4	1479.5	908.2	—		
20	—	445.0	572.2	275.3	167.4	64.4	1.43389	$5.62979 \times 10^5$
	734.4	—	1064.0	1015.4	254.8	151.3		
	900.3	1367.3	—	962.5	1113.4	288.9		
	271.2	1331.8	1140.3	—	1297.3	1501.0		
	186.0	320.2	1131.1	1485.8	—	1950.7		
	84.4	262.7	351.8	1430.3	872.6	—		
30	—	444.5	570.0	276.4	170.3	63.2	0.35418	$5.63007 \times 10^5$
	720.2	—	1061.4	1012.5	258.6	152.5		
	895.5	1362.1	—	962.3	1089.5	308.1		
	284.3	1304.4	1138.8	—	1296.2	1500.1		
	190.1	328.8	1114.8	1482.4	—	1932.4		
	86.3	272.4	359.7	1417.9	865.5	—		
40	—	444.5	569.4	276.6	170.9	62.9	0.08866	$5.63008 \times 10^5$
	716.7	—	1060.9	1012.1	259.4	152.7		
	894.6	1361.1	—	962.3	1082.7	313.8		
	287.6	1297.9	1138.5	—	1296.0	1500.0		
	190.8	330.5	1111.8	1481.7	—	1926.9		
	86.7	274.7	361.1	1415.0	864.2	—		



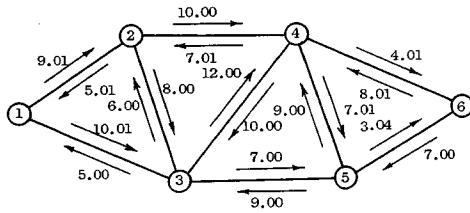


図-8 40 回反復後のラグランジュ乗数値

の高い解を得ることができることがわかったが、その収束性については多少緩慢な面があるようである。このため収束性を早めるためには、初期実行可能解にもっと良い値を選ぶことが必要であろう。探索方向決定のための射影マトリックスは一度だけ計算すればよいが、その際リンク数×リンク数のサイズの逆行列を求める必要があることから、リンク数が数千もあるような大規模道路網への適用には問題がある。

### 5. おわりに

本研究においてはシャドウ・コストという概念を導入し、交通均衡論的手法により観測交通量から OD 交通量を推計する手法を示した。本研究の内容をまとめると次のとおりである。

(1) 各リンクでの計算交通量が観測交通量に一致し、かつ各起終点間のトリップ数が当該起終点間のシャドウ・コストに依存した需要関数を満足するとする均衡需要モデルを示した。ここにシャドウ・コストとは、トリップメーカーの経験やマスメディアからの情報等によって形成された具現化していない感覚的なコストであり、トリップメーカーの行った交通行動の結果から間接的に計量されるものである。

(2) 本均衡問題における OD 交通量およびリンク・シャドウ・コストの均衡解が存在することを、Brouwer の不動点定理を用いて明らかにした。

(3) 本均衡問題における均衡条件は次のようにも表現できる。“ある実行可能なフローが、OD コストをそのフローのもとでのコストに固定するとき、総 OD コストが当該フローのとき最大となるのであれば、そのフローは均衡解である。”

(4) 本均衡問題における均衡解は唯一であることを、上の均衡条件を用いて明らかにした。

(5) 本均衡問題の数値解法を示した。このアルゴリズムは、均衡解の存在性の証明過程を用いたものである。

(6) 上の数値解法による計算例を示し、単純な反復計算によって十分精度の高い解を求めることができることを明らかにした。

なお本研究においては、道路網のすべてのリンクで交通量が観測されているという前提を設けたが、実際には

この条件は満足されないことが多いので、実用化を図るためにはこの点についての条件の緩和が必要であろう。また本研究では OD 交通の経路選択については先決されているものとしたが、実際にはこれらを推定することはかなり難しい。それゆえ経路選択を内生化したモデルに発展させることが考えられる。さらに推計された OD 交通量の適合度についても実際のデータを用いて検証を行っていく必要がある。これらについては今後の課題としたい。

最後に、本研究を行うにあたり終始鼓舞激励をいただいた京都大学 佐佐木綱教授、同 飯田恭敬教授に対し深謝の意を表する次第であります。

### 参考文献

- 1) Low, D.E. : A new approach to transportation systems modeling, Traffic Quarterly, pp.391~404, July, 1972.
- 2) Overgard : Development of a simplified traffic model for the city of Silkeborg, Paper Presented at the O.E.C.D.T.7 group in Copenhagen, 1972.
- 3) Jensen, T. and Nielsen, S.K. : Calibrating a gravity model and estimating its parameters using traffic volume counts, Proceedings from the English University Traffic Engineer's yearly congress, January 1973.
- 4) Holm, J., Jensen, T., Nielsen, S.K., Christensen, S.K., Jhonsen, B. and Ronby, G. : Calibrating traffic models on traffic census results only, Traffic Engineering and Control, Vol.17, No.4, pp.137~140, April, 1976.
- 5) 井上博司 : 交通量調査資料を用いた OD 交通量の統計的推計法, 土木学会論文報告集, 第 332 号, pp.85~94, 1983 年 4 月.
- 6) 飯田恭敬 : 発生交通量のみを变量とした実測交通量による交通需要推計法, 土木学会論文報告集, 第 283 号, pp.95~104, 1974 年 3 月.
- 7) 飯田恭敬・高山純一・金子一・水口玲二 : Dial 確率配分法を導入したリンク交通量による道路網交通需要推計法, 都市計画別冊, 第 19 号, pp.13~18, 1984 年 11 月.
- 8) Iida, Y. and Takayama, J. : Traffic demand estimation model for actual road network by observed link flows regarding generation trips only as unknowns, Proceedings of 3rd World Conference on Transportation Research, Vol.1, pp.130~142, 1983.
- 9) Iida, Y. and Takayama, J. : Comparative study of model formulations on OD matrix estimation from observed link flows, Proceedings of 4th World Conference on Transportation Research, Vol.2, pp.1570~1581, 1986.
- 10) 井上博司 : スクリーンライン調査による OD 表の精度の検定および OD 表の修正法, 交通工学, Vol.12, No.6, pp.11~19, 1977 年 11 月.
- 11) Zuylen, H.J. and Willumsen, L.G. : The most likely trip matrix estimated from traffic counts, Transpn. Res., Vol.14 B, No.3, pp.281~293, 1980.

- 12) 前掲 5).
- 13) 高山純一・飯田恭敬：周期変動を考慮した実測交通量による交通需要推計法，土木計画学研究・論文集 1，pp.43～50，1984 年 1 月。
- 14) Nguyen, S. : Estimating a O-D matrix from network data : a network equilibrium approach, Publication 87, Centre de recherche sur les Transports, Universite de Montreal, 1977.
- 15) Gur, Y., Turnquist, M., Schneider, M., Leblanc, L. and Kurth, D. : Estimation of an origin-destination trip table based on observed link volumes and turning movements, Final Report, No. DOT-FH-11-9292, U. S. Federal Highway Administration, Washington, D. C., 1979.
- 16) Leblanc, L. J. and Farhangin, K. : Selection of a trip table which reproduces observed link flows, *Transpn. Res.*, Vol. 16 B, No. 2, pp. 83~88, 1982.
- 17) Maher, M. J. : Inferences on trip matrices from observation on link volumes : a Bayesian statistical approach, *Transpn. Res.*, Vol. 17 B, No. 6, pp. 435~447, 1983.
- 18) Bell, Michael, G. H. : Log-linear models for the estimation of origin-destination matrices from traffic counts : an approximation, *Proceedings of the 9th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pp. 451~469, 1984.
- 19) 二階堂副包：現代経済学の数学的方法，岩波書店，pp. 285~314, 1960.
- 20) Smith, M. J. : The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria, *Transpn. Res.*, Vol. 13 B, pp. 295~304, 1979.

(1988. 1. 20・受付)