【土木学会論文集　第401号／Ⅳ-10　1989年1月】

需要変動を考慮した交通ネットワーク確率的利用者均衡モデルとその解法

A STOCHASTIC NETWORK EQUILIBRIUM MODEL WITH ELASTIC DEMAND AND ITS SOLUTION METHOD

赤松　隆*・松本嘉司**

By Takashi AKAMATSU and Yoshiji MATSUMOTO

This paper presents a stochastic network equilibrium model with elastic demand and an efficient algorithm for solving it. The model, which is consistent with both random utility theory and network equilibrium theory, is formulated using nested logit model. It is reformulated as an equivalent convex programming problem. After the derivation of the dual problem, these two are compared. Though it is held that stochastic network equilibrium model family is difficult to solve due to path flow (or cost) variables in the objective functions, we show that subgradient algorithm can be adopted to solve the dual problem. The method for calculating path choice entropy without path enumeration is developed and incorporated in the subgradient algorithm.

Keywords: *stochastic network equilibrium, elastic demand, subgradient algorithm*

1.　はじめに

交通計画における需要予測法については従来，さまざまな研究がなされ，多くの成果が蓄積されてきた．そして，ランダム効用理論に基づく非集計行動モデルや均衡理論に基づくネットワーク配分モデル等のように，この分野で開発・発展され，他の分野で応用されているものも多い．しかしながら，従来多くの交通計画において用いられてきた四段階推定法における各段階のモデル間の不整合性に端的にみられるように，これらの研究成果の体系化と一般化は必ずしも十分ではなかったように思われる．これらの研究成果を理論的に体系化・統合化し，さらに発展させてゆくことは，交通計画学における重要な研究課題の1つであろう．

このような課題に対するアプローチとして現在までに行われてきた研究としては，以下に挙げる2つの流れがある．第一は従来の四段階推定法の統合化を目的として，ネットワーク配分モデルから発展してきた交通ネットワーク統合モデルである[1)~6)]．これは，決定論的な需要変動型利用者均衡モデル（Beckmannモデル）において，適当な形の需要関数を仮定することによってエントロピーモデル・重力モデル等の分布交通量モデルを配分モデルに取り込むものとして開発され，現在では，発生交通量・分布交通量・機関分担・配分交通量の4つを統合したものも提案されている．しかしながら，これらのモデルには個人の行動論的根拠がないという批判がなされており，また，発生・分布・機関分担においては確率論的モデルを用いていながら配分の段階だけは決定論的モデルとなっているという点でモデル論理の一貫性に欠けているともいえるだろう．

第二は，ランダム効用理論と従来のネットワーク均衡理論を確率的利用者均衡（Stochastic User Equilibrium：以下SUEとよぶ）という概念により統合しようという流れ[7)~11)]である．これは，確率変数として表現された利用者の「認知所要費用（不効用)」によってネットワーク均衡分析を行うものであり，利用者の交通選択行動における情報の不完全性や行動の不確定性を考慮でき，従来の決定論的均衡モデルに比べ，より現実の利用者行動モデルに近いものになっているといえる．SUE配分モデルは，利用者の選択行動の分析範囲を経路選択のみで考えるか，目的地選択等も含めるかにより需要（OD交通量）固定型モデルと需要変動型モデルに分類できる．まず，前者については，等価な最適化問題とし

* 学生会員　東京大学工学部土木工学科
（〒113　文京区本郷7-3-1）
** 正会員　工博　東京大学教授　工学部土木工学科（同上）

ての定式化[9),10)]・問題の構造[11)]・解法[13),14)]等が従来の研究により明らかにされている．また，実際ネットワークへの適用では，他のモデルよりも適合度が高いことが報告されている[12)]．残された課題としては，効率的計算法（従来提案されている解法は非常に収束が遅い）および利用者の選択行動の確率的ばらつきを示すパラメーターの合理的・効率的推定法の開発が挙げられる．次に，後者の需要変動型 SUE（SUE with Elastic Demand：以下 SUE² とよぶ）配分モデルについては，これを発展させることによって，目的地選択から経路選択の段階までランダム効用理論による一貫性をもった利用者行動モデルをネットワーク均衡理論に整合性のある形で組み込み，交通ネットワーク統合需要予測モデルへ発展させることができる可能性をもっているが，定式化・問題の構造・解法等についてまだ不明な課題が残されている．

本研究は，この第二の流れから交通ネットワーク統合モデルを発展させることを目的として SUE² モデルについて考察し，上記問題点の克服法を提案する．すなわち，SUE² モデルの等価最適化問題の定式化およびその構造の明確化，さらに，その解法を提案することが本研究の目的である．

論文の構成は次のとおりである．まず，次章でランダム効用理論において開発されたネスティッドロジットモデルと整合性のある SUE² 配分モデルを定式化した後，**3.** で主問題・双対問題の 2 通りの等価な最適化問題を導入することによって，その問題構造を明らかにする．**4.** ではこの結果を用いて固定需要の場合にも適用可能な効率的な解法のアルゴリズムを提示し，**5.** では数値計算例によって，そのアルゴリズムの有効性を示す．

2.　需要変動型確率的利用者均衡モデル

本章では，ランダム効用理論に基づく利用者選択行動モデルからネットワーク均衡モデルを定式化する．まず，そのために必要な主な記号の定義をしておく．ノード集合 N とリンク集合 A からなるネットワークを (N, A)，OD ペア全体の集合を R，出発地ノード・目的地ノードの集合をそれぞれ O・D，出発地ノードが r の OD ペアの目的地ノードの集合を D_r，OD ペア rs の経路の集合を K_{rs} と表わす．交通量に関する変数は，出発地ノード r の（発生）交通量を o_r，集合 O 全体では，

$\boldsymbol{o}=(o_1, o_2, \cdots, o_r, \cdots)$,

OD ペア rs の（分布）交通量を q_{rs}，集合 R 全体では，

$\boldsymbol{q}=(q_{11}, q_{12}, \cdots, q_{rs}, \cdots)$,

と書く．このとき，発生交通量 o と分布交通量 q の間では次式が成立している．

$$o_r=\sum_{s\in D_r} q_{rs} \quad \forall r \cdots\cdots (1)$$

OD ペア rs の k 番目経路交通量を f_k^{rs}，集合 K_{rs} では

$\boldsymbol{f}^{rs}=(f_1^{rs}, f_2^{rs}, \cdots, f_k^{rs}, \cdots)$,

と書く．OD 交通量 $\boldsymbol{q}$ と経路交通量 $\boldsymbol{f}$ の間では次式が成立している．

$$q_{rs}=\sum_{k\in Krs} f_k^{rs} \quad \forall r, s \cdots\cdots (2)$$

リンク a の交通量を x_a，集合 A 全体については

$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_a, \cdots)$,

と書くと，経路交通量 $\boldsymbol{f}$ はリンク交通量 $\boldsymbol{x}$ と次の関係式で結ばれる．

$$x_a=\sum_{rs}\sum_{k} f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs} \quad \forall a \cdots\cdots (3)$$

ここで，

$$\delta_{ak}^{rs}=\begin{cases} 1：リンク\ a\ が\ \mathrm{OD}\ ペア\ rs\ の\ k\ 番目経路上に含まれる \\ 0：その他. \end{cases}$$

次に所要費用に関する変数を定義する．リンク a のコストを t_a，集合 A 全体については，

$\boldsymbol{t}=(t_1, t_2, \cdots, t_a, \cdots)$,

と書き，リンクコストはそのリンクの交通量に対して単調増加な関数で表わされるとする．

$$t_a=t_a(x_a) \cdots\cdots (4)$$

OD ペア rs の k 番目経路費用を C_k^{rs}，集合 Krs では

$\boldsymbol{C}^{rs}=(C_1^{rs}, C_2^{rs}, \cdots, C_k^{rs}, \cdots)$,

と書く．このとき経路費用 $\boldsymbol{C}$ とリンクコスト $\boldsymbol{t}$ との間には次の関係式が成立する．

$$C_k^{rs}=\sum_a t_a\delta_{ak}^{rs} \quad \forall k, r, s \cdots\cdots (5)$$

さて，本研究では利用者の選択行動モデルとして，目的地選択を上位トゥリー，経路選択を下位トゥリーにもつ階層的選択構造に対するネスティッドロジットモデルを採用し，これをもとにネットワーク均衡モデルを考える．ネスティッドロジットモデルでは OD ペア rs の第 k 番目経路が選択される確率 $\mathrm{Prob}(s, k|r)$ は，出発地ノードが r のトリップが目的地 s を選択する確率 $P(s|r)$ と OD ペア rs が選ばれた条件のもとで第 k 番目経路が選択される確率 $P(k|s, r)$ に分解することができ，

$$\mathrm{Prob}(s, k|r)=P(s|r)\cdot P(k|s, r)$$

で与えられる．また，OD ペア rs と経路 k による効用 U が，OD ペア rs について一定で経路によらない効用 $U(rs)$ と，OD ペア rs と経路の組合せによって変化する効用 $U(rsk)$ の和からなるとする．このとき，下位の経路選択については，第 k 番目経路の効用を

$$U(rsk)=-(C_k^{rs}+\xi_k^{rs})$$

ここで，ξ＝平均 0，標準偏差 $\pi/(\sqrt{6}\theta_1)$ の i.i.d ガンベル分布に従う確率的効用．

と置けば，ロジットモデル式によって，経路交通量 $\boldsymbol{f}$ は，ある OD 交通量 $\boldsymbol{q}$ に対して次式で与えられる．

$$f_k^{rs}=q_{rs}\exp(-\theta_1 C_k^{rs})/\sum_{k\in Krs}\exp(-\theta_1 C_k^{rs})$$

$$\forall k,\ r,\ s \quad\cdots\cdots(6)$$

次に，上位の目的地選択については，選択行動が OD 間所要費用のみで決まるとすれば，OD 効用が期待最小費用[16)~18)]；

$$S_{rs}=E\left[\min_{k\in Krs}(C_k^{rs}+\xi_k^{rs})\right]$$
$$=-(1/\theta_1)\ln\left[\sum_{k\in Krs}\exp(-\theta_1 C_k^{rs})\right]\cdots\cdots(7)$$

を用いて次のように表わされ，

$U(rs)=-(S_{rs}+\zeta_{rs})$

ここで，ζ＝平均 0，標準偏差 $\pi/(\sqrt{6}\theta_2)$ の i.i.d ガンベル分布に従う確率的効用．

OD 交通量 $\boldsymbol{q}$ は次式で与えられる．

$$q_{rs}=o_r\exp(-\theta_2 S_{rs})/\sum_{s\in Dr}\exp(-\theta_2 S_{rs})$$
$$\forall r,\ s\quad\cdots\cdots(8)$$

ただし，実際の目的地選択では，各目的地のもつ社会経済的特性の影響が大きいため，選択率モデルは目的地別の経路によらない効用 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s,\cdots)$ を含んだ，次のような形式とするのがよいであろう．

$$q_{rs}=o_r\exp(-\theta_2 S_{rs}+\eta_s)/\sum_{s\in Dr}\exp(-\theta_2 S_{rs}+\eta_s)$$
$$\forall r,\ s\quad\cdots\cdots(9)$$

また，発生交通量 $\boldsymbol{o}$ は，各出発地ノードについて，OD ペア期待最小費用の期待最小値（次章の式 (27) 参照）と適当な社会経済変数を用いて決定されるものとすれば，発生交通量から配分交通量までランダム効用理論と整合的な一貫性のある統合需要予測モデルにすることができる．しかしながら，本論文は SUE^2 の問題構造を明確にし，解法をわかりやすく提示することに重点をおくため，以降の章では式（8）の場合を扱い，発生交通量は外生的に与えられているものとする．これを目的地別効用 $\boldsymbol{\eta}$ を考慮した場合や発生交通量を内生化した場合へ拡張することはモデルの形式上容易である．

以上，交通量保存式（1）～（3），リンクコストとリンクフローの関係式（4），リンクコストと経路費用の関係式（5），OD ペア・経路選択確率式（6）～（8）の非線形連立方程式系により，ネスティッドロジット型確率的利用者均衡モデル（Nested Logit based Stochastic User Equilibrium：以下 NLSUE とよぶ）が定式化された．本研究では，次章以降において，これと等価な最適化問題を導き，それを解くことを考える．

なお，NLSUE は，より一般的には，リンク間相互の干渉を考慮し，

$$t_a=t_a(\boldsymbol{x})\quad\cdots\cdots(10)$$

とした場合も考えられるが，リンクコスト関数のヤコビアンが対称でない場合には，この問題は等価な最適化問題によって扱うことはできず，変分不等式問題として扱われる[19)~21)]．その変分不等式問題は緩和法（対角化法）[22),23)]等により解くことが期待できるが，その場合にも繰り返し計算中の子問題としてリンクコスト関数が式（4）の場合の問題を解く必要があり，等価最適化問題を効率的に解くアルゴリズムの検討は重要である．

3. 等価な最適化問題

式（1）～（8）に示された非線形連立方程式を直接解くことによって NLSUE の均衡解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})$ を求めるのは困難である．そこで本研究では，他の多くの均衡モデルと同様に，式（1）～（8）と等価な最適化問題を導入し，それを解くことを考える．従来，多くの研究によって指摘されてきた通常のロジットモデルとエントロピーモデルの等価性[30)~34)]から容易に類推できるように，NLSUE の等価最適化問題は以下のようになる．

$$\max_{(x,q)}.ZP=-\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\nu)\,d\nu$$
$$+\sum_{rs}q_{rs}H_{rs}^{[1]}+\sum_r o_r H_r^{[2]}\cdots\cdots(11)$$

subject to

$$o_r=\sum_s q_{rs}\quad\forall r\quad\cdots\cdots(12)$$

$$q_{rs}=\sum_k f_k^{rs}\quad\forall r,\ s\quad\cdots\cdots(13)$$

$$x_a=\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs}\quad\forall a\quad\cdots\cdots(14)$$

$$f_k^{rs}\geqq 0\quad\forall k,\ r,\ s\quad\cdots\cdots(15)$$

$$q_{rs}\geqq 0\quad\forall r,\ s\quad\cdots\cdots(16)$$

ここで，

$$H_{rs}^{[1]}=-(1/\theta_1)\sum_k P_k^{rs}\ln P_k^{rs}\cdots\cdots(17)$$

$$H_r^{[2]}=-(1/\theta_2)\sum_s P_s^r\ln P_s^r\cdots\cdots(18)$$

$P_k^{rs}=f_k^{rs}/q_{rs}$：経路選択確率

$P_s^r=q_{rs}/o_r$：目的地選択確率

目的関数の第1項は通常の利用者均衡配分モデルで見慣れたリンクコスト関数積分形，第2・第3項はおのおのの経路選択・目的地選択確率に関するエントロピー関数を分布交通量・発生交通量で重み付き合計したものである．ここで，分布交通量 $\boldsymbol{q}$ を固定（外生的に与える）すれば第3項は定数となり目的関数から落ち，Fisk[9)]の示した需要固定ロジット型確率的利用者均衡モデルとなる．これらの各項はリンクコスト関数の単調増加性・エントロピー関数の性質からすべて上に凸な関数であり，その和である目的関数は上に凸な関数であることがわかる．また，制約条件も凸な領域を形成しているから，この最適化問題は凸計画問題である．この問題の凸性から解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})$ は唯一に決まる．その解が NLSUE の解となることは，凸計画問題の最適性の必要十分条件である Kuhn-Tucker 条件が以下のように表わされ，これらが簡単な式の展開により式（1）～（8）に一致することか

ら明らかであろう．

$$f_k^{rs}\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}=0 \quad\cdots\cdots(19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}\geqq 0 \quad\cdots\cdots(20)$$

$$q_{rs}\frac{\partial L}{\partial q_{rs}}=0 \quad\cdots\cdots(21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{rs}}\geqq 0 \quad\cdots\cdots(22)$$

and (12)～(16).

ここで，L はラグランジアンで，その $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{q}$ に関する偏微分項は以下のとおり．

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}}=-C_k^{rs}-\frac{1}{\theta_1}(\ln f_k^{rs}+1)+\lambda_{rs} \quad\cdots\cdots(23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{rs}}=-\lambda_{rs}-\left(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_1}\right)(\ln q_{rs}+1)+\mu_r \quad\cdots\cdots(24)$$

ここで，$\mu_r \cdot \lambda_{rs}$ はおのおの制約条件式（12），（13）に対応したラグランジュ未定乗数で，双対問題に現われる期待最小費用（式（27），（26））に相当する．

ところで，凸計画問題は一般にその双対問題を考えることができ，それによって問題の構造が明確になり問題を解くための情報が得られることがある．ここでも以下のような双対問題を考えることができる．

$$\min_{(t)}.\ ZD=\sum_a\int_{t_a(0)}^{t_a}x_a(\nu)\,d\nu-\sum_r o_r S_r^{[2]}(\boldsymbol{S}^{[1]}) \quad\cdots\cdots(25)$$

ここで，x_a：リンクコスト関数 $t_a(x_a)$ の逆関数，

$$S_{rs}^{[1]}=-(1/\theta_1)\ln\left[\sum_k \exp(-\theta_1 C_k^{rs})\right] \quad\cdots\cdots(26)$$

$$S_r^{[2]}=-(1/\theta_2)\ln\left[\sum_s \exp(-\theta_2 S_{rs}^{[1]})\right] \quad\cdots\cdots(27)$$

この問題は明示的には制約条件をもたないが，逆リンクコスト関数の定義から，次のような暗黙の制約条件をもつ．

$$t_a\geqq t_a(0) \quad\cdots\cdots(28)$$

双対問題（25）が NLSUE と等価であることは，停留条件（この問題は凸計画問題であるので最適性の必要十分条件）が以下のように表わされることから明らかである．

$$\partial ZD/\partial t_a=x_a-\sum_r\sum_s\sum_k o_r P_s^r P_k^{rs}\delta_{ak}^{rs}=0 \qquad \forall a \quad\cdots\cdots(29)$$

ただし，ここで次のような期待最小費用関数の性質[17]を用いた．

$$\partial S_r^{[2]}/\partial S_{rs}^{[1]}=P_s^r \quad \forall r, s \quad\cdots\cdots(30)$$

$$\partial S_{rs}^{[1]}/\partial C_k^{rs}=P_k^{rs} \quad \forall k, r, s \quad\cdots\cdots(31)$$

上記二問題を比べて興味深いことは，主問題の目的関数は OD ペア選択に関するエントロピー項と経路選択に関するエントロピー項の和，すなわち，エントロピーの展開型で構成されているのに対して，双対問題は OD コストに関する期待最小費用の中に経路コストに関する期待最小費用が入れ子型に入った形となっていることである．また，主問題では明示的な未知変数はリンクフロー $\boldsymbol{x}$ と OD フロー $\boldsymbol{q}$ の２つのベクトルであるのに対し，双対問題ではリンクコスト $\boldsymbol{t}$ のみとなっていることは，解法を考えるうえでも注目すべきことである．この両問題間での未知変数個数の非対称性は，ネットワーク理論におけるフロー変数とコスト変数の非対称性によるものである．すなわち，経路費用 $\boldsymbol{C}$ はリンクコスト $\boldsymbol{t}$ から一意的に計算でき（式（５）参照），全経路について $\boldsymbol{C}$ を計算すれば $S^{[1]}$ も計算できるのに対し，経路交通量 $\boldsymbol{f}$ は，リンクフロー $\boldsymbol{x}$ とフロー保存則のみからは一意的に決めることができず(式(３)参照)，したがって，OD 交通量 $\boldsymbol{q}$ も一意的に決められないことによる．この明示的未知変数の個数の違いと制約条件の有無から考えれば，双対問題の方が主問題よりも解きやすいと想像できる．

さて，ここで，２つの問題の関係を明らかにするために，主問題に現われるエントロピー $\boldsymbol{H}$ と双対問題に現われる期待最小費用 $\boldsymbol{S}$ の間に成立する関係式を導いておく．この関係式は次章で示す解法のアルゴリズムにおいて用いられることになる．双対理論によれば，ある経路費用 $\boldsymbol{C}$ についてロジットモデルによって経路選択確率 $\boldsymbol{P}$ が決まっているとき，次の式が成立している[11]．

$$S_{rs}^{[1]}+H_{rs}^{[1]}=\sum_k P_k^{rs}C_k^{rs} \quad \forall r, s \quad\cdots\cdots(32)$$

$$\therefore\ \sum_{rs}q_{rs}H_{rs}^{[1]}+\sum_{rs}q_{rs}S_{rs}^{[1]}=\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}C_k^{rs} \quad\cdots\cdots(33)$$

期待最小費用関数 $\boldsymbol{S}^{[2]}$ は関数型としては $\boldsymbol{S}^{[1]}$ と全く同じであることから，目的地選択に関する変数については式（32）と同様の次式が成立することがわかる．

$$S_r^{[2]}+H_r^{[2]}=\sum_s P_s^r S_{rs}^{[1]} \quad \forall r \quad\cdots\cdots(34)$$

$$\therefore\ \sum_r o_r H_r^{[2]}+\sum_r o_r S_r^{[2]}=\sum_{rs}q_{rs}S_{rs}^{[1]} \quad\cdots\cdots(35)$$

式（33）と式（35）を足せば，階層的な双対関係を示す次の式が得られる．

$$\sum_r o_r H_r^{[2]}+\sum_{rs}q_{rs}H_{rs}^{[1]}+\sum_r o_r S_r^{[2]} =\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}C_k^{rs}=\sum_a x_a t_a \quad\cdots\cdots(36)$$

式（36）は，均衡が達成された状態においては，目的地選択エントロピー・経路選択エントロピー・目的地期待最小費用に交通量の重みをつけて足し合わせたものが常にネットワーク全体の総所要費用に一致することを示している．また，式（36）は，主問題の最適値と双対問題の最適値が等しいとおくことによっても得られるから，本問題は，双対ギャップのない素直な問題であることがわかる．この式の導出過程から明らかなように，ネステッドロジット型選択モデルであれば，選択の階層が増えた

場合にも同様に，各階層でのエントロピーの和と最上位階層の期待最小費用の和は常に総所要費用に等しくなることがわかる．

4. 解　　法

（1） 劣勾配法

SUE 配分は，主問題・双対問題のいずれの場合においても，目的関数（前章の式（11），（25）参照）に経路変数 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{c}$ が含まれている．一般に大規模ネットワークにおいては，経路を列挙することは事実上不可能であるから，SUE の目的関数値を計算することは困難でありFrank-Wolfe 法等の目的関数値を用いたアルゴリズムによって SUE 問題を解くことは困難であるとされてきた．そのため，逐次平均法（Method of Successive Averages：以下 MSA とよぶ）とよばれる方法[13),14)]が解法として提案されているが，各繰り返し計算において目的関数値に関する情報を全く用いないため収束が非常に緩慢で，相当な計算の手間が必要であるという欠点がある．また，この方法は需要固定型 SUE に対する解法として開発されたもので，前章で定式化した需要変動型 SUE に対しては，（収束の遅さは考慮しないとしても）直接適用することはできない．

最近，劣勾配法とよばれるアルゴリズムを用いて大規模ネットワークにおける多種流システム最適問題[25)]や利用者均衡配分問題[26)]を効率的に解く方法が提案されている．このアルゴリズムは，目的関数がなめらかでない関数の場合でも劣勾配と目的関数値が得られるなら適用可能で，解ベクトル改訂のための方向ベクトルとして劣勾配を用い，ステップサイズ決定には目的関数値とその下限値を用いる（一次元探索は行わない）という特徴がある．また，下限値が与えられたときに，このアルゴリズムが最適解へ収束することの証明が Polyak[27)]により示されている．この劣勾配法を用いて次の形式の最適化問題；

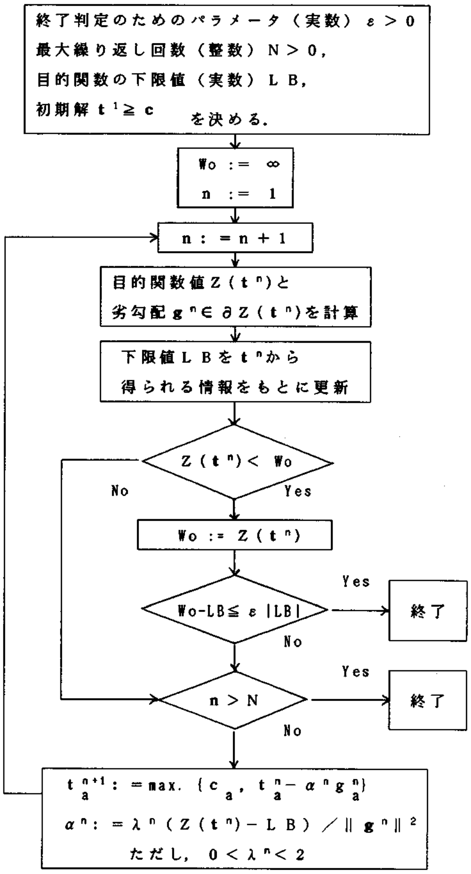
$$\text{MIN. } Z(\boldsymbol{t})$$
$$\text{subject to } \boldsymbol{t} \geqq \boldsymbol{c}$$

を解くためのアルゴリズムを図—1 に流れ図で示す．

本研究では，このアルゴリズムを NLSUE と等価な双対問題（式（25））を解くために用いるが，それには，劣勾配・目的関数値・目的関数下限値の計算が必要である．次節では，これらを効率的に求める方法について考察する．

（2） 経路を列挙せずに目的関数を計算する方法

上記アルゴリズムが大規模ネットワークでも効率的に適用できるためには，劣勾配・目的関数値・目的関数下限値を経路を列挙せずに計算する必要がある．本節では，その方法を劣勾配・目的関数値・目的関数下限値の順に



図—1 劣勾配法のフローチャート

考察してゆくが，まず，その準備として，次の定理が成立することを示す．ただし，定理では，記号の煩雑さを避けるために，OD ペアが 1 つの場合で示してある．多 OD ペアの場合には，重ね合わせればよいから一般性は失われない．

定理：経路費用を用いたロジットモデルによって経路選択率の決まる確率的ネットワーク配分法においては，

$$H \equiv -\sum_k P_k \ln P_k$$

によって定義される経路選択率エントロピー H は，リンク選択率エントロピーとノード選択率エントロピーの差に等しい．すなわち，H は次式から，リンクフローのみを用いて計算できる．

$$H = -\sum_a P_a \ln P_a + \sum_n p_n \ln p_n \quad \cdots\cdots(37)$$

ここに，

$P_k \equiv f_k/q$：経路 k の選択確率，

$P_a \equiv X_a/q$：リンク a の選択確率，

$p_n \equiv \sum_{b \in In} x_b/q$：ノード n の選択確率，

f_k：第 k 番目経路の交通量，

x_a：リンク a の交通量，

q：OD 交通量，
I_n：ノード n へ流入しているリンクの集合．
（ノード n を end node にもつリンクの集合）

証明：リンクに関する集合として全リンクの集合 A および k 番目経路に含まれるリンクの集合 Ak を考え，経路に関する集合として全経路の集合 K およびリンク $m\rightarrow n$ を通る経路の集合 γ_{mn} を考える．ノードに関する集合は，全ノードの集合を N，ノード n に流入するリンクの始点ノードの集合を Fn と書く．

ある経路において，ノード n が選ばれている条件下で，その１つ手前のノードとして m が選ばれている条件付き確率を $\mathrm{Prob}(m|n)$ と書き，さらに，

$$h(m|n)=-\mathrm{Prob}(m|n)\ln \mathrm{Prob}(m|n)$$

と書くことにする．

経路費用が，その経路中に含まれるリンクコストの和からなるとし，経路選択率が経路費用を用いたロジットモデルによって決まるとした確率的ネットワーク配分法においては，経路選択率は次式のようなマルコフ連鎖的式で与えられる[28]．

$$P_k=\prod_{(i,j)\in Ak}\mathrm{Prob}(i|j)\quad \forall k \cdots\cdots(38)$$

これを経路エントロピー H の定義式に代入して，H は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}H&=-\sum_{k\in K}P_k\ln P_k\\&=-\sum_{k\in K}\left\{\prod_{(i,j)\in Ak}\mathrm{Prob}(i|j)\cdot\sum_{(i,j)\in Ak}\ln\mathrm{Prob}(i|j)\right\}\\&=\sum_{k\in K}\left\{\sum_{(m,n)\in Ak}h(m|n)\frac{\prod_{(i,j)\in Ak}\mathrm{Prob}(i|j)}{\mathrm{Prob}(m|n)}\right\}\\&=\sum_{(m,n)\in A}\left\{h(m|n)\sum_{k\in\gamma_{mn}}\frac{\prod_{(i,j)\in Ak}\mathrm{Prob}(i|j)}{\mathrm{Prob}(m|n)}\right\}\\&=\sum_{n\in N}\left\{\sum_{m\in Fn}h(m|n)\frac{\mathrm{Prob}(m\cap n)}{\mathrm{Prob}(m|n)}\right\}\\&=\sum_{n\in N}p_n\sum_{m\in Fn}h(m|n)\cdots\cdots(39)\end{aligned}$$

ところで，ノード i が流出ノードとなる事象を X，ノード j が流入ノードとなる事象を Y, XY を X，Y が同時に起こる事象とすると，条件付きエントロピーの加法性から次式が成立する[29]．

$$H(XY)=H(Y)+H(X|Y)\cdots\cdots(40)$$

ここで，$H(XY)$ はリンクが選ばれる確率のエントロピー，$H(Y)$ はノードが選ばれる確率のエントロピーであり，$H(X|Y)$ は式（39）で求めた条件付きエントロピーにほかならない．よって，経路エントロピーは，

$$\begin{aligned}-\sum_{k\in K}P_k\ln P_k&=H(XY)-H(Y)\\&=-\sum_{a\in A}P_a\ln P_a+\sum_{n\in N}p_n\ln p_n\end{aligned}$$

となり，式（37）が証明された．

この定理を念頭におきつつ，まず，劣勾配の計算法について考察する．NLSUE の双対問題の目的関数は，t および S の定義域の範囲では連続・微分可能な関数である．したがって，劣勾配は，まさに通常の勾配と一致し，勾配ベクトルの各要素 g_a は次式で表わされる（式（29）参照）．

$$g_a=x_a-\sum_r\sum_s\sum_k o_r P_s^r P_k^{rs}\delta_{ak}^{rs}\cdots\cdots(41)$$

この式は，n 回目の繰り返し計算における g_a^n が，そのときのリンクコスト t_a^n に対して逆リンクコスト関数から得られるリンクフロー $x_a^n(t_a^n)$ と t_a^n に対してネステッドロジット配分を行った結果得られるリンクフロー y_a^n との差で与えられることを示している．OD 交通量が固定されている場合には y_a^n は単純なロジット配分となるから，経路を列挙せずにロジット配分と等価な結果を与える DIAL のアルゴリズム[28]を用いてこれを求めれば g^n は容易に得られる．OD 需要が変動する場合には，目的地選択確率を決めることができれば OD 需要 q が決まり，あとは固定需要の場合と同じである．目的地選択確率を決めるためには期待最小費用 $S^{[1]}$ が必要（式（８）参照）となるが，これは先に示した定理および前章で示した期待最小費用関数とエントロピーとの関係式（32）を用いれば，経路を列挙せずに求めることができる．すなわち，各 OD ペアについて，次のような手続き；

① 単位交通量を DIAL 配分することによってリンク選択率を計算，
② 定理の式（37）に①で求まったリンク選択率を代入し，経路エントロピーを計算，
③ 平均費用（①で求めたリンク選択率にリンクコストを掛けて総和をとったもの）から②で求めた経路エントロピーの値を引く；

を行うことによって期待最小費用 $S^{[1]}$ の値が求まる．

目的関数の計算については，劣勾配計算のための上記手続きにより求まった期待最小費用 $S^{[1]}$ の計算結果をそのまま用いればよいから，特に説明の必要はないであろう．

最後に，目的関数下限値 LB については，各繰り返し計算において劣勾配を求めるために行う DIAL 配分フローに対する主問題の目的関数の値（この計算には，上記の経路を列挙せずにエントロピーの値を求める方法がそのまま使える）を LB とすればよい．これは，双対理論により主問題の許容解は双対問題の下限値を与え，均衡状態では双対問題の目的関数値と主問題の目的関数値が一致することを利用したものである．

なお，以上では，議論をわかりやすくするために OD ペアを１つずつ分解した説明としたが，並列型 DIAL

アルゴリズムにおいて同一出発ノードをもつ複数のODペアを同時に配分することができるのと同様に，上記計算は同一出発ノードをもつODペアについて同時に行うことができる．このことは，DIALのアルゴリズムで用いられる「リンクウェイト」と上記Prob$(m|n)$は比例関係にあり，並列型DIALアルゴリズム中では同一出発ノードをもつODペアは（目的地が違っても）同じリンクウェイトによって配分されていることによる．

以上の考察結果から，各繰り返し計算におけるリンクコストに対してDIAL配分を行えば，それにごくわずかな計算手続き（計算量のオーダーでいえば，利用者均衡配分問題をFrank-Wolfe法で解く場合の最短経路配分を除いた手続きに必要な計算量に相当する程度であろう）を付加するだけで，劣勾配・目的関数値・目的関数下限値の値が得られることがわかった．固定需要SUEの場合，MSAにおいても各繰り返し計算においてDIAL配分を行っているから，同じ回数の繰り返し計算回数に対して必要な計算量はMSAと劣勾配法とでは，ほぼ同程度であると考えられる．

5. 数値計算例

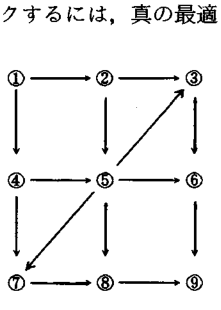
図―2のような9ノード・14リンクからなる簡単なネットワークにおいて，OD需要を固定した場合と変動させた場合について，おのおのアルゴリズムの確認を行う．ODペアは①→③，①→⑤，①→⑦，①→⑨，⑤→⑨の5つで，その経路数はおのおの3，2，3，10，4である．また，リンクコスト関数は次のようなBPR型を採用する．

$$t_a=\alpha_a+\beta_a x_a^4 \quad \cdots\cdots(42)$$

a） 需要固定型の場合

この場合には，主問題の目的関数第3項（目的地選択エントロピー）の値は一定値となり，これを考慮する必要はない．したがって，決めておかねばならないパラメーターはθ_1のみで，この値は0.5とする．また，OD交通量はある単位で測って，$q_{13}=3.0$，$q_{15}=2.0$，$q_{17}=4.0$，$q_{19}=5.0$，$q_{59}=10.0$であるとする．

アルゴリズムの効率性をチェックするには，真の最適解があらかじめわかっていると都合がよい．そこで，ここでは，ある固定されたリンクコスト$\boldsymbol{t}$に対応してフローインデペンデントなロジット配分によってリンクフロー$\boldsymbol{x}$を求め，これを真の均衡解$(\boldsymbol{t}^{op},\boldsymbol{x}^{op})$とする．そして，この$\boldsymbol{t}^{op}$，$\boldsymbol{x}^{op}$と適当に決めた$\boldsymbol{\alpha}$の値をリンクコスト関数式（42）に代入し，リンクコスト関数パラメーター$\boldsymbol{\beta}$を決めることにする．このようにして得られるのが表―1である．



図―2 例題ネットワーク

また，この最適解での目的関数の値を求めると，主問題・双対問題のおのおのに対して，以下のようになる．

max. $ZP=-77.945+45.468=-32.477$

min. $ZD=100.641-133.118=-32.477$

表―1のリンクコスト関数パラメーター$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，前記OD交通量$\boldsymbol{q}$，パラメーター$\theta_1$を入力変数として，前章のアルゴリズム（劣勾配法）を実行し，均衡フロー・コストを求める．各繰り返し計算での解と最適解との乖離度を測るために，目的関数値による指標；

$$DZ^n\equiv|Z^{op}-Z^n|/|Z^{op}| \quad \cdots\cdots(43)$$

と，リンクフロー・リンクコストによる指標；

$$Dx^n\equiv\|\boldsymbol{x}^{op}-\boldsymbol{x}^n\|/\|\boldsymbol{x}^{op}\| \quad \cdots\cdots(44)$$

$$Dt^n\equiv\|\boldsymbol{t}^{op}-\boldsymbol{t}^n\|/\|\boldsymbol{t}^{op}\| \quad \cdots\cdots(45)$$

を用いる．ここで，上付き添え字のnは繰り返し計算回数を示す．表―2に，$\boldsymbol{t}$の初期値を$2\boldsymbol{\alpha}$としたときのアルゴリズムの収束状況を示す．

b） 需要変動型の場合

パラメーターθ_1,θ_2は，それぞれ0.8，0.3とする．また，発生交通量はある単位で測って，

$o_1=14.0$，$o_5=10.0$

であるとする．固定需要の場合と同様に，最適解・パラ

表―1 最適解とリンクコスト関数パラメーター

リンク 番号	x_a	t_a	α_a	β_a
1(1-2)	6.856993	5.00	0.50	0.00203553
2(1-4)	7.143007	5.00	0.50	0.00172857
3(2-3)	3.372171	3.00	2.50	0.00386662
4(2-5)	3.484822	4.00	3.00	0.00678075
5(3-6)	2.888869	2.00	1.50	0.00717891
6(4-5)	3.484822	4.00	3.00	0.00678075
7(4-7)	3.658186	3.50	3.00	0.00279195
8(5-3)	2.516698	2.50	2.30	0.00498546
9(5-6)	4.737867	2.50	0.50	0.00396916
10(5-7)	2.977210	2.50	2.00	0.00636403
11(5-8)	4.737867	3.50	1.00	0.00496145
12(6-9)	7.626737	5.00	1.00	0.00118224
13(7-8)	2.635396	3.00	2.80	0.00414617
14(8-9)	7.373263	4.00	1.00	0.00101504

表―2 各繰返し計算での最適解からの乖離度

繰返し	乖離度		
回数	Dx	Dt	DZ
1	0.3122	0.2640	0.4105
2	0.1566	0.1801	0.1964
3	0.0695	0.1653	0.0487
4	0.0578	0.1529	0.0277
5	0.0495	0.1416	0.0210
10	0.0218	0.0886	0.0055
15	0.0154	0.0661	0.0029
20	0.0142	0.0538	0.0025
25	0.0116	0.0493	0.0017

メーターを決めると，表—3に示すようになり，最適OD交通量は，次のようになる．

$q_{13}=4.70$, $q_{15}=4.33$, $q_{17}=4.13$, $q_{19}=0.84$, $q_{59}=10.00$

このときの経路エントロピー $H^{[1]}$，期待最小費用 $S^{[1]}$，平均費用の値をODペア別に計算した結果を表—4に示しておく．これは，前章で説明したリンクフローから計算する方法で経路を列挙せずに求めることができる．この例題程度のネットワークであれば，経路を列挙することも可能であるので，経路費用・経路選択率を各経路について計算し経路エントロピー・期待最小費用・平均費用を求めれば，それらの値はリンクフローから計算したときの値と一致していること，経路エントロピーと期待最小費用の和が平均費用となっていること等が確認できる．さらに，この最適解での目的関数の値を求めると，主問題・双対問題のおのおのに対して，以下のようになる．

max. $ZP=-96.125+25.304+58.746=-12.075$

min. $ZD=111.035-123.110=-12.075$

表—3のリンクコスト関数パラメーター $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，発生交通量 $\boldsymbol{o}$，パラメーター θ_1, θ_2 を入力変数とし，$\boldsymbol{t}$ の初期値を $2\boldsymbol{\alpha}$ として，劣勾配法を実行した．その均衡解への収束状況を表—5に示す．

表—2，5をみればわかるように，この程度の簡単なネットワークなら，固定需要型，変動需要型のどちらの場合においても，10回以内の繰返し計算で，リンクフローおよび目的関数に関する厳密解からの乖離度 Dx・Dz がともに5％以内になるという結果が得られた．また，繰り返し回数をふやせば，計算機による数値計算誤差の程度まで，ほぼ完全に厳密解へ収束していることがわかる．

表—3 最適解とリンクコスト関数パラメーター

リンク番号	x_a	t_a	α_a	β_a
1(1-2)	7.394255	5.00	0.50	0.00150534
2(1-4)	6.605745	5.00	0.50	0.00236334
3(2-3)	4.462908	3.00	2.50	0.00126037
4(2-5)	2.931347	4.00	2.00	0.02708701
5(3-6)	1.143785	2.00	1.50	0.29214045
6(4-5)	2.931347	4.00	2.00	0.02708701
7(4-7)	3.674398	3.50	3.00	0.00274300
8(5-3)	1.382688	2.50	2.00	0.13679612
9(5-6)	4.323295	2.50	0.50	0.00572493
10(5-7)	1.506576	2.50	2.00	0.09705237
11(5-8)	4.323295	3.50	1.00	0.00715617
12(6-9)	5.467081	5.00	1.00	0.00447752
13(7-8)	1.054466	3.00	2.50	0.40442625
14(8-9)	5.377762	4.00	1.00	0.00358687

表—4 経路エントロピー・期待最小費用・平均費用

ODペア	H_{rs}	S_{rs}	$\Sigma_k P_k^{rs} C_k^{rs}$
①→③	0.5230	7.8560	8.3790
①→⑤	0.8664	8.1330	8.9994
①→⑦	0.6691	8.2910	8.9601
①→⑨	2.3816	13.5778	15.9594
⑤→⑨	1.4323	6.4037	7.8360

表—5 各繰返し計算での最適解からの乖離度

繰返し回数	乖離度 Dx	Dt	DZ
1	0.3702	0.4696	2.8528
2	0.2562	0.3710	1.5579
3	0.1808	0.3063	1.0997
4	0.1456	0.2693	1.1579
5	0.1084	0.2214	1.3128
10	0.0371	0.0936	0.0340
15	0.0295	0.0760	0.0209
20	0.0224	0.0587	0.0123
25	0.0162	0.0454	0.0072
50	0.0077	0.0216	0.0015
100	0.0021	0.0060	0.0001
200	0.0001	0.0004	0.0000

6. おわりに

本研究は，まず，ネスティッドロジットモデルを用いた需要変動型確率的利用者均衡配分モデル（NLSUEモデル）を定式化し，ネットワーク統合均衡需要予測モデルへの発展方向を示した．このNLSUEモデルは，ダミーのODノードを導入することにより，従来の固定需要ロジット型SUEモデルの欠点（IIA特性）を克服するモデルとしての利用や，トリップチェインを考慮したモデルへの発展等も可能であると考えられる．次に，NLSUEモデルは主問題と双対問題という2通りの等価な最適化問題として扱えることが示された．この最適化問題は経路変数が目的関数に含まれるため，一見，解くことが容易でないようにみえるが，主問題と双対問題の間に成立する関係および経路を列挙せずに経路交通量に関するエントロピーを計算する方法を明らかにすることによって，劣勾配法を用いて解くことができることがわかった．このアルゴリズムの有効性・効率性は実際の数値計算により確かめられ，その結果は，有望なものであった．

本研究では触れられなかったSUEモデルに関する今後の課題としては，以下のようなものが挙げられる．

① パラメーター（θ_1, θ_2）の合理的かつ効率的推定法を検討すること．

② 本研究で提案した解法をより大規模なネットワークへ適用し，その有効性を確認すること．

③ 本研究で提案したネットワーク統合均衡需要予測モデルを実際の大規模ネットワークへ適用し，その適用可能性を検討すること．

④ コストの変化に対するフロー変化の感度分析を理

論的・実証的に検討すること.

⑤ 合理的なネットワーク表現法を検討すること.

謝　辞：最後に，本研究をまとめるにあたって貴重な示唆・コメントを頂いた東京大学 島崎敏一助教授，同 桑原雅夫助教授に深く感謝いたします.

参 考 文 献

1) Evans, S. P. : Derivation and Analysis of Some Models for Combining Trip Distribution and Assignment, Trans. Res. 10 (1), pp. 37～57, 1976.

2) Dafermos, S. C. : Integrated Equilibrium Flow Models for Transportation Planning, Traffic Equilibrium Methods, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 118, Springer-Verlag, New York, pp. 106～118, 1976.

3) Florian, M. and Nguyen, S. : A Combined Trip Distribution Modal Split and Trip Assignment Model, Trans. Res. 12 B (4), pp. 241～246, 1978.

4) LeBlanc, L. J. and Abdulaal, M. : Combined Mode Split-Assignment and Distribution-Modal Split-Assignment Models with Multiple Groups of Travelers, Trans. Sci. 16 (4), pp. 430～442, 1982.

5) 加藤 晃・宮城俊彦・吉田俊和：交通分布・配分統合モデルとその実用性に関する研究，交通工学 17 (6), pp. 3～11, 1982.

6) Safwat, K. N. A. and Magnanti, T. L. : A Combined Trip Generation, Trip Distribution, Modal Split and Trip Assignment Model, Trans. Sci. 18 (1), pp. 14～30, 1988.

7) Daganzo, C. F. and Sheffi, Y. : On Stochastic Models of Traffic Assignment, Trans. Sci. 11 (3), pp. 253～274, 1977.

8) Sheffi, Y. and Daganzo, C. F. : Computation of Equilibrium over Transportation Networks : The Case of Disaggregate Demand Models, Trans. Sci. 14 (2), pp. 155～173, 1980.

9) Fisk, C. S. : Some Developments in Equilibrium Traffic Assignment, Trans. Res. 14 B (3), pp. 243～255, 1980.

10) Daganzo, C. F. : Unconstrained Extremal Formulation of Some Transportation Equilibrium Problems, Trans. Sci. 16 (3), pp. 332～360, 1982.

11) Miyagi, T. : On the Stochastic User Equilibrium Model Consistent with Random Utility Theory, Proc. of the WCTR, pp. 1619～1635, 1985.

12) 桑原雅夫：交通量配分手法の実証的検討，交通工学 23 (2), pp. 17～25, 1988.

13) Sheffi, Y. and Powell, W. B. : A Comparison of Stochastic and Deterministic Traffic Assignment over Congested Networks, Trans. Res. 15 B (2), pp. 53～64, 1981.

14) Sheffi, Y. and Powell, W. B. : An Algorithm for the Equilibrium Assignment Problem with Random Link Times, Networks 12 (2), pp. 191～207, 1982.

15) Daganzo, C. F. : Stochastic Network Equilibrium with Multiple Vehecle Types and Asymmetric Indefinit Link Cost Jacobian, Trans. Sci. 17 (3), pp. 282～300, 1983.

16) Ben-Akiva, M., Gunn, F. H. and Silman, L. A. : Disaggregate Trip Distribution Models, Proc. of JSCE No. 347/Ⅳ-1, pp. 1～16, 1984.

17) Williams, H. C. W. L. : On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measures of User Benefit, Environ, Plan. A 9, pp. 285～344, 1977.

18) Daganzo, C. F. Multinomial Probit : The Theory and Its Application to Demand Forecasting, Academic Press, New York, 1979.

19) Smith, M. J. : The Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria, Trans. Res. 13 B (4), pp. 295～304, 1979.

20) Dafermos, S. : Traffic Equilibrium and Variational Inequalities, Trans. Sci. 14 (1), pp. 42～54, 1980.

21) Fisk, C. S. and Boyce, D. E. : Alternative Variational Inequality Formulation of the Network Equilibrium-Travel Choice Problem, Trans. Sci. 17 (4), pp. 454～463, 1983.

22) Dafermos, S. : Relaxation Algorithms for the General Asymmetric Traffic Equilibrium Problem, Trans. Sci. 16 (2), pp. 231～260, 1982.

23) Fisk, C. S. and Nguyen, S. : Solution Algorithm for Network Equilibrium Models with Asymmetric User Costs, Trans. Sci. 16 (3), pp. 361～381, 1982.

24) Held, M., Wolfe, P. and Crowder, H. P. : Validation of Subgradient Optimization, Math. Programming 6, pp. 62～88, 1974.

25) Kennington, J. and Shalaby, M. : An Effective Subgradient Procedure for Minimal Cost Multi-commodity Flow Problems, Management. Sci. 23 (9), pp. 994～1004, 1977.

26) Fukushima, M. : On the Dual Approach to the Traffic Assignment Problem, Trans. Res. 18 B, pp. 235～245, 1984.

27) Polyak, B. T. : Minimization of Unsmooth Functionals, USSR Comput. Math. and Math. Physics 9 (3), pp. 14～29, 1969.

28) Dial, R. B. : A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Algorithm which Obviates Path Enumeration, Trans. Res. 5 (2), pp. 83～111, 1971.

29) 有本 卓：確率・情報・エントロピー，森北出版，1980.

30) Smith, T. E. : A Cost-efficiency Theory of Dispersed Network Equilibria, Environ. Plan. A 20, pp. 231～266, 1988.

31) Florian, M. : Utility, Entropy and a "Paradox" of Traffic Flow, Universite de Montreal Center de recherche sur les transports publication No. 151, 1979.

32) Anas, A. : Discrete Choice Theory, Information Theory and the Multinomial Logit and Gravity Models, Trans. Res. 17 (1), pp. 13～23, 1983.

33) 宮城俊彦・加藤　晃：ランダム効用理論を基礎とした交通統合モデル，土木計画学論文集，No. 1，pp. 99～106，1984.
34) Fisk, C. : Entropy and Information Theory : are we missing somthing ?, Environ, Plan. A 17, pp. 679～689, 1985.

(1988. 7. 8・受付)