

砂柱の剛性を考慮した中空円柱の圧密解析と異方性中空円柱による近似

CONSOLIDATION ANALYSIS OF THE HOLLOW CYLINDER IN CONSIDERATION
OF THE RIGIDITY OF SAND COLUMNS AND APPROXIMATION
BY ANISOTROPIC HOLLOW CYLINDER

熊本直樹*・吉国 洋**

By Naoki KUMAMOTO and Hiroshi YOSHIKUNI

In an improved ground using a sand drain system, the difference in the rigidity between clay and sand causes the stress concentration on the sand columns in consequence of the progress of consolidation, thereby expanding the diameters of sand columns. In this paper, a consolidation theory is developed considering the rigidity of sand columns, on the assumptions that clay skeleton is anisotropic linear elastic, and sand columns are isotropic elastic body. And, the effects of the rigidity of sand columns and the anisotropy of clay acting upon the consolidation behavior are considered.

Besides, considerations are also given to the conditions of deformation in which the consolidation of the ground installed the sand columns is approximated by the use of the consolidation theory for the anisotropic hollow cylinder. The results thereof have arrived at the conclusion that the consolidation can be approximated by the use of the anisotropic hollow cylinder with the loading on the top surface, by restraining the displacement of the internal and external circumferential surfaces.

Keywords: consolidation, sand drains, sand columns, stress concentration, settlement

1. ま え が き

サンドドレーンのように砂柱が比較的小径でその剛性もあまり大きくないバーチカルドレーンの設計では、通常は、砂柱の剛性は無視されている。一方、サンドコンパクションパイル工法のように、大口径のよく締め固められた砂柱を粘性土地盤中に造成した場合は、砂柱の剛性は無視し得るものではなく、砂柱の存在を無視した圧密理論とは、沈下量、圧密挙動ともに様相を異にする。このような剛性をもったドレーンの圧密のメカニズムについては、著者の一人(吉国)がすでに解明している¹⁾。この吉国の理論は、粘土・砂柱ともに等方線形弾性体として仮定されているが、砂柱が圧密挙動に与える影響を知ることができる。しかし鉛直ひずみ、砂柱あるいは粘土に作用する荷重などの6個の未知数が6元連立一次方程式で与えられたままになっており、各未知数を単独に陽な形で求めることができず、実用に際してはやや難点があった。

一方、通常は剛性を無視しているサンドドレーンにお

いても、実際は砂柱と粘土地盤の剛性は異なるし、沈下に伴って砂柱径は拡大していくはずである。この問題に対して田村は、仮に粘土自体は異方性が強くなくても、砂柱の垂直剛性などを加味すると異方性の強い中空円柱となり、しかも現実に圧密過程中に砂柱径が拡大するところから、内径が拡大することを考慮した異方性中空円柱の圧密理論でサンドドレーン打設地盤の圧密挙動を表わすことができるとしている²⁾。この田村の理論では、地盤の水平方向剛性に対して鉛直方向剛性を増していくと、中空円柱の n (=外径/内径) を小さくしたときに n が大きいときよりも圧密が遅くなることがあるという、通常的设计理論とは逆の結論が得られ、一般の技術者に衝撃を与えた。

これに対して著者らは種々の境界条件をもつ異方性中空円柱の圧密を検討し、次のような見解を述べた³⁾。

① 田村が検討した異方性中空円柱の圧密は、中空円柱の外周面の変位を拘束し、上端面および内周面に圧密荷重を作用させる形式のものである。

② そのために、鉛直方向剛性を増していくと鉛直方向変位が減少し、中空円柱の内径を押し広げる形式の圧密に近づいていく。

③ 中空円柱の内径を押し広げる形式の圧密では、負の Mandel-Cryer 効果が発生するために、 n (=外径/

* 正会員 工博 三菱重工業(株)広島研究所
(〒730 広島市中区江波沖町 5-1)

** 正会員 工博 広島大学教授 工学部第四類
(〒724 東広島市西条町大字下見)

内径)を小さくすると n が大きいときよりも圧密が遅くなる⁴⁾。したがって、田村が取り扱ったような変形条件の圧密では、確かに n (=外径/内径)を小さくすると、鉛直方向剛性と水平方向剛性の関係次第では、 n が大きいときよりも圧密が遅くなることがあり得る。

④ しかし、実際のサンドドレーンでは、内径に作用する荷重は平均圧密度、つまり地表面沈下量の関数であり、鉛直方向剛性を相対的に増して沈下量が減少したときに、内径のみが拡大するような形式の圧密になるとは考えられない。

⑤ したがって、実際のサンドドレーンは、確かに沈下に伴って砂柱径は拡大するが、田村が考えたような内周面に定荷重が作用する形式ではなく、中空円柱の内周面および外周面の変位を拘束し、上端面に荷重を作用させる形式の圧密に近いと考えられる。

⑥ 中空円柱の内周面および外周面の変位を拘束して上端面にのみ荷重を作用させる形式の圧密では、砂柱の鉛直剛性を加味した異方性中空円柱でも、 n (=外径/内径)を小さくすれば必ず圧密速度も速く、 n と圧密速度の関係が逆転することはない。

以上に示す著者らの主張のうち、①～③および⑥に示すものは理論的に説明しているが、④および⑤の主張は定性的な考察のみで、定量的な裏付けはなされていない。

そこで、この論文は以下に示す事柄を明らかにすることを目的とする。第1の目的は、著者の一人が検討した砂柱の存在を考慮する中空円柱の圧密理論では、6個の未知数が連立方程式で陰な形で与えられていたものを、陽な形で与え、各未知数を単独に求め得るようにすることである。この作業を行う際には、吉国の理論を発展させ、粘土の異方性も考慮する。このようにしておくこと、粘土が等方性の場合についても、その1つの特殊なケースとして容易に対応できる。第2の目的は、以上に示したような著者らの定性的な主張が正しいかどうかの検討である。すなわち、砂柱の存在を考慮した中空円柱の圧密理論では、圧密の進行に伴って砂柱径が拡大するが、このときの圧密挙動がいかなる変形条件の異方性中空円柱の圧密挙動に近いかを検討する。

2. 砂柱の存在を考慮した中空円柱の圧密解析

以下に示す条件のもとに、砂柱の剛性を考慮した中空円柱の圧密を検討する。

- ① 砂柱、中空円柱(つまり粘土部分)ともに、等ひずみ条件とする。
- ② 中空円柱の外周面の変位は0とする。
- ③ 中空円柱の全周面は滑らかである。
- ④ 砂柱および中空円柱の上端面に作用する荷重の総

和は、時間的に変化しない。

⑤ 砂柱の透水性は、無限大である。

⑥ 中空円柱の上下端面および外周面は非排水面である、内周面のみが排水面である。

⑦ 砂柱は、等方線形弾性体とする。

⑧ 粘土部分、すなわち中空円柱は異方性線形弾性体とし、その応力ひずみ関係式は $c_1 \sim c_5$ の独立な弾性定数を用いて、式(1)で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= c_1 \varepsilon_x + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_y + c_2 \varepsilon_z \\ \sigma'_y &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_x + c_1 \varepsilon_y + c_2 \varepsilon_z \\ \sigma'_z &= c_2 \varepsilon_x + c_2 \varepsilon_y + c_3 \varepsilon_z \\ \tau_{yz} &= c_4 \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= c_4 \gamma_{zx} \\ \tau_{xy} &= c_5 \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ は有効垂直応力、 $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ はせん断応力、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ はひずみである。なお、等方性の場合には

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= c_3 = \lambda + 2\mu = 1/m_v \\ c_2 &= \lambda, c_4 = c_5 = \mu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

である。ここで、 λ, μ は Lamé の定数、 m_v は一次元圧密という体積圧縮係数である。

さて、以上のような仮定を置くと、この中空円柱は非回転、つまり変位ベクトルを u とするとき

$$\omega = \text{rot } u = 0 \dots\dots\dots (3)$$

の圧密になる¹⁾。このような非回転変形を伴う中空円柱の圧密は、文献3)で求めたように、式(4)で表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_1 k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{d\varphi}{dt} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 u, t, k, γ_w, r はそれぞれ、間隙水圧、時間、透水係数、間隙水の単位体積重量、中空円柱の半径方向座標である。また、 φ は、

$$\varphi = c_1 e_v + u \dots\dots\dots (5)$$

で定義され、非回転変形の場合は

$$\text{grad } \varphi = \text{grad}(c_1 e_v + u) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

つまり、 φ は位置的に定数である。ここで、 e_v は体積ひずみである。上記①～⑧の条件に基づく圧密応力 φ を具体的に求めて式(4)に代入すると、この問題の具体的な圧密方程式が得られる。

砂柱に応力が集中するときの様子が Fig.1 のようであるとすると、境界値に関する以下の関係式を得る。

(砂柱と中空円柱(粘土)の荷重の分担)

$$p = \frac{1}{n^2} p_s + \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \bar{p}_z \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 p, p_s, \bar{p}_z は、それぞれ、上端面に作用する全体の平均荷重、砂柱に作用する荷重、中空円柱すなわち粘土部分の上端面に作用する平均荷重である。

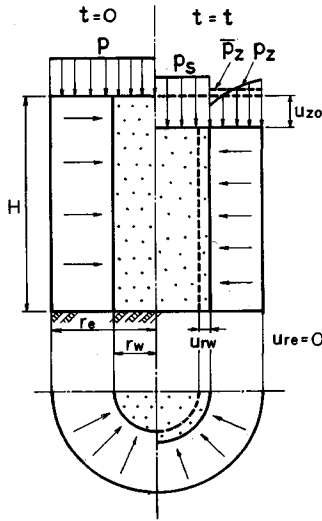


Fig.1 Schematic sketch of consolidation of sand drain.

〈砂柱内の応力〉

$$\sigma_z = p_s(t) = (\lambda_s + 2\mu_s)\epsilon_z - 2\lambda_s \frac{u_{rw}}{r_w} \quad (8)$$

$$\sigma_r = \sigma_{rw}(t) = \lambda_s \epsilon_z - 2(\lambda_s + \mu_s) \frac{u_{rw}}{r_w} \quad (9)$$

ここで、 λ_s, μ_s は砂の Lamé の定数、 σ_{rw} は $r = r_w$ (中空円柱内周面) における σ_r 、 u_{rw} は中空円柱内周面の半径方向変位である。また、 σ_z, σ_r はそれぞれ鉛直および半径方向垂直応力で、 ϵ_z は鉛直方向ひずみである。この ϵ_z は、上端面の鉛直方向変位を u_{zo} 、中空円柱および砂柱の高さを H とするとき、次のようになる。

$$\epsilon_z = \frac{u_{zo}}{H} = \bar{\epsilon}_z \quad (10)$$

〈中空円柱の境界値と圧密応力 ϕ の関係式〉

中空円柱の外周面の変位 u_{re} を 0 としているので、文献3) の式 (20)~式 (22) より

$$\phi = c_1(\epsilon_z + \frac{2}{n^2-1} \frac{u_{rw}}{r_w}) + \bar{u} \quad (11)$$

$$\phi = \sigma_{rw} + (c_1 - c_2)\epsilon_z - 2c_5 \frac{u_{rw}}{r_w} \quad (12)$$

$$\phi = \bar{p}_z + (c_1 - c_3)\epsilon_z + (c_1 - c_2) \frac{2}{n^2-1} \frac{u_{rw}}{r_w} \quad (13)$$

となる。ここで、 c_1, c_2, c_3, c_5 は式 (1) に示す中空円柱 (粘土) の弾性定数である。

以上のように、式 (7)~式 (9) および式 (11)~式 (13) の 6 個の条件式を得る。したがって、この 6 個の条件式を連立して解くことによって、 $\phi, \epsilon_z, p_s, \bar{p}_z, \sigma_{rw}, u_{rw}$ の 6 個の未知数を平均荷重 p および平均間隙水圧 \bar{u} で表わすことができる。すなわち、

$$\phi = \beta_1 p - \alpha_1 \bar{u} \quad (14)$$

$$c_1 \epsilon_z = \beta_2 p - \alpha_2 \bar{u} \quad (15)$$

$$p_s = \beta_3 p - \alpha_3 \bar{u} \quad (16)$$

$$\bar{p}_z = \beta_4 p - \alpha_4 \bar{u} \quad (17)$$

$$\sigma_{rw} = \beta_5 p - \alpha_5 \bar{u} \quad (18)$$

$$c_1 \frac{u_{rw}}{r_w} = \beta_6 p - \alpha_6 \bar{u} \quad (19)$$

と表わすことができる。平均荷重 p は与境界値であるので、平均間隙水圧 \bar{u} が判明すれば、式 (14)~式 (19) の各未知数が定まる。 β_i および α_i の具体的な形は APPENDIX I に示されている。

さて、平均荷重 p は時間的に変化しないと仮定しており、また圧密応力 ϕ が式 (14) で表わされるので、式 (14) を式 (4) に代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \alpha_1 \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (20)$$

ここに

$$c_v = c_1 k / \gamma_w \quad (21)$$

という圧密方程式を得る。式 (A. I. 1) で示される α_1 を

$$\alpha = \alpha_1 \quad (22)$$

と置くと、式 (20) に示す圧密方程式は、文献4) に示す等方性中空円柱および文献3) に示す異方性中空円柱の圧密方程式と全く同じ形になる。また、この問題の初期および境界条件は

$$u(r, 0) = p \quad (23)$$

$$u(r_w, t) = 0 \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0 \quad (25)$$

であり、これも文献3) や文献4) と同じである。したがって、文献3) や文献4) に示した解をここでもそのまま用いることができる。参考のため、平均間隙水圧の解を APPENDIX II に示した。式 (A. II. 1) で平均間隙水圧 \bar{u} が与えられるので、式 (14)~式 (19) から圧密応力 ϕ 、鉛直ひずみ ϵ_z などの時間的変化や、圧密の進行に伴って砂柱径が拡大していく様子などを知ることができる。

3. 計算例

まず最初に、粘土が等方性のときの係数 α_1, α_2 および β_1, β_2 の計算例を、Fig. 2 に示す。粘土が等方性のときの $\alpha_1 \sim \alpha_6, \beta_1 \sim \beta_6$ の例は、文献5) にも示されている。Fig. 2 は、 $n (= r_e / r_w)$ をパラメーターにして、 $\nu_c = \nu_s = 0.3$ のときの E_s / E_c と $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ の関係を示したものである。ここで、 ν_c, ν_s はそれぞれ、粘土および砂のポアソン比で、 E_c, E_s はそれぞれ、粘土および砂のヤング率である。Fig. 2 の α_1 をみると、 $E_s = E_c$ のときは $\alpha_1 = 0$ であるが、砂のヤング率を相対的に増していくに従って、 α_1 は負の方向へ増加していく。また、こ

の傾向は $n (= r_e / r_w)$ が小さくなるほど顕著になる。 α ($= \alpha_1$) をパラメーターにして、 $n=10$ のときの平均間隙水圧の無次元値 $\bar{U} (= \bar{u} / p)$ と時間係数 T の関係の例を示すと Fig. 3 のようであり、 α_1 が小さくなるということは、圧密が速くなるということである。このとき β_2 は 1 から 0 の方へ減少していく。粘土が等方時には

$$c_1 = \lambda + 2\mu = 1 / m_v \dots \dots \dots (26)$$

であるので、式 (10) および式 (15) からわかるように、最終沈下量 S_f は、

$$S_f = \varepsilon_{zf} H = m_v \beta_2 p H \dots \dots \dots (27)$$

である。ここで、 ε_{zf} は最終鉛直ひずみである。したがって、砂のヤング率を増して圧密が速くなることは、沈下量が減少するということでもある。要は砂柱の剛性を増すと沈下が軽減されて、その分だけ圧密が速くなるということである。

圧密の最終状態を考えると、式 (5) および式 (14) から

$$\varphi_f = c_1 e_{vf} = \beta_1 p \dots \dots \dots (28)$$

を得る。すなわち、 β_1 は圧密応力の最終値 φ_f および体積ひずみの最終値 e_{vf} を与える係数である。また、 α_2 は、式 (15) に示すように、平均間隙水圧の減少に伴って増加する任意時刻の鉛直ひずみ ε_z を与える係数である。任意時刻の鉛直ひずみ ε_z が与えられれば、式 (10) から任意時刻の上端面の鉛直変位 u_{z0} (地表面沈下量 S) が求まる。

$t=0$ の状態を考えると、体積ひずみ e_{v0} は 0 であり、初期間隙水圧 u_0 と初期平均間隙水圧 \bar{u}_0 は等しいので、式 (5) および式 (14) から u_0 は

$$u_0 = \frac{\beta_1 p}{1 + \alpha_1} \dots \dots \dots (29)$$

と与えられる。また、初期鉛直ひずみ ε_{z0} は式 (29) を式 (15) に代入して得られるので、これを式 (10) に代入すると地表面の瞬時沈下量 S_0 が

$$S_0 = \left[\beta_2 + \frac{\alpha_2 \beta_1}{1 + \alpha_1} \right] \frac{p}{c_1} H \dots \dots \dots (30)$$

と与えられる。

さて、この論文の主要な論点である中空円柱の内周面に作用する応力 σ_{rw} について考えると、 $t=0$ では $u_0 = \bar{u}_0$ であるので式 (18) からわかるように

$$\sigma_{rw0} = \beta_5 p - \alpha_5 u_0 \dots \dots \dots (31)$$

であり、 $t \rightarrow \infty$ では $\bar{u}_0 = 0$ であるので

$$\sigma_{rwf} = \beta_5 p \dots \dots \dots (32)$$

である。すなわち、内周面の応力 σ_{rw} は圧密過程に変化し、圧密前後の変化量は $|\alpha_5 u_0|$ である。具体例で示すと、 $E_s / E_c = 20$ 、 $\nu_s = \nu_c = 0.3$ 、 $n = 5$ のとき、式 (A. I. 9) および式 (A. I. 10) から $\alpha_5 = -0.60$ 、 $\beta_5 = 0.39$ であるので

$$\sigma_{rw0} = 0.39 p + 0.60 u_0$$

$$\sigma_{rwf} = 0.39 p$$

であり、 σ_{rw} の変化量は $0.60 u_0$ とかなり大きい。つまり、中空円柱の内周面に作用する荷重は圧密の進行に従って大きく変化するので、これを定荷重の境界値とみなすことはできない。

次に、粘土が異方性で砂柱に応力が集中する場合について考える。議論を簡単にするために、

$$c_1 = \lambda + 2\mu, \quad c_2 = \lambda, \quad c_3 = \mu$$

で、鉛直方向剛性 c_3 が水平方向剛性 c_1 の β 倍、すなわち、

$$c_3 = \beta c_1 \dots \dots \dots (33)$$

について考える。なおポアソン比は、

$$\nu_s = \nu_c = 0.3 \dots \dots \dots (34)$$

とする。

$n (= r_e / r_w)$ をパラメーターにして、 $\beta = 2$ 、すなわち鉛直方向剛性 c_3 が水平方向剛性 c_1 の 2 倍のときの係数 α_1 、 α_2 、 β_1 、 β_2 を示すと、 Fig. 4 のようになる。

Fig. 4 の横軸は、砂柱の剛性 $(\lambda_s + 2\mu_s)$ と粘土の水平方向剛性 c_1 の比である。また、 $(\lambda_s + 2\mu_s) / c_1$ が 10 および 20 のときの、粘土の鉛直方向剛性と水平方向剛性の比 $(\beta = c_3 / c_1)$ と係数 α_1 の関係を Fig. 5 に示す。

まず、 Fig. 2 と Fig. 4 を比較すると、粘土の鉛直方向剛性が増すと、これらの係数が全体的に小さな値（あるいは負の方向）へ移動していることがわかる。これは、粘土の異方性の影響である。たとえば、これまでの議論からわかるように、粘土の鉛直方向剛性を水平方向剛性より大きくしたときに、 α_1 が負の方向へ移動することは圧密が速くなるということであり、 β_2 が小さくなるということは最終沈下量が減少するということである。これは粘土の異方性の影響として、ただちに理解できる。また、 Fig. 4 をみると、 $n=10$ の場合は $(\lambda_s + 2\mu_s) / c_1$ による係数の変化が小さい。これは、 n が大きくなると、砂柱の影響が小さくなるためである。一方、 Fig. 5 をみると、 $n=10$ の場合は c_3 / c_1 、すなわち、粘土の異方性による係数 α_1 の変化が大きく、逆に $n=2$ の場合は c_3 / c_1 による係数 α_1 の変化が小さい。これは、 n が大きくなると、すなわち中空円柱の外径に対して砂柱径が相対的に小さい場合は圧密挙動に粘土の異方性の影響が強く現われるということである。逆に相対的に砂柱径が大きくなると、圧密挙動に与える粘土の異方性の影響は小さい。

さて、 Fig. 2、 Fig. 4 から、粘土骨格の異方性を問わずに、近似的に次の関係があることがわかる。

$$\beta_1 \approx 1 + \alpha_1 \dots \dots \dots (35)$$

$$\beta_2 \approx \alpha_2 \dots \dots \dots (36)$$

式 (35) を式 (29) に代入すると

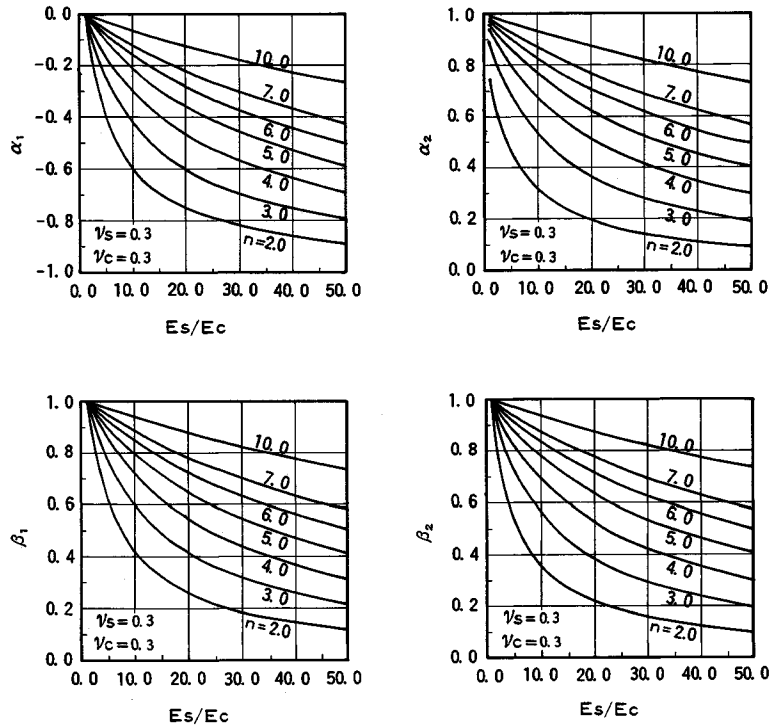


Fig.2 Example of the coefficients α_1 , α_2 , β_1 and β_2 in case of isotropic clay.

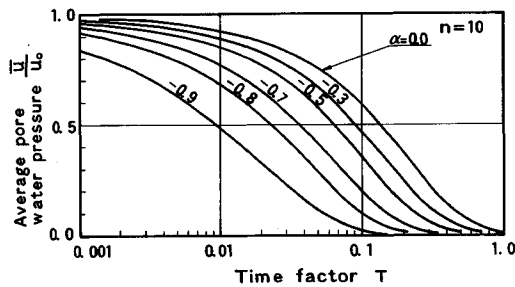


Fig.3 Example of the relations between average pore water pressure $\bar{U} (= \bar{u}/p)$ and time factor $T (= c_v t/d_s^2)$.

$$u_0 \doteq p \dots\dots\dots (37)$$

となり、初期間隙水圧 u_0 は中空円柱の上端面に作用する平均荷重 p にほぼ等しい。また、式(35)および式(36)を式(30)に代入すると、

$$S_0 \doteq 0 \dots\dots\dots (38)$$

となり、瞬時沈下はほとんど生じないことがわかる。

4. 砂柱を考慮しない異方性中空円柱による近似

次に、本論文の第2の目的である、サンドドレーン打設地盤の圧密を異方性中空円柱で近似するときの、境界条件について検討する。すなわち、砂柱の剛性を考慮した中空円柱の圧密では、圧密の進行に伴って砂柱径が拡

大するが、このときの圧密挙動がいかなる変形条件の異方性中空円柱の圧密挙動に近いかを検討する。

著者らが、文献3)で行った議論を簡単に振り返ってみよう。著者らは、Fig.6に示す7種類の変形条件の異方性中空円柱を検討している。一方、田村は文献2)において、Fig.6に示す7種類の変形条件のうち、case 3すなわち、中空円柱の外周面の変位を拘束して、上端面および内周面に荷重を作用させる形式の圧密が実際に近いと述べている。これに対して著者らは、厳密に言えばFig.6の7種類の変形条件は現実のサンドドレーンとは完全に一致しないが、どちらかといえばcase 3よりも、case 4、すなわち中空円柱の内外周面の変位を拘束して、上端面のみに荷重を作用させる形式の圧密が現実に近いと述べている。そのとき行った主張は、まえがきの④および⑤に示すとおりであるが、それに以下の理由も付け加えたい。つまり、田村が文献2)で行った議論は鉛直方向剛性と水平方向剛性の比を一定にして $n (= r_e/r_w)$ を変えたときの結論である。しかし、砂柱および粘土の剛性を一定にして n を変えると、砂柱の剛性も加味した異方性中空円柱の鉛直方向剛性が変化して、田村が考察したような単純な条件下にない。

そこで以下では、砂柱と粘土地盤の相互作用を考慮した圧密挙動と、異方性中空円柱の case 3 および case 4 のいずれの圧密挙動に近いかを検討する。

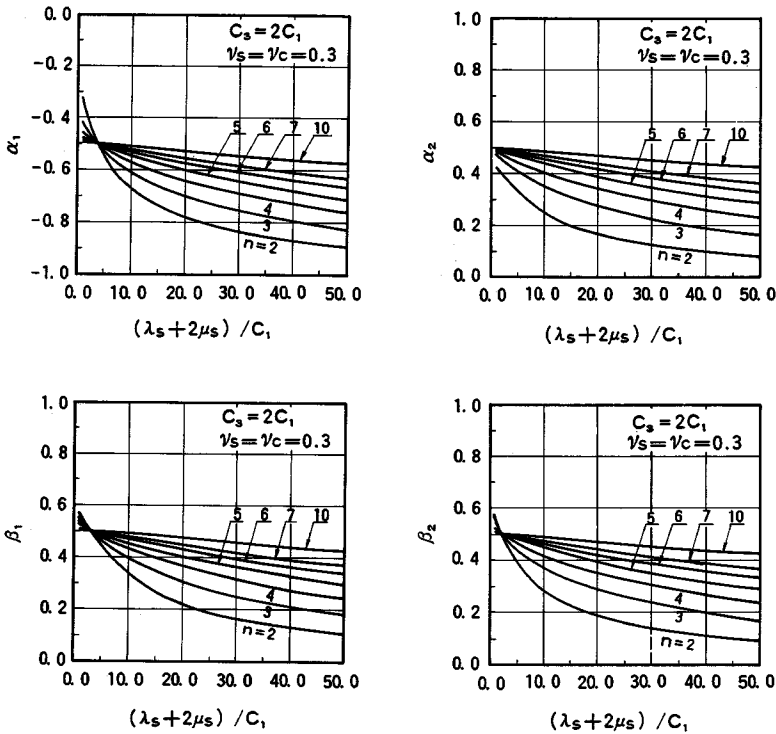


Fig. 4 The coefficients α_1 , α_2 , β_1 and β_2 in case of anisotropic clay ($c_s = 2c_1$).

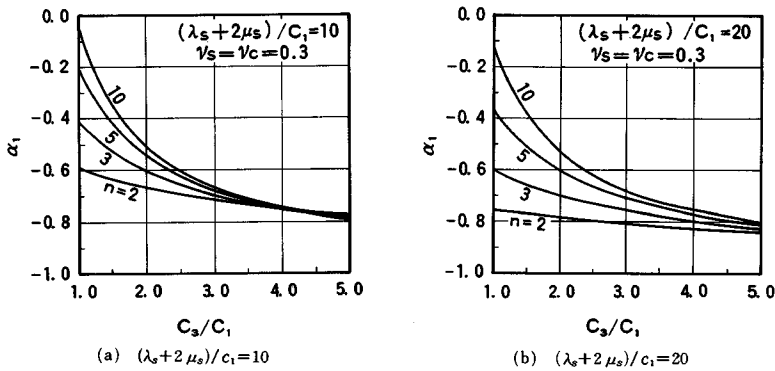


Fig. 5 Relations between c_s/c_1 and the coefficients α_1 .

どちらの理論も複雑であるので、問題を単純化して比較する。まず、粘土は、等方線形弾性体とする。次に、ドレーンへの応力集中を考えたときの条件として、砂柱と粘土のヤング率の比 E_s/E_c が

$$E_s/E_c = 5, 10, 15, 20, 30$$

の 5 ケース、そして、砂柱と粘土のポアソン比 ν_s, ν_c が

$$\nu_s = \nu_c = 0.3$$

である場合を考える。現実の E_s/E_c は、10~20 程度のもが多いと考えられる。このときの係数 $\alpha (= \alpha_1)$ は、式 (A. I. 2) で与えられる。つまり

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{F_2}{F_1} \dots \dots \dots (39)$$

である。ここで、 F_1, F_2 は式 (A. I. 23), 式 (A. I. 24) で与えられ、砂および粘土の変形係数の関数である。また、式 (27) からわかるように、係数 β_2 は沈下低減率を意味し、式 (A. I. 3) で与えられている。すなわち、

$$\beta_2 = \frac{\Gamma_5}{\Gamma_4} \beta_1 \dots \dots \dots (40)$$

であり、 β_1 は式 (A. I. 1) で、 Γ_4 および Γ_5 は式 (A. I. 21) および式 (A. I. 22) で与えられる。

一方、砂柱を考慮しない異方性中空円柱については、

次のように単純化しよう。すなわち、弾性定数を

$$c_1 = \lambda + 2\mu, c_2 = \lambda, c_3 = \mu \dots (41)$$

とし、鉛直方向剛性 c_3 が水平方向剛性 c_1 の β 倍

$$c_3 = \beta c_1 \dots (42)$$

とする。また、ポアソン比 ν については、ドレーンの剛性を考慮したときの計算と同様に

$$\nu = \nu_c = 0.3$$

とする。

さて、ドレーンの剛性を考慮したときの沈下低減率は式 (40) で与えられるが、これは地盤全体の鉛直方向剛性をマクロ的に評価して異方性粘土と考えると、鉛直方向剛性 c_3 が

$$c_3 = (\lambda + 2\mu) / \beta_2 \dots (43)$$

になったものと解釈できる。ここで、 λ, μ は粘土の Lamé の定数である (前述のようにここでは粘土は等方線形弾性体としている)。いわゆる等ひずみ条件を仮定する限り、粘土自体は等方性であっても、砂柱等の影響による鉛直剛性とマクロ的にみた地盤全体の鉛直剛性は区別せず、式 (43) で与えられることは容易に理解できよう。砂柱の剛性を考慮した地盤を異方性中空円柱で近似する場合は、中空円柱部分は粘土のみであり、その鉛直剛性 c_3 は上述の理由から、式 (43) で与えられるものとする。一方、この異方性中空円柱の横方向剛性 c_1 は、本来の粘土の横方向剛性をとるべきであるので、

$$c_1 = \lambda + 2\mu \dots (44)$$

となる。したがって、式 (42) に示す鉛直方向剛性 c_3 と水平方向剛性 c_1 の比 β は、式 (43) および式 (44) から

$$\beta = 1 / \beta_2 \dots (45)$$

と与えられる。この β_2 には、式 (40) を用いる。

式 (41)、式 (42) および式 (45) で、異方性中空円柱の変形係数が与えられる。このときの異方性中空円柱の圧密の係数 α は、文献 3) より

(Fig. 6 の case 3 のとき)

$$\alpha = \frac{2(1-2\nu)^2 - (\beta-1)(n^2-1)(1-\nu)(1-2\nu)}{\beta n^2(1-\nu)(1-2\nu) + \beta(1-\nu) - 2\nu^2} \dots (46)$$

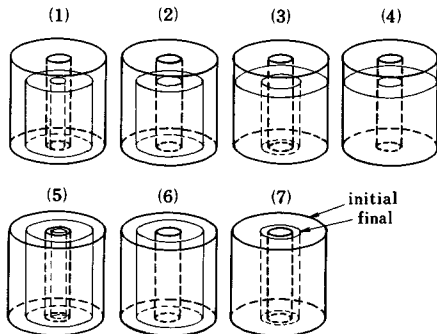


Fig. 6 Seven kinds of deformation condition.

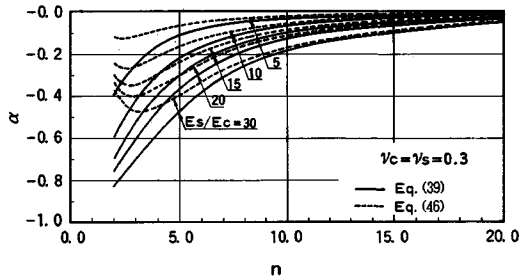


Fig. 7 Comparison between the coefficient α in Eq. (39) and Eq. (46).

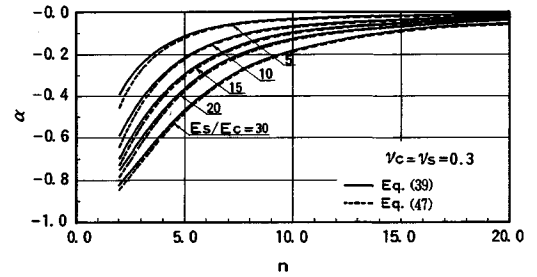


Fig. 8 Comparison between the coefficient α in Eq. (39) and Eq. (47).

(Fig. 6 の case 4 のとき)

$$\alpha = -\frac{\beta-1}{\beta} \dots (47)$$

となる。式 (46) および式 (47) の、 n, ν, β はそれぞれ、中空円柱の外径と内径の比、粘土のポアソン比および異方性中空円柱の鉛直方向剛性と水平方向剛性の比である。

以上の準備をしたうえで、砂柱の剛性を考慮したときの係数 α (式 (39)) と、マクロ的に異方性地盤と考えたときの係数 α (式 (46) および式 (47)) を比較する。そして異方性中空円柱の case 3 と case 4 の変形条件の圧密のいずれが砂柱を考慮したときの圧密に近いかを検討する。圧密方程式からわかるように、係数 α が似ていれば、圧密挙動も類似している。

計算結果を、Fig. 7 と Fig. 8 に示す。Fig. 7 は砂柱を考慮したときの係数 α と異方性中空円柱の case 3 の係数 α を、Fig. 8 は case 4 の係数 α を比較したものである。Fig. 7 および Fig. 8 から、case 3 の圧密よりも case 4 の圧密の係数 α の方が、砂柱の存在を考慮したときの係数 α に近いことがわかる。すなわち、外周面および内周面の変位を拘束して上端面に荷重を作用させる形式の異方性中空円柱の圧密が、砂柱の剛性を考慮し圧密の進行に伴って砂柱径が拡大する形式の圧密に近い。言い換えれば、この論文の前半で考えた砂柱の剛性を考慮した圧密理論を、式 (41)、(42)、(45) および式 (47) に示すような内外周面の変位を拘束して上端面に荷重を

作用させる形式の異方性中空円柱の圧密で近似できる。

以上から、この論文のまえがきの④および⑤に示した定性的な推測の定量的な裏付けが得られた。

5. 圧密過程の概略的推定方法

砂柱の剛性を考慮した圧密理論および異方性中空円柱の圧密理論ともに、式 (20) の解を用いる。したがって、 n と $\alpha(=\alpha_1)$ をパラメーターにした解を得ておれば、いずれの考え方にも対応できる。ところが、式 (20) の解を求めようと思えば Bessel 関数を用いて式 (A. II. 2) から固有値 λ_n を求めて、式 (A. II. 1) を計算する必要があり、実務で手軽に計算できるというものではない。適切な近似式があると便利であるが、まだそれを作成するには至っていない。そこで、近似式とはいえないが、概略の傾向を知ることができる手法を以下に示しておく。

たとえば、線形弾性問題を考えると、圧密応力 φ は、 $\varphi=(\lambda+2\mu)e_v+u$(48)

であり、式 (3) に示すような非回転変形を伴うときの圧密応力は

$$\varphi=(1+\alpha)p-\alpha\bar{u}.....(49)$$

である⁶⁾。したがって、このときの最終体積ひずみ e_{or} は、

$$e_{or}=(1+\alpha)p/(\lambda+2\mu).....(50)$$

すなわち、 $\alpha \neq 0$ の場合は $\alpha=0$ の圧密の $(1+\alpha)$ 倍の最終体積ひずみが発生する。一方、 $\alpha=0$ の中空円柱の

圧密の Barron の近似解は

$$\bar{U}=\exp\left(-\frac{8T}{F(n)}\right).....(51)$$

ここに

$$F(n)=\frac{n^2}{n^2-1}\ln(n)-\frac{3n^2-1}{4n^2}.....(52)$$

である。ここで \bar{U} は平均間隙水圧 \bar{u} の無次元値 ($=\bar{u}/p$) で、 T は式 (A. II. 7) で定義する時間係数である。式 (50) に示すように $(1+\alpha)$ 倍のひずみを発生させるためには時間も $(1+\alpha)$ 倍かかると単純に考えて (実際はこのように単純ではない)、式 (51) を

$$\bar{U}=\exp\left(-\frac{8T}{(1+\alpha)F(n)}\right).....(53)$$

と書き改めてみる。式 (53) と厳密解を比較すると、Fig. 9 および Fig. 10 のようになる。これらの図をみると、式 (53) は近似式とはいえないが、ある範囲については、式 (53) で概略値を推定できそうである。たとえば、 $n=5$ の場合は、 $\alpha > -0.5$ の圧密の後半部、 $n=10$ の場合は $\alpha > -0.7$ の圧密の後半部については、式 (53) で平均間隙水圧～時間関係の概略を知ることができる。

6. 結 論

この論文では、ドレーン (砂柱) の剛性を考慮した圧密を検討するとともに、砂柱によってマクロ的に異方性になった地盤の圧密を異方性中空円柱で近似するときの境界条件についても検討した。その主要な結論は、次のとおりである。

(1) 粘土を異方性線形弾性体と仮定して、砂柱の剛性を考慮したときの 6 個の未知数 (鉛直ひずみ ϵ_z や砂柱の外周面の変位 u_{rw} など) を、荷重 p および平均間隙水圧 \bar{u} の関数として具体的に与えた。

(2) 平均間隙水圧 \bar{u} は文献 3) や文献 4) 記載の中空円柱の解で与えられるので、サンドドレーン周辺の圧密挙動を砂柱の剛性を考慮して検討できる。

(3) サンドドレーンの圧密は、 n (=中空円柱の外径/内径) が大きいときは、粘土の異方性の影響が大きく、砂柱の影響は小さい。逆に、 n が小さい場合は、粘土の異方性よりも砂柱の影響が大きい。

(4) 砂柱の剛性を考慮した地盤をマクロ的に異方性粘土地盤と考えると、その圧密を異方性中空円柱で近似するときの境界条件について検討した。その結果、中空円柱の内外周面の変位を拘束し、上端面のみに荷重を作用させる形式の異方性中空円柱で近似できることが判明した。

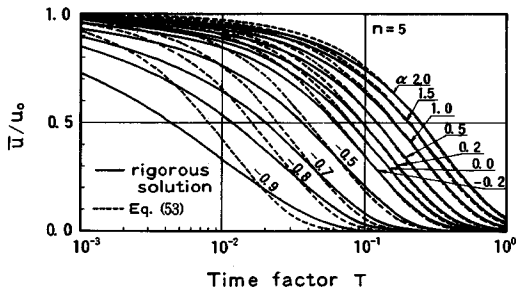


Fig. 9 Comparison between rigorous solutions and the Eq. (53) in case of $n=5$.

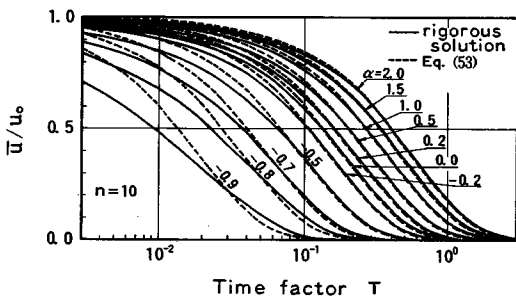


Fig. 10 Comparison between rigorous solutions and the Eq. (53) in case of $n=10$.

APPENDIX I ($\alpha_1 \sim \alpha_6, \beta_1 \sim \beta_6$)

式 (7), (8), (9), (11), (12), (13) から β_i, α_i を具体的に求めると、次のようになる。

$$\beta_1 = \frac{n^2 c_1 \Gamma_4}{F_1} \dots\dots\dots (A. I. 1)$$

$$\alpha_1 = \frac{F_2}{F_1} \dots\dots\dots (A. I. 2)$$

$$\beta_2 = \frac{\Gamma_5}{\Gamma_4} \beta_1 \dots\dots\dots (A. I. 3)$$

$$\alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1} \alpha_1 + \frac{(n^2-1)g_3}{\Gamma_4} \dots\dots\dots (A. I. 4)$$

$$\beta_3 = \frac{g_1}{c_1} \beta_2 - \frac{(n^2-1)\lambda_s g_4}{c_1 \Gamma_4} \beta_1 \dots\dots\dots (A. I. 5)$$

$$\alpha_3 = \frac{\beta_3}{\beta_1} \alpha_1 - \frac{(n^2-1)(\lambda_s g_2 - g_1 g_3)}{c_1 \Gamma_4} \dots\dots\dots (A. I. 6)$$

$$\beta_4 = \frac{n^2}{n^2-1} \frac{\beta_3}{n^2-1} \dots\dots\dots (A. I. 7)$$

$$\alpha_4 = -\frac{\beta_3}{n^2-1} \dots\dots\dots (A. I. 8)$$

$$\beta_5 = \frac{\lambda_s}{c_1} \beta_2 - \frac{(n^2-1)g_4 g_5}{c_1 \Gamma_4} \beta_1 \dots\dots\dots (A. I. 9)$$

$$\alpha_5 = \frac{\lambda_s}{c_1} \alpha_2 - \frac{(n^2-1)g_5}{c_1 \Gamma_4} (g_4 \alpha_1 + g_2) \dots\dots\dots (A. I. 10)$$

$$\beta_6 = \frac{(n^2-1)}{2 \Gamma_4} g_4 \beta_1 \dots\dots\dots (A. I. 11)$$

$$\alpha_6 = \frac{\beta_6}{\beta_1} \left(\alpha_1 + \frac{g_2}{g_4} \right) \dots\dots\dots (A. I. 12)$$

ここに

$$g_1 = \lambda_s + 2 \mu_s \dots\dots\dots (A. I. 13)$$

$$g_2 = \lambda_s + c_1 - c_2 \dots\dots\dots (A. I. 14)$$

$$g_3 = \lambda_s + \mu_s + c_3 \dots\dots\dots (A. I. 15)$$

$$g_4 = \lambda_s - c_2 \dots\dots\dots (A. I. 16)$$

$$g_5 = \lambda_s + \mu_s \dots\dots\dots (A. I. 17)$$

$$\Gamma_1 = g_1 - (n^2-1)(c_1 - c_3) \dots\dots\dots (A. I. 18)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 + (n^2-1)c_1 \dots\dots\dots (A. I. 19)$$

$$\Gamma_3 = \Gamma_1 + (n^2-1)g_2 \dots\dots\dots (A. I. 20)$$

$$\Gamma_4 = g_2 + (n^2-1)g_3 \dots\dots\dots (A. I. 21)$$

$$\Gamma_5 = c_1 + (n^2-1)g_3 \dots\dots\dots (A. I. 22)$$

$$F_1 = \Gamma_2 \Gamma_4 - g_4 \Gamma_3 \dots\dots\dots (A. I. 23)$$

$$F_2 = g_2 \Gamma_3 - \Gamma_1 \Gamma_4 \dots\dots\dots (A. I. 24)$$

また、 λ_s, μ_s は砂の Lamé の定数で、 c_1, c_2, c_3, c_4 は粘土の弾性定数である。粘土が等方性の場合、式 (2) により等方性粘土の Lamé の定数で表わされる。

APPENDIX II (式 (20) の平均間隙水圧解)

平均間隙水圧の解は次のとおりである。

$$\bar{U} = -\frac{2}{(1+\alpha)(n^2-1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{\lambda_i} D_i(\lambda_i) e^{-4\lambda_i^2 m^2 T} \quad (A. II. 1)$$

ここで、 λ_i は

$$D_0(\lambda_i) + \frac{2\alpha}{(1+\alpha)(n^2-1)\lambda_i} D_1(\lambda_i) = 0 \dots\dots\dots (A. II. 2)$$

の根である。なお、

$$D_0(\lambda) = J_0(\lambda) - \frac{J_1(\lambda n)}{Y_1(\lambda n)} Y_0(\lambda) \dots\dots\dots (A. II. 3)$$

$$D_1(\lambda) = J_1(\lambda) - \frac{J_1(\lambda n)}{Y_1(\lambda n)} Y_1(\lambda) \dots\dots\dots (A. II. 4)$$

$$\bar{U} = \frac{\bar{u}}{u_0} = \frac{\bar{u}}{p} \dots\dots\dots (A. II. 5)$$

$$n = \frac{r_e}{r_w} \left(= \frac{\text{中空円柱の外径}}{\text{中空円柱の内径}} \right) \dots\dots\dots (A. II. 6)$$

$$T = \frac{c_v t}{d_e^2} \quad (d_e = 2 r_e) \dots\dots\dots (A. II. 7)$$

$$C_i = \frac{-2 \lambda_i D_1(\lambda_i)}{\lambda_i^2 n^2 \{D_0(\lambda_i n)\}^2 - \left[\lambda_i^2 - 1 + \left\{ \frac{2\alpha + (1+\alpha)(n^2-1)}{(1+\alpha)(n^2-1)} \right\}^2 \right] |D_1(\lambda_i)|^2} \dots\dots\dots (A. II. 8)$$

である。また、 J, Y はそれぞれ、第 1 種および第 2 種の Bessel 関数で、添字 0, 1 はそれぞれ、0 次および 1 次を表わす。

参 考 文 献

- 1) 吉国 洋：多次元圧密理論と、その軸対称問題への適用、東京工業大学学位論文、1973。
- 2) 田村 武：異方性地盤におけるサンドドレーン周辺の圧密解析、土木学会論文報告集、第 338 号、pp.115~121、1983。
- 3) 熊本直樹・吉国 洋：異方性中空円柱の圧密、土木学会論文集、第 370 号/Ⅲ-5、pp.199~207、1986。
- 4) Yoshikuni, H. and Kumamoto, N. : Study on the Irrotational Consolidation, Mitsubishi Heavy Industries, Ltd. TECHNICAL REVIEW, Vol. 21, No. 2, SER. No. 20, pp. 87~95, 1984.
- 5) 吉国 洋：パーチカルドレーン工法の設計と施工管理、技報堂、1979。
- 6) 熊本直樹・吉国 洋：非回転圧密への圧密応力の適用、地盤と建設 (土質工学会中国支部論文報告集)、Vol. 3, No. 1, pp. 1~10, 1985。

(1987. 12. 14・受付)