

確率有限要素法における破壊確率計算法の提案

A NEW METHOD FOR CALCULATING FAILURE PROBABILITY WITH THE STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD

溜 幸生*・桜井春輔**

By Yukio TAMARI and Shunsuke SAKURAI

Recently a stochastic finite element method (SFEM), which can treat stress analyses with stochastic variability, has been drawing attention particularly in the field of geotechnical engineering. This is due to the fact that design parameters such as material constants, external loads, etc., must be regarded as random variables.

In an ordinary SFEM, the probability density functions are usually assumed to be a normal distribution. The distribution of uncertainty, however, does not always follow the normal distributions in geotechnical engineering problems. Therefore, difficulties may arise when applying SFEM to non-normal distribution problems.

In this paper, a new method is proposed in order to overcome the above-mentioned difficulty of calculating failure probability. In the proposed method, the failure criterion is linearized at the failure point, and failure probability can be calculated on the integration of the linearized failure criterion by using random numbers.

Some numerical examples are demonstrated to verify the proposed method.

Keywords: failure probability, stochastic finite element method, non-normal distribution, random numbers

1. ま え が き

最近、地盤にかかわる構造物の設計において、数値解析は欠かすことのできない重要な手法となりつつある。その中でも有限要素法は、材料の不均質性、不連続性、複雑な境界条件などを、比較的容易に解析に取り入れることができるため、種々の地盤構造物に対してよく用いられるようになった^{1)~3)}。

しかし、解析に際しては、地盤の材料定数を原位置において正しく評価し、唯一的に決定することが要求されるが、一般に、原位置試験などで求められる材料定数は、ばらついた値をとるため、解析に用いるインプットデータとしての材料定数を唯一的に、正しく求めることは非常に困難である。そこで、このような場合には、従来、原位置試験などで得られるばらついたデータに対して代表的な値、たとえば、平均値、上限値、下限値などを選定し、これらを用いてパラメータスタディを行ってきたが、最近では、地盤の材料定数のばらつきのような不

確定性を確率論によって定量的に評価しようとする信頼性解析や信頼性設計が提案されてきている^{4)~6)}。

有限要素法において、不確定性を有する材料定数を確率量ととらえて解析する方法として、確率有限要素法が提案されている^{7),8)}。地盤工学においても、この方法を用いて構造物の信頼性解析や信頼性設計の試みがなされている^{9)~11),13),14)}。

Cambou⁹⁾は、有限要素法に基づくモンテカルロ法によって信頼性解析を行うことは多大な計算機費用がかかることから、有限要素法に線形一次近似理論を適用し、解析的に変位と応力の平均値と分散を求める方法を示した(以下、これを確率有限要素法という)。さらに、桜井ら¹⁰⁾はCambouが提案した確率有限要素法に材料の破壊標準を与えることによって、各要素のせん断破壊および単一すべり面が存在するときの全体破壊のそれぞれに対して破壊確率を求める方法を提案し、これを斜面の信頼性解析に適用した。鈴木ら¹¹⁾は、桜井らの提案した方法にHasoferとLindの提案した安全性指標 $\beta^{(2)}$ を用いて破壊確率を計算する方法を示し、斜面の安定解析を行った。辰巳ら^{13),14)}は、土構造物についても、耐用年数を考慮した信頼性設計が必要であり、耐用年間での破壊確率と損失費用をかね合わせて、総費用を最小にする最

* 正会員 工修 東電設計(株)第二土木本部火力土木部
(元・神戸大学大学院修士課程学生)
(〒100 千代田区内幸町2-1-1)

** 正会員 Ph.D., 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科
(〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

適設計が望まれるとして、確率有限要素法を用いて護岸の信頼性設計を試みている。

確率有限要素法によると、材料定数や外力を確率変数とし、それらの平均値、分散、分布形をインプットデータとして与えることにより、変位および応力の平均値、分散が算出される。また、種々の破壊の状態を定義する破壊規準を与えることによって、それぞれの破壊形態に対する破壊確率を計算することも可能である。しかし、これまでの研究で提案されている確率有限要素法は、一般に、不確定要因に対して正規分布を仮定して破壊確率を求めるものである。それゆえに、実際の地盤構造物にかかわる不確定要因が正規分布に従うときは、破壊確率は正解値（モンテカルロ法で求めた解）と一致する。ところが、地盤構造物にかかわる不確定要因は必ずしも正規分布に従うものばかりでないことが指摘されており^{13),15)}正規分布でない分布形に対して、破壊確率を求めた場合、正解値とは一致しないことが確認されている¹⁴⁾。そこで、地盤構造物にかかわる不確定要因の分布形が複雑な分布形、たとえば対数正規分布やワイブル分布に従う場合であっても、正確にかつ容易に破壊確率を計算する確率有限要素法の開発が必要となる。

本論文においては、まず、有限要素法において、各要素の破壊規準関数（破壊の状態を定義する関数）を破壊点において線形化する方法を具体例を挙げて説明し、次に、線形化された破壊規準関数をもとに、複数の確率変数からなる結合確率密度関数から、乱数を発生させることによって破壊確率を計算する方法を提案する。そして、具体的な解析例を示し、モンテカルロ法による解と比較検討を行う。

なお、ここでは簡単のために、不確定要因は空間的にばらつかず（完全相関）、互いに独立であると仮定する。また、解析は二次元平面ひずみ状態でを行い、有限要素法においては一定ひずみ三角形要素を用いる。

2. 有限要素法における破壊規準関数の線形化

(1) 破壊規準関数の定義

破壊確率を計算するには、破壊規準関数の定義が必要である。確率有限要素法を用いる場合に、いくつかの破壊規準関数が提案されているが、ここでは、局部破壊¹⁰⁾について考える。

一般に、要素 i の破壊規準関数を、 Q_{si} とすると、 $Q_{si} < 0$ のとき、応力状態が破壊規準を超えるため、その要素は破壊する。ここで、 Q_{si} は、 m 個の不確定要因 $|r| = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ の関数であり、 $|r|$ は、ヤング係数、ポアソン比、単位体積重量、粘着力、内部摩擦角、荷重など、の関数である。すなわち

$$Q_{si} = Q_{si}(r_1, r_2, \dots, r_m) \dots \dots \dots (1)$$

と表わされる。

いま、 Q_{si} の具体例として、せん断に対する要素 i の局部破壊の安全性の余裕を考える。ここで、クーロンの破壊規準を用いると、要素 i の応力状態とクーロンの破壊規準の関係は、図—1 のように表わされる。なお、ここでは圧縮を正とする。要素 i において、モールの応力円の中心から破壊規準までの距離を τ_{fi} 、応力円の半径を τ_{maxi} とすれば、次式が定義できる。

$$Q_{si} = \tau_{fi} - \tau_{maxi} = c \cos \phi + \frac{1}{2}(\sigma_{1i} + \sigma_{2i}) \sin \phi - \frac{1}{2}(\sigma_{1i} - \sigma_{2i}) \dots \dots \dots (2)$$

ここで、要素 i の主応力 σ_{1i} 、 σ_{2i} は、ヤング係数、ポアソン比、単位体積重量、荷重の関数である。

式 (2) から明らかなように、 $Q_{si} < 0$ になれば、応力状態が破壊規準を超えるため、材料が破壊することになる。

(2) 破壊規準関数の線形化

式 (2) で表わされた破壊規準関数を、各要素の破壊点 $\{r_i^*\} = \{r_{1i}^*, r_{2i}^*, \dots, r_{mi}^*\}$ において線形化する。ここで破壊点とは、Hasofer と Lind が提案したもので、確率的に最も破壊しやすい確率変数の組で表わされる点であり

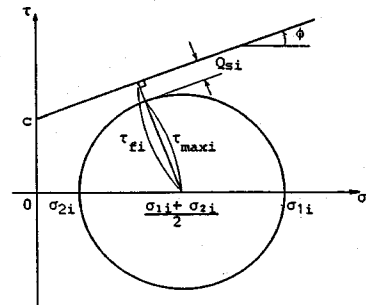
$$Q_{si}(r_{1i}^*, r_{2i}^*, \dots, r_{mi}^*) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

を満たすものである。破壊点は、一般に、収束計算によって求めることができる^{16),17)}。局部破壊の場合は各要素について収束計算を行う。

いま、 Q_{si} を不確定要因 $|r|$ の要素 i の破壊点 $\{r_i^*\}$ の近傍でテーラー展開し、二次以上の高次の項を無視すれば、式 (3) を考慮して次式を得る。

$$Q_{si} = Q_{si}(r_{1i}^*, r_{2i}^*, \dots, r_{mi}^*) + \sum_{k=1}^m (r_k - r_{ki}^*) \frac{\partial Q_{si}}{\partial r_k} \Big|_* = \sum_{k=1}^m (r_k - r_{ki}^*) \frac{\partial Q_{si}}{\partial r_k} \Big|_* \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $\frac{\partial Q_{si}}{\partial r_k} \Big|_*$ は、偏導関数 $\frac{\partial Q_{si}}{\partial r_k}$ の r_{1i}^* 、 r_{2i}^* 、 \dots 、 r_{mi}^* における値であり、 Q_{si} が式 (2) で定義される場合、次のように求められる。なお、 r_{m-1} 、 r_m はそ



図—1 破壊規準関数 Q_{si} (安全性の余裕)

それぞれ c, ϕ を表わすものとする。

$k=1, 2, \dots, m-2$ のとき

$$\frac{\partial Q_{si}}{\partial r_k} \Big|_* = \frac{1}{2} (\sin \phi_i^* - 1) \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial r_k} \Big|_* + \frac{1}{2} (\sin \phi_i^* + 1) \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial r_k} \Big|_* \dots \dots \dots (5)$$

$k=m-1$ のとき (r_{m-1} は c を意味する)

$$\frac{\partial Q_{si}}{\partial c} \Big|_* = \cos \phi_i^* \dots \dots \dots (6)$$

$k=m$ のとき (r_m は ϕ を意味する)

$$\frac{\partial Q_{si}}{\partial \phi} \Big|_* = -c_i^* \sin \phi_i^* + \frac{1}{2} (\sigma_{1i}^* + \sigma_{2i}^*) \cos \phi_i^* \dots \dots (7)$$

ここで, $\partial \sigma_{1i} / \partial r_k |_*$, $\partial \sigma_{2i} / \partial r_k |_*$ ($k=1, 2, \dots, m-2$) は

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial r_k} \Big|_* \\ \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial r_k} \Big|_* \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial r_k} \Big|_* + \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial r_k} \Big|_* \right) \pm \frac{\frac{1}{2} (\sigma_{xi}^* - \sigma_{yi}^*) \left(\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial r_k} \Big|_* - \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial r_k} \Big|_* \right) + 2 \tau_{xyi} \frac{\partial \tau_{xyi}}{\partial r_k} \Big|_*}{2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xi}^* - \sigma_{yi}^*}{2} \right)^2 + \tau_{xyi}^2}} \dots \dots \dots (8)$$

式 (5), (6), (7), (8) 中の, σ_{xi}^* , σ_{yi}^* , τ_{xyi}^* , σ_{1i}^* , σ_{2i}^* , $\partial \sigma_{xi} / \partial r_k |_*$, $\partial \sigma_{yi} / \partial r_k |_*$, $\partial \tau_{xyi} / \partial r_k |_*$, $\partial \sigma_{1i} / \partial r_k |_*$, $\partial \sigma_{2i} / \partial r_k |_*$ は, 要素 i の破壊点 $\{r_{1i}^*, r_{2i}^*, \dots, r_{(m-2)i}^*\}$ における応力と応力の偏導関数の値を示す。応力の偏導関数は, 通常の線形一次近似理論を適用した有限要素法でも示されているように, 剛性方程式を不確定要因 r_k で微分することによって求めることができる^{10), 11)}。

以上のようにして, 破壊規準関数 Q_{si} を, 破壊点において線形化することができる。

3. 破壊確率の計算法の提案

ここで提案する破壊確率の計算法は, 前章で求めた, 線形化された破壊規準関数 Q_{si} (以下 Q_{si} とする) を積分領域の境界とし, 乱数を用いて破壊確率を求めるものである。

いま, 不確定要因 $\{r\} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ は, 互いに独立であると仮定しているため, それらの結合確率密度関数は, 各不確定要因の確率密度関数によって,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_m}(r_1, r_2, \dots, r_m) = f_{r_1}(r_1) \cdot f_{r_2}(r_2) \cdot \dots \cdot f_{r_m}(r_m) \dots \dots \dots (9)$$

のように表わされる。これを用いて要素 i の破壊確率は, 破壊点まわりの一次近似により, 次の積分で表わされる。

$$P_{Fi} = \int \int \dots \int_{D_i} f_{r_1, r_2, \dots, r_m}(r_1, r_2, \dots, r_m) dr_1 dr_2 \dots dr_m \dots \dots \dots (10)$$

$$D_i = \left\{ (r_1, r_2, \dots, r_m) \mid Q_{si} = \sum_{k=1}^m (r_k - r_{ki}^*) \frac{\partial Q_{si}}{\partial r_k} \Big|_* < 0 \right\} \dots \dots \dots (11)$$

式 (10) の重積分は, 積分領域が式 (11) で示すような超平面で区切られており, 結合確率密度関数は式 (9) のように個々の確率密度関数の積で表わされている。この積分は乱数を用いることによって比較的容易に計算することができる。つまり, それぞれの確率密度関数に基づいて発生される乱数の組を, (r_1, r_2, \dots, r_m) とし, これらを N 回発生させるとき, 式 (11) を満たす乱数の組の個数を N_{Fi} とすると, 要素 i の破壊確率は,

$$P_{Fi} = \frac{N_{Fi}}{N} \dots \dots \dots (12)$$

で計算される。この方法によれば, 個々の確率密度関数が正規分布以外の複雑な分布形であっても, それらに従った乱数を発生させることによって破壊確率を容易に計算することができる。

4. 数値計算例

ここで提案した確率有限要素法の解の精度を検証するため, 数値計算例を示す。破壊規準関数 Q_{si} は式 (2) を用い, 不確定要因 r_k としては, P (外力), c (粘着力) の2つを考え, その他は確定値とする。ここでは, まず, 破壊規準関数 Q_{si} の破壊点を求める計算手順を示し, 次に, 本手法を用いて破壊確率を求め, モンテカルロ法の解と, 従来の正規分布近似¹⁰⁾を適用した確率有限要素法で求めた解との比較検討を行う。

なお, P, c はそれぞれ, 対数正規分布, 正規分布に従うとし, それらの平均値を μ_P, μ_c , 標準偏差を σ_P, σ_c とする。

(1) 破壊点を求めるための収束計算

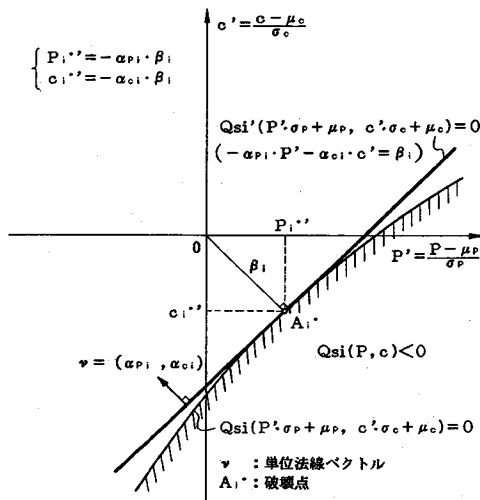
要素 i において, セン断破壊に対する安全性の余裕は,

$$Q_{si} = Q_{si}(P, c) = c \cos \phi + \frac{1}{2} (\sigma_{1i} + \sigma_{2i}) \sin \phi - \frac{1}{2} (\sigma_{1i} - \sigma_{2i}) \dots \dots \dots (13)$$

である。また, 本数値計算において, 要素 i の破壊点は, 図-2 に示すように定義される。すなわち, P, c をそれぞれの平均値 μ_P, μ_c と標準偏差 σ_P, σ_c を用いて座標変換を行った $P'-c'$ 座標上において, 破壊点は座標原点から破壊規準関数 $Q_{si}(P' \cdot \sigma_P + \mu_P, c' \cdot \sigma_c + \mu_c) = 0$ へ下した垂線の足 A_i^* で決定される。ここで, 原点から A_i^* までの距離を β_i , 破壊規準関数の A_i^* における外向の単位法線ベクトル ν の P' 成分, c' 成分をそれぞれ a_{Pi}, a_{ci} とすると, 破壊点 $\{P_i^*, c_i^*\}$ は

$$\left. \begin{aligned} P_i^* &= \mu_P - a_{Pi} \cdot \beta_i \cdot \sigma_P \\ c_i^* &= \mu_c - a_{ci} \cdot \beta_i \cdot \sigma_c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

で計算される。これは, 図-2 に示す破壊規準関数の曲



図—2 破壊点の定義

線上の点であるから

$$Q_{si}(P_i^*, c_i^*) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

を満たす。

式 (14) 中の $\beta_i, \alpha_{Pi}, \alpha_{ci}$ は、以下のように求められる。破壊規準関数 $Q_{si}(P' \cdot \sigma_P + \mu_P, c' \cdot \sigma_c + \mu_c) = 0$ の A_i^* における接線の方程式は、 $\beta_i, \alpha_{Pi}, \alpha_{ci}$ を用いて

$$-\alpha_{Pi} \cdot P' - \alpha_{ci} \cdot c' = \beta_i \dots\dots\dots (16)$$

と表わされる。これは $P' - c'$ 座標上の線形化された破壊規準関数 $Q'_{si}(P' \cdot \sigma_P + \mu_P, c' \cdot \sigma_c + \mu_c) = 0$ であるので、これを P', c' について整理し係数を比較することによって $\beta_i, \alpha_{Pi}, \alpha_{ci}$ は

$$\beta_i = \frac{Q_{si}(P_i^*, c_i^*) + (\mu_P - P_i^*) \frac{\partial Q_{si}}{\partial P} \Big|_* + (\mu_c - c_i^*) \frac{\partial Q_{si}}{\partial c} \Big|_*}{\left\{ \left(\sigma_P \frac{\partial Q_{si}}{\partial P} \Big|_* \right)^2 + \left(\sigma_c \frac{\partial Q_{si}}{\partial c} \Big|_* \right)^2 \right\}^{1/2}} \dots\dots\dots (17)$$

$$\alpha_{Pi} = \frac{\sigma_P \frac{\partial Q_{si}}{\partial P} \Big|_*}{\left\{ \left(\sigma_P \frac{\partial Q_{si}}{\partial P} \Big|_* \right)^2 + \left(\sigma_c \frac{\partial Q_{si}}{\partial c} \Big|_* \right)^2 \right\}^{1/2}} \dots\dots\dots (18)$$

$$\alpha_{ci} = \frac{\sigma_c \frac{\partial Q_{si}}{\partial c} \Big|_*}{\left\{ \left(\sigma_P \frac{\partial Q_{si}}{\partial P} \Big|_* \right)^2 + \left(\sigma_c \frac{\partial Q_{si}}{\partial c} \Big|_* \right)^2 \right\}^{1/2}} \dots\dots\dots (19)$$

と書き表わされる。 $\partial Q_{si} / \partial P, \partial Q_{si} / \partial c$ については、式 (5), (6) に示すとおりである。

破壊点 $\{P_i^*, c_i^*\}$ は式 (14), (15), (17), (18), (19) より求まるが、一般に、解析的に求めるのは困難であるので収束計算で求める。収束計算の初期値として、平均値 μ_P, μ_c を用いる。これは、破壊点は図—2 に示す原点 (平均値) の周辺に現われると考えられるからである。まず、 $P_i^* = \mu_P, c_i^* = \mu_c$ として式 (17), (18), (19) より、 $\beta_i, \alpha_{Pi}, \alpha_{ci}$ の値を計算する。次に、これらの値をもとに式 (14) より P_i^*, c_i^* を計算する。以下は、収束するまでこの操作を繰り返す。収束判定は β_i の値で行い

り、 $\beta_i, \alpha_{Pi}, \alpha_{ci}$ の値を計算する。次に、これらの値をもとに式 (14) より P_i^*, c_i^* を計算する。以下は、収束するまでこの操作を繰り返す。収束判定は β_i の値で行い

$$|\beta_i^{(m)} - \beta_i^{(m-1)}| < \varepsilon \dots\dots\dots (20)$$

を満足したときに収束計算を打ち切る。ここで、 $\beta_i^{(m)}$ は、 m 回目の計算における β_i の値、 ε は収束判定用のパラメーターである。なお、本数値計算例では $\varepsilon = 0.01$ とした。収束計算で得られる P_i^*, c_i^* より線形化された破壊規準関数は

$$Q'_{si} = (P - P_i^*) \frac{\partial Q_{si}}{\partial P} \Big|_* + (c - c_i^*) \frac{\partial Q_{si}}{\partial c} \Big|_* \dots\dots\dots (21)$$

と表わされる。

(2) 解析モデル

解析は2つのモデルを考える。それぞれを図—3⁽¹⁴⁾、図—4に示す。それぞれのインプットデータは、表—1、表—2に示す。

(3) モンテカルロ法との比較

ここで提案した確率有限要素法の検証として、モンテカルロ法との比較を行う。モンテカルロ法は、乱数を発生することによって得られるインプットデータに対して、通常の有限要素解析を行い、破壊規準関数に基づき各要素の破壊の有無を調べる。そして、この計算を繰り返すことによって得られる破壊の回数から各要素の破壊確率を求めるものである。

a) 解析モデル (1)⁽¹⁴⁾

解析モデル (1) は、図—3 に示すように3要素4自由度のモデルである。荷重条件としては、自重、水平震度 0.5 および節点集中荷重を与える。外力 P の確率密度関数 $f_P(P)$ および粘着力 c の確率密度関数 $f_c(c)$ は、次のように書き表わされる。

$$f_P(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \zeta \cdot P} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln P - \lambda}{\zeta} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (22)$$

$$f_c(c) = \frac{1}{\sigma_c \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{c - \mu_c}{\sigma_c} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (23)$$

$$\lambda = \ln \mu_P - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma_P^2}{\mu_P^2} \right) \dots\dots\dots (24)$$

$$\zeta^2 = \ln \left(1 + \frac{\sigma_P^2}{\mu_P^2} \right) \dots\dots\dots (25)$$

これらを用いて、 P と c を確率変数とする結合確率密度関数は、 P と c が互いに独立であることより、

$$f_{P,c}(P, c) = f_P(P) \cdot f_c(c) \dots\dots\dots (26)$$

となる。図—5に、これを各要素の破壊点 $\{P_i^*, c_i^*\}$ と、線形化された破壊規準関数の限界状態を表わす直線 ($Q'_{si} = 0$ となる直線) とともに、 $P - c$ 座標上に示す。図中に示されている破壊点は、平均値で表わされる点を初期値とすると、各要素について2回の繰り返し計算で収束

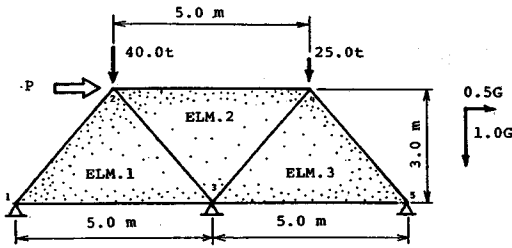


図-3 解析モデル (1)¹⁴⁾

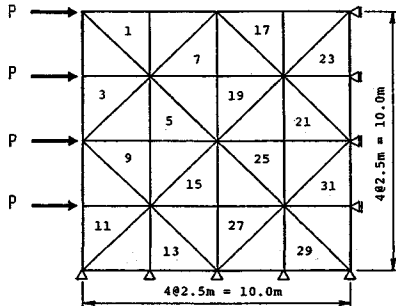


図-4 解析モデル (2)

表-1 インプットデータ (1)

	平均値	変動係数	分布形
ヤング係数 E	10000.0 tf/m ²	0.0	—
ポアソン比 ν	0.48	0.0	—
単位体積重量 γ	1.8 tf/m ³	0.0	—
粘着力 c	35.0 tf/m ²	0.286	正規分布
内部摩擦角 φ	30.0°	0.0	—
外力 P	80.0 tf	0.4	対数正規分布

表-2 インプットデータ (2)

	平均値	変動係数	分布形
ヤング係数 E	10000.0 tf/m ²	0.0	—
ポアソン比 ν	0.48	0.0	—
単位体積重量 γ	1.8 tf/m ³	0.0	—
粘着力 c	10.0 tf/m ²	0.4	対数正規分布
内部摩擦角 φ	30.0°	0.0	—
外力 P	80.0 tf	0.4	対数正規分布

した。ここで提案する破壊確率の計算法は、図-5に示す結合確率密度関数 $f_{P,c}(P, c)$ の斜線側の体積 (二次元の場合) を、乱数 (ここでは、 $N=20000$) を用いて求めるものである。このようにして求めた破壊確率をモンテカルロ法で求めた値と比較すると、図-6のようになる。ここでモンテカルロ法は、試行回数を種々変化させて得た値を示す。この図から、モンテカルロ法によって得られる破壊確率は、試行回数が増加するにつれて、提案する方法で得られる値に近づくことがわかる。

また、本解析に要した演算時間について、提案する方法 ($N=20000$) と、モンテカルロ法 (試行回数 20000 回) の比較を表-3に示す。表をみて明らかのように、提案する方法に要した演算時間は、モンテカルロ法のそれと比較して、非常に短いことがわかる。これは、モンテカルロ法では、試行回数分だけ有限要素解析を行うのに対し、提案する方法では、破壊点を求めるための収束計算

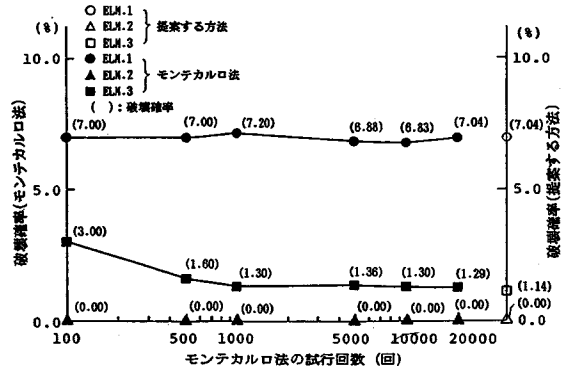


図-6 モンテカルロ法の解との比較 (解析モデル (1))

表-3 演算時間の比較

	提案する方法 ($N=20000$)	モンテカルロ法 (試行回数 20000回)
演算時間(秒)	3	38

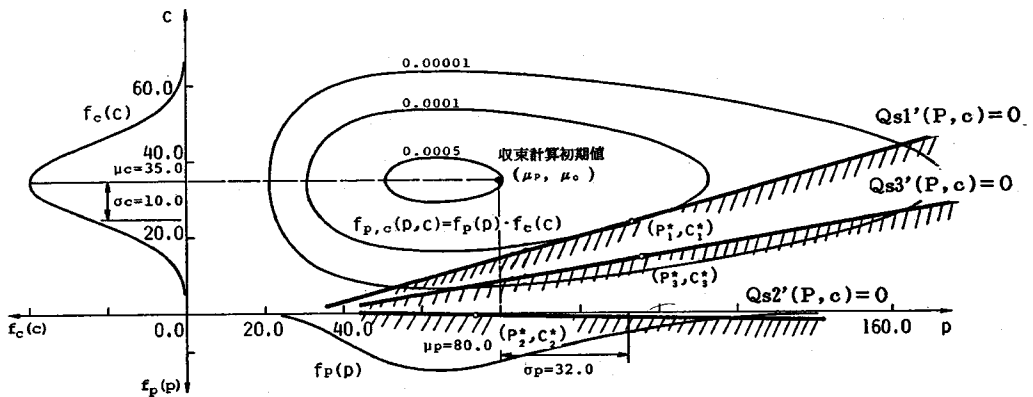


図-5 結合確率密度関数と各要素の線形化された破壊標準関数 $Q_{si}(P, c)$ との関係 (解析モデル (1))

表—4 破壊確率の比較 (解析モデル (2))

要素番号	提案する方法 (%)	モンテカルロ法 (%)	誤差 (%)
1	56.82	56.78	0.10
3	59.72	58.62	1.87
5	16.19	16.28	-0.55
7	19.20	19.02	0.95
9	14.52	14.32	1.40
11	36.05	35.22	2.35
13	10.45	10.80	-3.24
15	0.00	0.04	-
17	35.00	33.84	3.43
19	11.17	11.22	-0.45
21	0.59	0.64	-7.81
23	11.40	11.32	0.71
25	0.09	0.12	-25.00
27	0.00	0.00	-
29	0.00	0.00	-
31	0.00	0.00	-

の回数分だけ有限要素解析を行えばよく、その回数がモンテカルロ法の試行回数と比較して、はるかに少ないためである。

b) 解析モデル (2)

解析モデル (2) は、図—4 に示すように、32 要素 36 自由度のモデルである。インプットデータは表—2 に示すとおりであり、確率密度関数は、 $f_p(P)$ 、 $f_c(c)$ とともに変動係数が 0.4 とかなり大きい、対数正規分布に従うとする。ここで、外力は節点間についてばらつかない (完全相関) とする。提案する方法における乱数発生回数は $N=10\ 000$ とする。

モンテカルロ法の試行回数を 5 000 回としたときの破壊確率と、提案する方法で求めた破壊確率の各要素の比較を表—4 に示す。これより、破壊確率が 0.7% 未満の要素は誤差が 7% 以上と、大きくなっているが、それ以外の部分では 4% 以内に収まっていることがわかる。すなわち、本手法で求めた各要素の破壊確率はモンテカルロ法で求めた破壊確率とほぼ一致するが、破壊確率が小さくなる要素 (1% 未満) は、誤差が大きくなることがある。これは、積分に乱数を用いているため、破壊確率の精度が乱数の発生回数によって決定されるからであると考えられる。つまり、 $N=10\ 000$ の場合、破壊確率は 0.01% さまみで算出され、破壊確率が小さい場合には、誤差が大きく現われると考えられる。

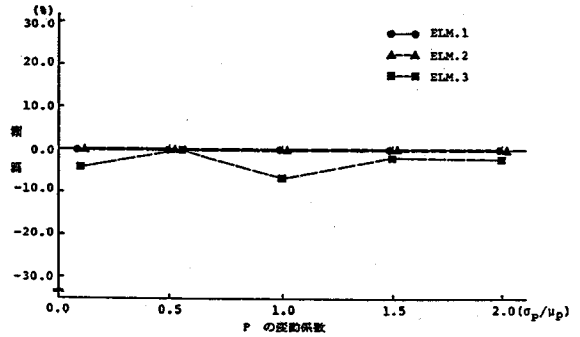
(4) 正規分布近似法との比較

確率密度関数が正規分布でない場合、それを破壊点において破壊確率が同じになるような正規分布に近似して破壊確率を求める方法¹⁰⁾が提案されており、これを確率有限要素法にも適用できることが示されている¹¹⁾。

ここでは、提案する方法による解と正規分布近似法による解の比較を行う。計算例として図—3 に示す解析モデル (1) を用いる。表—5 に、それぞれの方法で求めた破壊確率を示す。ここで、提案する方法においては、

表—5 破壊確率の比較 (解析モデル (1))

要素番号	提案する方法 (%) (N=20000)	正規分布近似法 (%)	モンテカルロ法 (%) (試行回数 20000回)
1	7.04	6.11	7.04
2	0.00	0.02	0.00
3	1.14	0.95	1.29



図—7 変動係数の増加に伴う各要素の破壊確率の誤差

乱数発生回数 $N=20\ 000$ 、モンテカルロ法では試行回数 20 000 回とした。これより、提案する方法は、すべての要素について正規分布近似法よりも、モンテカルロ法の解に近くなっていることがわかる。

(5) 変動係数の増加に伴う各要素の破壊確率の誤差

線形一次近似理論を用いた確率有限要素法の適用限界の 1 つとして、確率変数の変動係数が大きくなる場合が考えられる。鈴木らは、確率有限要素法において、確率変数の変動係数が大きくなる場合、図—3 に示すモデルに対して、相対誤差が最大で約 30% と大きくなることを報告している¹¹⁾。

ここでは、提案する方法を用いて、確率変数の変動係数の増加に伴う各要素の破壊確率の誤差の検討を行う。

解析には、図—3 のモデルを用いて、本手法により得られた解とモンテカルロ法により得られた解を比較することによって解の検証を行った。インプットデータは表—1 に示したものと同じものを用い、外力 P だけを平均値 80 t の対数正規分布としてその変動係数を変化させた。なお、提案する方法においては乱数発生回数 $N=5\ 000$ とした。解の精度は、モンテカルロ法の試行回数 5 000 回の結果を正解値として、本手法で得られた解との相対誤差により示す。結果は図—7 に示す。

これより、変動係数が変化しても要素 1、要素 2 については、ほとんど誤差が 0 であり、要素 3 については、多少の誤差は現われるが、それは最大で、変動係数が 1.0 のときの -6.5% であり、他は 4% 以内に収まっている。このことから、ここで提案する確率有限要素法は、確率変数の変動係数が大きくなる場合でも、従来の方法と比較して、精度が向上していることがわかる。

5. む す び

本論文においては、地盤構造物の確率有限要素解析を対象に、まず、有限要素法において、破壊の状態を表わす破壊規準関数を破壊点において線形化する方法を示し、次に、線形化された破壊規準関数をもとに乱数による積分で、破壊確率を計算する方法を提案した。そして最後に、具体的な計算例を示し、いくつかのケースについて、局部破壊に対する破壊確率を、ここで提案した方法、モンテカルロ法および従来の方法によって求め、考察を行った。その結果、ここで提案する確率有限要素法によれば、そのインプットデータとなる材料特性や荷重などの確率変数が、正規分布でない分布形に従う場合であっても、モンテカルロ法の解とほぼ一致する解を容易に求めることができ、しかも、従来までに提案されている方法と比較しても、その精度が向上することが明らかとなった。このことは、確率有限要素法を地盤工学における種々の問題に適用する際に、その汎用性が高められたことを示していると考えられる。

参 考 文 献

- 1) Desai, C.S. : Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill, N. Y., 1977.
- 2) Gudehus, G. : Finite Elements in Geomechanics, J. Wiley & Sons, London, 1977.
- 3) 川本眺万・林 正夫 : 地盤工学における有限要素解析, 培風館, 1978.
- 4) 松尾 稔 : 地盤工学 信頼性設計の理念と実際, 技報堂出版, 1984.
- 5) Hoeg, K. and Murarka, R.P. : Probabilistic Analysis and Design of a Retaining Wall, ASCE, Vol.100, No. GT 3, pp.349~366, 1974.
- 6) Vanmarcke, E.H. : Reliability of Earth Slopes, ASCE, Vol.103, No. GT 11, pp.1247~1265, 1977.
- 7) 中桐 滋・久田俊明 : 確率有限要素法入門, 培風館, 1985.
- 8) Vanmarcke, E., Shinozuka, M., Nakagiri, S., Schuëller, G.I. and Grigoriu, M. : Random Field and Stochastic Finite Elements, Structural Safety, 3, pp.143~166, 1986.
- 9) Cambou, B. : Application of First-order Uncertainty Analysis in the Finite Element Method in Linear Elasticity, Proc. of 2nd Int. Conf. Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Aachen, pp.67~87, 1975.
- 10) 桜井春輔・土居康成 : 有限要素法による斜面の信頼性解析, 土木学会論文報告集, No. 330, pp.87~97, 1983.
- 11) 鈴木 誠・石井 清 : 確率有限要素法による斜面安定解析, 土木学会論文集, No.364/III-4, pp.199~208, 1985.
- 12) Hasofer, A.M. and Lind, N.C. : Exact and Invariant Second Moment Code Format, ASCE, Vol.100, No.EM1, pp.111~121, 1974.
- 13) 辰巳安良・鈴木善雄 : 確率有限要素法による護岸の信頼性設計の試み, 土木学会論文集, No. 376/III-6, pp.49~58, 1986.
- 14) 辰巳安良ほか : 確率有限要素法による防波堤の信頼性解析, 第19回土質工学会研究発表会, pp.897~900, 1984.
- 15) 桜井春輔・清水則一・鈴木 誠・石井 清共著 “確率有限要素法による斜面安定解析”への討議, 土木学会論文集, No. 376/III-6 (討議・回答), pp.323~324, 1986.
- 16) Schuëller, G.I. (小西一郎・高岡宣善・石川 浩共訳) : 構造物の安全性と信頼性, 丸善株式会社, pp.241~244, 1984.
- 17) 山本正明・伊藤 洋・本城勇介 : 土質データーのばらつきと設計, 4. 土質データーのばらつきを考慮した設計, 土と基礎, Vol. 35, No. 5, pp.69~76, 1987.
- 18) Rackwitz, R. and Fiessler, B. : Structural Reliability under Combined Random Load Sequences, Computers & Structures, Vol.9, pp.489~494, 1978.
- 19) 溜 幸生 : 岩盤構造物の信頼性解析に関する研究, 神戸大学大学院修士論文, 1987.3.

(1988.4.21・受付)