

地下水浸透流解析モデルのパラメーター推定： 推定の不確実性とその予測への影響

PARAMETER ESTIMATION OF NUMERICAL MODELS OF GROUNDWATER FLOW : ESTIMATION UNCERTAINTY AND ITS INFLUENCE ON PREDICTION

本城 勇介*・森嶋 章**

By Yusuke HONJO and Akira MORISHIMA

The purpose of this study is to propose a procedure to predict groundwater behavior under new boundary conditions based on previous observations and on prior geotechnical and geological information. Also, special emphasis is given to the quantification of the uncertainties that are present in every stage of the procedure. First, the model parameters are estimated with involved estimation errors based on observations and the prior information by following an inverse analysis procedure. Second, the information obtained is used as input to predict the future behavior of the groundwater by introducing a stochastic finite element procedure. The final outcome of this procedure is the prediction of ground water under new boundary conditions with quantified uncertainties involved in it. A rather simple numerical example is attached to illustrate the results.

Keywords : groundwater, inverse problem, statistical analysis, FEM

1. まえがき

近年の数値解析計算技術の発展により、地下水の挙動予測の問題においても、有限要素法などにより地下水滯水層をモデル化し、解析を行うことが多い。一般に地下水を含む地盤工学の問題では、このような解析モデルを用いるとき、そのモデルパラメーター値の決定が地盤の不均質性などのため、構造工学の問題などに比べて困難である。そこで地盤工学の解析では、パラメーター値の決定にあたり、地盤調査・土質試験などの結果に基づき、工学的判断も加えて、一応パラメーター値を設定し解析を行い、すでに得られている観測結果（たとえば、井戸の水頭観測結果など）の挙動がうまく説明できるまでパラメーターを試行錯誤によって調整するという手続きがとられる場合が多い。このようにして得られたパラメーター値を用いることにより、現在とは異なる条件下における挙動の予測の精度が向上すると考えられる。

従来試行錯誤によって行っていた上記のようなパラ

メーター値の決定の問題を数理的に明確に定式化し、より系統的に行おうとするのがいわゆる逆解析（モデルパラメーターの同定）といわれる方法である。地下水浸透流解析モデルへの逆解析手法の適用は、地盤工学分野では最も逆解析の研究の進んでいる分野の1つと考えられる。最近では Townley¹⁾、Carrera と Neuman²⁾ などの包括的な研究があり、また一方では Cooley ら³⁾ による大規模な実問題への適用例も発表されている。またわが国でも大西と井尻⁴⁾、青木と嘉門⁵⁾ などの研究がある。今後はこれらの研究成果をふまえ、実問題への適用を通じ、その改良、適用限界の把握などが行われていくと考えられる。

本研究は、以上のような地下水浸透流モデルの逆解析の研究動向をふまえ、実問題への適用を考えたとき重要と判断される以上の2点に特に焦点をあて考察を行うものである。

(1) 逆解析における事前情報の役割とその効果

実際、地下水滯水層について逆解析を行おうとする場合、われわれは井戸の水頭観測結果のほかに、地盤調査に基づいた地質学的情報、また場合によっては直接あるいは間接的な方法による水理定数に関する情報などをもっていることが多い。逆解析においてこれらの情報は事前情報として役立てられるわけで、本研究では特にこ

* 正会員 Ph.D. (株)竹中土木 技術開発本部 副部長(兼) 竹中技術研究所 研究員
(〒136 江東区南砂 2-5-14)

** 正会員 (株)竹中土木 工事本部
(〒104 中央区銀座 8-21-1)

の事前情報の解釈とその推定結果への効果について検討した。

(2) 逆解析結果に基づいた予測の信頼性の評価

逆解析を行いモデルパラメータの推定を行うのは、地下水が現在と異なった条件下で示す挙動を予測するためであるといつてよい。したがって逆解析によって推定されたパラメータの不確実性が最終的な予測にどのような影響を与えるかを評価することは重要な問題である。本研究では、逆解析によって推定されるパラメータ値の不確実性をその推定分散によって評価し、さらにその予測値への伝播を確率有限要素法によって評価することを試みた。このように観測、逆解析、予測という一貫した流れとして解析をとらえることは、求められる予測の精度と、事前情報量や観測によって得られる情報量の関係などを考えるうえでも重要なことである。

図一1に本研究の解析の手順を示した。

なお、本研究ではふれていないが、Carrera・Neuman²⁾や大西・井尻⁴⁾がAIC(赤池の情報量基準)などを用いて行っているような、逆解析における統計的な最適モデルの選択、あるいはモデル・パラメータの数の限定(parameterization)の問題は、後述するとおりきわめて重要かつ本質的な問題であるが、本研究ではこの問題は一応おき、上記2つの問題に限定し考察を進める。最適モデルの選択の問題は、今後の課題とする。

最後に逆解析の1つの重要な側面である、解の唯一性(uniqueness)、同定可能性(identifiability)について述べる。これらの言葉の定義にはやや混乱があるので、まず定義を与えることから始める。

解の唯一性とは、与えられた逆解析の定式化が、ある任意の観測結果に対して、ただ1つのパラメータの組合せを与えることである。これに対して同定可能性とは、逆解析の定式化とは関係なく、順解析で採用している数理モデルがある任意の観測結果に対して、数学的にただ一組のパラメータが対応していることをいう。普通、問題が同定可能であれば、逆解析の解は唯一であるが、この逆は成り立たない。文献2)や6)で詳しく述べられているように、地下水浸透流解析が基礎をおいている放物型の偏微分方程式のパラメータ分布が同定可能であるためには、普通地下水観測で計測されるよりはるか

に多量のデータが必要である。事実、たとえば観測が空間内の隔散的な点でしか行われていない場合は、たとえ観測が時間的には連続して行われたとしてもパラメータ分布は同定不可能である。

以上のようにわれわれが問題としている地下水浸透流モデルの逆解析は、本質的に同定不可能な問題である。しかしこの事実はわれわれがこの問題に逆解析手法を適用することの有用性を必ずしも妨げるものではないというのが本研究の立場である。これは以下の理由による。われわれが地下水浸透流を数理的にモデル化するとき、そこに種々の近似や単純化が入っていることは周知の事実であり、また観測データも外乱の影響を免れることはできない。しかしながらわれわれは、このように単純化された近似的なモデルが、地下水挙動について工学的に許容し得る範囲の精度で予測などに役立つと考えている。したがって、われわれが逆解析を行うときも、与えられた情報のもとで、地下水挙動を工学的に許容し得る範囲の精度で近似的に表現し得る上記のような工学的なモデルのパラメータを推定しようとしているのである。このような視点に立つとき、パラメータの数の限定(parameterization)や、種々の事前情報の利用の問題は、逆解析では本質的な問題となる。われわれはこのような操作を通じて、本質的に同定不可能な問題に、少なくとも局所的な解の唯一性を与えることにより、工学的に有用なモデルを得ようとするのである。

2. モデル・パラメータの推定

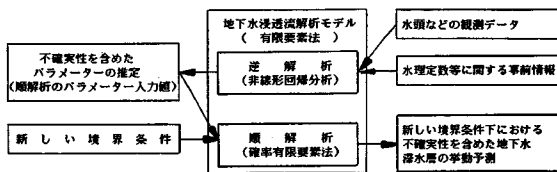
(1) 問題の定式化

地下水流は本来三次元的な流れであるが、ここでは広域地下水問題などを扱う場合に広く行われているように、地下水の鉛直方向の流れを無視し、二次元平面問題として取り扱う。このときの支配方程式は熱伝導形の偏微分方程式によって与えられる。この方程式を与えられた初期条件と境界条件のもとで解くためにここでは有限要素法を用いることにする。この定式化をマトリックス表示すると以下ようになる⁷⁾。

$$A[\theta h^{k+1} + (1-\theta)h^k] + B \frac{(h^{k+1} - h^k)}{\Delta t^k} = F^{k+\theta} \dots\dots (1)$$

ここに、**A**:透水量マトリックス、**B**:貯留マトリックス、**F**:系への流出入量に関するベクトル、*k*:時間ステップを示す指数、**h**:節点水頭ベクトル、 θ :時間差分に関する係数、 $\Delta t^k = t^{k+1} - t^k$:時間差分である。ここで、**A**は透水量係数(**T**)の、**B**は貯留係数(**S**)の、**F**は各種の流出入量(境界、降雨、揚水、注水など:**Q**)の関数である。ところで、透水量係数**T**と貯留係数**S**は、その対数変換:

$$Y = \log T, \quad C = \log S$$



図一1 解析手順の概念図

が正規分布に従うことが知られている⁸⁾。したがって本論文では統計的な取扱いの容易さを考え T, S はすべて Y, C に変換して扱うことにする。また以後の便宜を考え、 Y, C, Q は一括してパラメーターとよび $u = (Y, C, Q)^T$ で表わす。後の式の展開を容易にするため、式(1)を状態空間表示の式に書き直すと、

$$C^k(u)h^{k+1} = D^k(u)h^k + f^k(u) \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $C^k = A\theta\Delta t^k + B$

$$D^k = B - A(1-\theta)\Delta t^k$$

$$f^k = \Delta t^k F^{k+0}$$

パラメーターの同定を行う方法は、一般に直接法と間接法に分類される⁹⁾。直接法は、もし対象としている領域全体について水頭と水頭勾配の分布がわかれば、これをたとえば式(1)を用いることによりパラメーター値に直接変換し推定できることを利用する方法である。実際には水頭観測値は、領域内の限られた点でしか得られていないから、これら観測値より任意点の水頭と水頭勾配を内挿する必要がある。この内挿には当然多くの誤差が含まれ、この誤差は推定結果に大きな影響を与える。また内挿法としては Kriging など純粋に統計的な方法がとられ、背景となる数理モデルが考慮されることはない。以上のような理由のため、比較的観測点が少なくかつ平面的に偏って分布している実際問題を対象とするとき直接法は必ずしも適当な方法ではない。

これに対し間接法は、ある目的関数(代表的には各観測点における観測値と計算値の差の二乗和)が極値をとるようにパラメーターを調整することにより推定を行う方法で、直接法より計算時間はかかるものの、汎用性に豊む方法である。さらに、間接法は統計学的視点からは、非線形回帰分析としてみることができ、したがって推定されたパラメーターの信頼性などを定量的に評価することができるなどの利点をもつ。現在までに発表されている主要な包括的研究はすべて間接法によっており、本研究もこの定式化に従っている。

以上より本研究では、次の目的関数を最小化する u を選ぶことによって行われる。

$$J(u) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^K (h^k - h^{*k})^T (\rho_{ki} V_h)^{-1} (h^i - h^{*i}) + (u - \underline{u})^T V_u^{-1} (u - \underline{u}) \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 h^{*k} : k 時刻ステップにおける水頭観測値ベクトル、 \underline{u} : u に関する事前平均値、 ρ_{ki} : 時間間隔に関する観測水頭の共分散、 V_h : 平面距離に関する観測水頭の共分散マトリックス、 V_u : u に関する事前共分散マトリックス、 K : 観測時刻ステップ数である。式(3)で、水頭に関する共分散は、時間に関する部分と平面距離に関する部分に分けることができ、かつ全共分散はその積によって与えられると仮定している²⁾。

式(3)の定式化は、重み付き最小二乗法といわれるものであるが、この目的関数を最小化することによってパラメーターを推定することの意味について、統計学的にはベイズ推定あるいは最尤推定の2通りの代表的解釈がある。

2つの解釈の違いを簡単に説明する。ベイズ推定では、推定しようとするモデルパラメーター自身確率変数であると仮定する。推定の過程は、技術者が求めようとするパラメーターに与えた事前分布が、得られた観測データによってベイズの定理を通じて更新され、事後分布を得る過程として記述される。事後においても推定されたパラメーターは確率変数である。ここでは確率は一貫して技術者の確信の度合として解釈される。なお、以上のようなベイズ推定は、すべての確率変数が正規分布に従い、かつ観測値が、パラメーターの線形変換によって一意的に表わされるとき式(3)を最小化する u が事後分布の平均値(ベイズ推定値)に成ることが知られている。したがって本研究が対象としている地下水浸透流解析では、観測値(水頭)とパラメーターの間に線形関係は成立しないので、近似的に成り立つだけである。

一方最尤推定では、パラメーターは未知の確定値をもつと考えられる。ただし、観測値や、パラメーターの事前推定値には、観測誤差や、モデル化誤差などのノイズが混入していると仮定している。推定によって得られる推定値は、パラメーターの最尤推定量であり、その誤差はノイズ等に起因する推定誤差である。もし水頭誤差($h^k - h^{*k}$)とパラメーターの残差の($u - \underline{u}$)がともに多変量正規分布すると仮定でき、また h が u の線形変換として一意的に表わされるとすれば、式(3)を最小化する u が最尤推定量となることが容易に導かれる。

以上のような2つの解釈のうち、どちらの解釈が適当であるかということは一概にはいえない。このような解釈の違いにより異なってくる側面は、(i) 事前分布や推定結果さらに予測結果の確率の意味づけが異なってくる、(ii) AIC(赤池の情報量基準)などにより最適モデルを選択しようとするとき解釈の違いにより採用する基準が異なり、したがって選択されるモデルが異なってくる可能性がある、などが考えられる。先に「まえがき」でも述べたように、本研究ではモデル選択の問題は扱わないので、これら2つの方法の差は確率の解釈の差である。これは多分に形式的なものであるから、本論文ではどちらの方法を採用するかという選択は保留することとする。

なお、以上2つの立場のほかに、事前情報にあたるものを、統計解析で解を安定させるためのフィルターのように入れて用いる方法がある。Cooleyの方法がこれに当たり、リッジ回帰分析の方法を拡張したものである¹⁰⁾。

統計解析ではしばしば用いられる方法であるが、その結果の解釈が明確でないところが難点である。

(2) 問題の解法

パラメーターの推定は、式(3)を最小にする \underline{u} の組合せを求めることによって行われる。これには非線形関数を最小化する種々の方法が用いられる¹¹⁾。一般に目的関数が式(3)のように二乗和の形をしているときは、Gauss-Newton 系のアルゴリズムが計算時間を短縮するうえで有効であると考えられている。実際最近の大西ら⁴⁾、青木ら⁵⁾の研究では、この系統のアルゴリズムが用いられている。これらのアルゴリズムを用いるとき、感度行列とよばれる下記の行列を効率よく計算する必要がある。

$$S^k = \left[\frac{\partial h^k}{\partial \underline{u}^T} \right] \dots \dots \dots (4)$$

Yeh⁹⁾はこの行列の計算法として、(i)影響係数法、(ii)感度方程式法、(iii)変分法の3つを紹介している。このうち(i)と(ii)は、感度行列を求めるのに(パラメーター数+1)回方程式(2)を解く必要があり、一方(iii)では、(観測点数+1)回解くに相当する計算量が必要である。青木ら⁵⁾は、(iii)の方法により感度行列を求めている。

一方、一般的な非線形関数の最小化手法として共役勾配法系のアルゴリズムがある¹¹⁾。この方法では、目的関数 J のパラメーター \underline{u} に関する偏微分値ベクトル $(\partial J / \partial \underline{u}^T)$ を求める必要がある。前記(iii)と同様の考えに立ち、この偏微分値をきわめて迅速に計算する随伴状態法とよばれる方法が Neuman により地下水の逆解析にも応用されており¹²⁾、本研究ではこの方法に従った。この方法ではパラメーター数にかかわらず式(2)を2回解くに相当する計算量で、 $(\partial J / \partial \underline{u}^T)$ を求めることができる。随伴状態法の詳細は、付録Aを参照されたい。

随伴状態法を採用したので、本研究では、共役勾配法系のアルゴリズムである Fletcher-Reeves 法(以下FR法)および Davidson-Fletcher-Powell 法(以下DFP法)の2つを用い比較した。同様の比較は Townley¹⁾、Carraera と Neuman²⁾ によっても行われている。前者は DFP 法が収束がよいとし、後者はFR法が優れているとしている。本研究で計算したかぎりでは、FR法の方が収束がよいと思われた。なお、FR法あるいはDFP法で探査方向を決定してからの一次サーチは、二次曲線当てはめ法によって行った。

(3) 推定されたパラメーターの信頼性

推定されたパラメーターの信頼性を定量的に求めることは、逆解析結果を評価するうえでも、これらパラメーターを用いて予測を行ううえでも非常に重要である。このような評価は、ベイズ推定の立場に立てば \underline{u} の事後

分布として、最尤推定の立場に立てば推定共分散として求められる。ところで、本研究が対象としている地下水浸透流モデルは、パラメーターに関して非線形なモデルであるから、これに対し上記のような推定値の信頼性を求めるためには、これを求められた推定パラメーター $\hat{\underline{u}}$ において近似的に線形化し、線形モデルについて確立されてきたベイズ推定や最尤推定における方法を用いるのが最も一般的な方法であり、本研究においてもこの方法に従った。

いま式(3)を最小にするパラメーターの組合せ $\hat{\underline{u}}$ が得られたとしよう。 $\hat{\underline{u}}$ の信頼性を評価するためにまず $\hat{\underline{u}}$ でテラー展開を用いてシステムを線形化する。

$$h^k(\underline{u}) \approx h^k(\hat{\underline{u}}) + \left[\frac{dh^k}{d\underline{u}^T} \right]_{\underline{u}=\hat{\underline{u}}} (\underline{u} - \hat{\underline{u}}) = \Phi^k + S^k \underline{u} \dots \dots (5)$$

ここに、 $\Phi^k = h^k(\hat{\underline{u}}) - S^k \hat{\underline{u}}$ 、 $S^k = \left[\frac{\partial h^k}{\partial \underline{u}^T} \right]_{\underline{u}=\hat{\underline{u}}}$

なる定数ベクトルと定数マトリックスである。式(5)を式(3)に代入すると、

$$J(\underline{u}) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^K (\Phi^k + S^k \underline{u} - h^{*k})^T (\rho_{ki} V_k)^{-1} (\Phi^i + S^i \underline{u} - h^{*i}) + (\underline{u} - \underline{u}')^T V_u^{-1} (\underline{u} - \underline{u}') \dots \dots \dots (6)$$

以上のような線形化の結果、この問題は \underline{u} に関する一般的な線形重み付き最小二乗法の問題に帰着され、線形モデルについて確立された回帰係数の信頼性の検討方法を用いることによって、パラメーターの信頼性評価を行うことができる。

ベイズ推定でも、最尤推定でも式(5)の線形近似によって得られるパラメーターの信頼性について得られる情報は形式的には同じであって、次式によって与えられる。

$$V_u'' = \left[\frac{1}{\sigma_h^2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^K S^k (\rho_{ki} V_k)^{-1} S^i + V_u^{-1} \right]^{-1} \dots \dots \dots (7)$$

ここに、

$$\sigma_h^2 = \frac{\sum_{k=1}^K [h^k(\hat{\underline{u}}) - h^{*k}]^T [h^k(\hat{\underline{u}}) - h^{*k}]}{NK - M}$$

なお、ここに、 N は観測地点数、 M は全推定パラメーター数、 K は観測時間ステップ数である。

式(7)はベイズ推定では事後分布の共分散マトリックス、最尤推定では推定誤差共分散マトリックスと解釈される。

Vecchia と Cooley¹³⁾ は最近、近年得られた非線形回帰分析における新しい信頼性区間の求め方を、地下水逆解析によって得られた結果に適用することを検討している。彼らは、上に示したような線形化近似による方法では、信頼性区間を過少に評価する場合があると述べている。パラメーター推定信頼性の精度のよい評価法は、今後の残された問題の1つである。

3. パラメーターの不確実性を考慮した予測

先にも述べたように本研究では、事前情報と観測データに基づいて推定されたパラメーターを用いて、その不確実性も含めて予測を行い、最終的な予測結果の不確実性を評価することを研究の目的の1つとしている。このためには、解析モデルを1つのシステムとして考えた場合、入力であるパラメーターの不確実性が、このシステム内を伝播し、最終的な出力（水頭や流量）の不確実性にどのように影響するかを、定量的に評価しなければならない。この評価を、本研究では一次近似二次モーメント法（FOSM法）に基づいた確率有限要素法に基づいて行っている。FOSM法を地下水浸透流有限要素法解析に用いた研究としては、Sager¹⁴⁾やDettingerとWilson¹⁵⁾のものが知られている。また、Townley¹¹⁾は、本研究と同様逆解析結果を用いて確率有限要素法解析を行っている。

式(2)に与えられる有限要素法は、パラメーター u を入力とし、各時刻における接点水頭 h を出力とする、1つの非線形システムとみることができる。すなわち、

$$h^k = F^k(u) \quad (k=1, \dots, K) \dots\dots\dots (8)$$

ここに u は、平均 \hat{u} (逆解析による推定値)、共分散マトリックス V_u^k (式(7)で与えられるマトリックス) をもつ、確率変数である。FOSM法の手順に従い、まず式(8)を \hat{u} で線形化すると、

$$h^k \approx G^k \hat{u} + b \dots\dots\dots (9)$$

$$G^k = \left[\frac{\partial F^k}{\partial u^T} \right]_{u=\hat{u}}$$

$$b = F^k(\hat{u}) - G^k \hat{u}$$

式(9)を用いて、節点水頭の平均値および共分散の1次近似は、次のように求められる。

$$\underline{m}_h^k = E[h^k] \approx F^k(\hat{u}) \dots\dots\dots (10)$$

$$H_h^k = E[(h^k - \underline{m}_h^k)(h^k - \underline{m}_h^k)^T] \approx G^k V_u^k G^{kT} \dots\dots\dots (11)$$

式(10)、(11)によって、各節点水頭の予測値の不確実性は定量的に評価される。

近年、地盤工学の他の分野でも確率有限要素法は応用され、地盤の不均質性、外力のばらつきなどが最終的な構造物の信頼性に与える影響について評価を行う試みがなされている。このとき空間的に分布するパラメーターの自己相関構造を解析に考慮しないと、著しく真値と異なった計算結果を得ることもあり得ることが指摘されている。これに対し、本研究が行っているように、逆解析によって得られたパラメーターの共分散行列 V_u^k を確率有限要素法の入力とすれば、パラメーターの空間的自己相関構造はある程度自動的に考慮されていることになる。いうまでもなく観測井戸分布の偏り等の影響が u の共分散行列(式(7))に影響を与えることは注意す

る必要がある。

4. 計算例および考察

本章では、比較的簡単な計算例題を用いて、前章までに述べてきたもろもろの点について例示し、考察を加える。例題として取り上げるのは、図-2に示すような滞水層である。この滞水層は、透水量係数 (T) と貯留係数 (S) の異なる4つのゾーンより成り、流入 (Q) が右上よりあり、左下の定水頭境界より流出が生じている。設定した T 、 S 、 Q の真値は図中に示すとおりである。図-3には有限要素分割図を示した。また図-4は、上記のような境界条件下における定常状態の水頭分布を示した。初期水頭は、この分布に従うものとする。

以下(1)では、逆解析を種々の要因を変化させて行った場合の結果およびその考察を述べ、(2)では、逆解析結果に基づき確率有限要素法を用いた行った予測結果を示し、考察を行う。

(1) 逆解析の計算例および考察

逆解析に用いる水頭観測値としては、図-3に示すように、対象滞水層の中央部分の井戸より1000 m³/dayの揚水を約100日間続け、このときの水頭観測結果を用いるものとする。揚水により、揚水井に近い観測井で8~10 m、遠い観測井でも2~3 mの水頭変化があり、こ

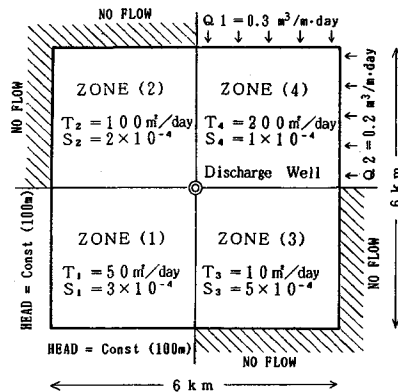
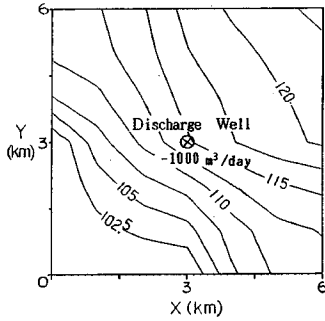


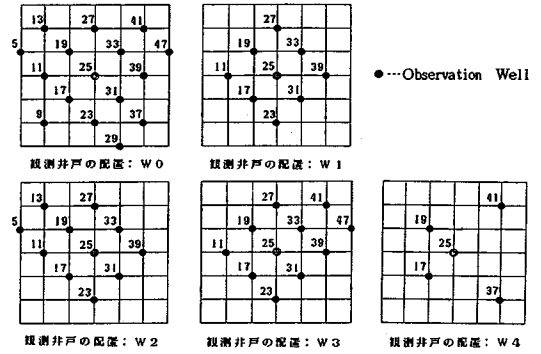
図-2 設定モデル

	14	21	28	35	42	49
7						
6	13	20	27	34	41	48
5	12	19	26	33	40	47
4	11	18	25	32	39	46
3	10	17	24	31	38	45
2	9	16	23	30	37	44
1	8	15	22	29	36	43

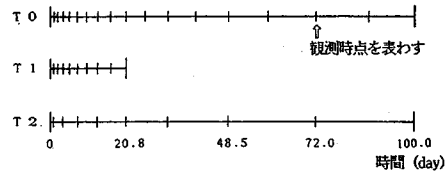
図-3 要素分割図



図—4 初期水頭分布図



図—5(a) 観測井戸配置図



図—5(b) 観測頻度と時間間隔

れを用いて逆解析を行った。

計算例は、a) 事前情報を考慮しなかった場合と、b) 事前情報を考慮した場合、の2通りに大別されるので、以下この順序に従って述べる。

a) 事前情報を考慮しなかった場合 (シリーズ I)

これは式 (3) で第2項を考慮せずに推定を行った場合に相当する。この場合検討した種々の要因と、計算ケース名の対応を表—1に示した。この計算例は、井戸観測値間の平面的相関構造を考慮しない場合 (I-1 シリーズ) と、考慮した場合 (I-2 シリーズ) の2つに大別される。平面的相関構造とは、式 (3) の V_h マトリックスによって表わされるもので、個々の井戸における観測値が独立であると仮定されるときこの共分散マトリックス V_h は対角要素のみに零でない要素をもつマトリックスである。一方、相関構造を考慮する場合は、各井戸の観測値はその相互間の距離などに応じた相関を考慮し、したがって V_h は対角要素以外に零でない要素を含む対称マトリックスとなる。本計算例では、一様に自己相関関数 $\exp(-\Delta x/4000 \text{ (m)})$ によって V_h の各要素を求めた。ここに自己相関距離 4000 m は、本設定モデルで各ゾーンが 3 km と大きいことにより、このオーダーを表わす値として設定した。このように平面的相関構造を考慮することは、パラメーター推定において観測値に相対的な重みを考慮することになる。

以上のように2つに大別したうえで、以下の要因について考察した。

(i) 観測井戸の数と平面的分布：図—5(a) に示すような5つのパターンを設定した。W0は最も密に配置した場合。W1は粗に、しかし対称に配置した場合。W2とW3はそれぞれ、ゾーン2とゾーン4に偏って配置した場合である。またW4は、観測井戸数が極端に少ない場合の例である。

(ii) 観測頻度と時間間隔：図—5(b) に示すような、3つの場合を考えた。T0は、100日間に17回の観測を行った場合である。T1とT2はともに9回に観測回数を減じ、T1は最初の20日間に観測を集中させ、T2

は100日間に9回の観測を行った場合である。

(iii) 観測ノイズ：逆解析に用いた観測は、すべてを真値に設定し、25番節点より1000 m³/dayの揚水を行うという条件で問題を解き、このときの各観測井戸位置における水頭変化に所定のノイズを加えることにより生成した。このとき加えられたノイズの性質を次の3種類とした。N0は、ノイズを全く加えない場合、N1は平均0、分散1.0の、N2は平均0、分散9.0の正規乱数としてノイズを加えた場合とする。

今回の検討では、ある程度のノイズが存在するのが標準的な状態と考え、W0T0N1のケースを標準ケースとして、これと比較して種々の要因の影響を調べた。なお先にまえがきで述べたように、本報告では最適モデルの選択の問題は論じないのですべてのケースで、ゾーン数を4個とし、4個の T および S と2個の流入量 (Q) の合計10個のパラメーターを同時推定する。また推定計算の打ち切り条件としては、連続した2回の共役方向への収束計算で式 (3) で与えられる $J(\underline{u})$ が1%以上改良されないときは計算を打ち切るという基準を、すべてのケースで一律に採用した。

表—1にシリーズIの推定結果を示した。なお、推定に際して設定した各パラメーターの初期値も合わせて表に示してある。結果としては、各パラメーターの推定値および、求められた事後共分散マトリックスの各パラメーターに対応する対角要素の平方根を標準偏差として示し、推定精度の目安とした。また事後共分散マトリックスのトレース ($\text{tr}(V_{\hat{u}})$) を示し、これによって各ケースの相対的な推定精度を比較する指標とした。

表一 事前情報を考慮しない場合のケーススタディ結果 (シリーズ I)

井戸観測値間の平面的相関構造を考慮しない場合													井戸観測値間の平面的相関構造を考慮した場合												
パラメーター	log T1	log T2	log T3	log T4	log S1	log S2	log S3	log S4	Q1	Q2	tr(V ₀)		パラメーター	log T1	log T2	log T3	log T4	log S1	log S2	log S3	log S4	Q1	Q2	tr(V ₀)	
真 値	1.70	2.00	1.00	2.30	-3.52	-3.70	-3.30	-4.00	0.300	0.200	—		真 値	1.70	2.00	1.00	2.30	-3.52	-3.70	-3.30	-4.00	0.300	0.200	—	
初 期 値	2.00	2.00	2.00	2.00	-3.52	-3.52	-3.52	-3.52	0.250	0.250	—		初 期 値	2.00	2.00	2.00	2.00	-3.52	-3.52	-3.52	-3.52	0.250	0.250	—	
(a) 観測井戸の位置と数 (平面的自己相関構造を考慮せず)													(d) 観測井戸の位置と数 (平面的自己相関構造を考慮)												
I-1-W0TON1	推定値	2.11	2.16	1.68	2.45	-3.49	-3.46	-3.19	-3.37	0.325	0.374	2.717	I-2-W0TON1	推定値	1.97	2.02	0.962	2.34	-3.52	-3.50	-3.46	-3.51	0.252	0.236	1.350
	標準偏差	0.475	0.346	0.416	0.241	1.22	0.504	0.405	0.391	0.205	0.198			標準偏差	0.359	0.247	0.393	0.137	0.774	0.393	0.375	0.272	0.114	0.0764	
I-1-W1TON1	推定値	1.85	2.06	1.51	2.30	-3.51	-3.49	-3.45	-3.49	0.270	0.274	2.356	I-2-W1TON1	推定値	1.84	2.02	1.09	2.42	-3.52	-3.50	-3.43	-3.52	0.253	0.249	32.44
	標準偏差	0.378	0.270	0.349	0.220	1.04	0.666	0.431	0.404	0.229	0.208			標準偏差	0.497	0.398	0.483	0.220	1.12	0.828	0.495	0.446	0.336	0.244	
I-1-W2TON1	推定値	1.93	2.03	1.93	2.17	-3.50	-3.45	-3.45	-3.42	0.312	0.316	2.450	I-2-W2TON1	推定値	1.93	2.08	1.64	2.34	-3.51	-3.48	-3.43	-3.46	0.289	0.293	32.94
	標準偏差	0.372	0.263	0.293	0.251	1.14	0.383	0.536	0.514	0.237	0.199			標準偏差	0.475	0.356	0.423	0.267	1.39	0.503	0.493	0.480	0.293	0.217	
I-1-W3TON1	推定値	1.89	2.03	1.67	2.35	-3.50	-3.47	-3.45	-3.44	0.289	0.285	20.30	I-2-W3TON1	推定値	1.96	2.01	1.19	2.31	-3.52	-3.51	-3.47	-3.51	0.248	0.234	68.32
	標準偏差	0.360	0.256	0.313	0.162	1.07	0.514	0.382	0.356	0.114	0.125			標準偏差	0.825	0.574	0.748	0.281	1.64	1.17	0.737	0.666	0.357	0.105	
I-1-W4TON1	推定値	2.11	2.16	1.40	2.35	-3.46	-3.46	-2.98	-3.41	0.270	0.231	10.205	I-2-W4TON1	推定値	1.99	2.02	1.01	2.31	-3.49	-3.46	-3.32	-3.47	0.233	0.260	253.38
	標準偏差	1.80	3.69	3.79	1.24	2.79	3.02	4.70	2.55	3.06	3.75			標準偏差	1.48	4.39	7.49	1.41	1.59	3.49	9.44	2.72	5.83	5.35	
(b) 観測時間と頻度 (平面的自己相関構造を考慮せず)													(e) 観測時間と頻度 (平面的自己相関構造を考慮)												
I-1-W0TON1	推定値	2.11	2.16	1.68	2.45	-3.49	-3.46	-3.19	-3.37	0.325	0.374	2.717	I-2-W0TON1	推定値	1.97	2.02	0.962	2.34	-3.52	-3.50	-3.46	-3.51	0.252	0.236	1.350
	標準偏差	0.475	0.346	0.416	0.241	1.22	0.504	0.405	0.391	0.205	0.198			標準偏差	0.359	0.247	0.393	0.137	0.774	0.393	0.375	0.272	0.114	0.0764	
I-1-W1TON1	推定値	1.81	1.98	1.72	2.34	-3.50	-3.44	-3.42	-3.46	0.282	0.271	33.40	I-2-W1TON1	推定値	1.88	1.95	1.58	2.25	-3.52	-3.51	-3.49	-3.52	0.239	0.198	25.10
	標準偏差	0.508	0.411	0.447	0.294	1.18	0.533	0.508	0.754	0.267	0.228			標準偏差	0.479	0.363	0.424	0.263	1.03	0.454	0.438	0.502	0.225	0.166	
I-1-W2TON1	推定値	1.83	2.20	1.69	2.43	-3.47	-3.40	-3.37	-3.39	0.327	0.320	46.19	I-2-W2TON1	推定値	1.88	2.06	1.51	2.24	-3.52	-3.50	-3.47	-3.51	0.237	0.210	35.34
	標準偏差	0.593	0.427	0.541	0.277	1.62	0.662	0.539	0.516	0.230	0.207			標準偏差	0.568	0.332	0.520	0.175	1.43	0.577	0.497	0.388	0.132	0.087	
(c) 観測値のノイズ (平面的自己相関構造を考慮せず)													(f) 観測値のノイズ (平面的自己相関構造を考慮)												
I-1-W0TON0	推定値	2.09	2.26	1.40	2.51	-3.47	-3.44	-3.06	-3.34	0.315	0.352	0.129	I-2-W0TON0	推定値	1.83	2.07	0.967	2.35	-3.51	-3.50	-3.44	-3.50	0.250	0.233	0.114
	標準偏差	0.086	0.063	0.079	0.043	0.242	0.100	0.074	0.067	0.039	0.172			標準偏差	0.096	0.063	0.101	0.034	0.238	0.111	0.096	0.071	0.030	0.076	
I-1-W0TON1	推定値	2.11	2.16	1.68	2.45	-3.49	-3.46	-3.19	-3.37	0.325	0.374	2.717	I-2-W0TON1	推定値	1.97	2.02	0.962	2.34	-3.52	-3.50	-3.46	-3.51	0.252	0.236	1.350
	標準偏差	0.475	0.346	0.416	0.241	1.22	0.504	0.405	0.391	0.205	0.198			標準偏差	0.359	0.247	0.393	0.137	0.774	0.393	0.375	0.272	0.114	0.076	
I-1-W0TON2	推定値	1.94	2.22	1.95	2.50	-3.47	-3.40	-3.34	-3.34	0.374	0.390	180.28	I-2-W0TON2	推定値	1.90	2.14	1.24	2.28	-3.51	-3.51	-3.45	-3.48	0.248	0.237	106.25
	標準偏差	1.24	0.975	1.09	0.683	2.99	1.37	1.16	1.14	0.611	0.222			標準偏差	0.990	0.589	0.938	0.335	2.43	1.05	0.888	0.660	0.262	0.074	

表一(a) は、平面的相関構造を考慮しない場合の観測井戸の数および配置パターンが推定結果に与える影響について調べたものである。tr(V₀) を比べると、観測井戸数の最も多いケース W0 が他に比べて大きな値をとり、推定精度が劣っていることを示しており、奇異に思われる。一方表一(d) の平面的相関構造を考慮した場合は、tr(V₀) で比較した各ケースの推定精度は、観測井戸数とほぼ整合した値を示している。これより表一(a) の場合相関構造を考慮していないため、観測値間のウェイトがうまく調整されず、W0 の場合、観測井戸の多さがかえって妨げとなり、観測井戸数は少ないがそれが全領域にうまく分散しているケース W1 の方がよい推定を与えていることがケース I-1-W0TON1 の推定精度が劣る理由と思われる。ケース W2 と W3 はそれぞれゾーン 2 と 4 に偏って観測井戸を配置した場合であるが、それらのゾーンがこれらのケースで特に顕著に精度よく推定されているとはいきれない。またケース W4 は観測井戸が極端に少ない場合であるが、推定値は予想以上に真値に近づいた。しかしその推定誤差は大きく観測点数の少なさの影響がこの点に現われている。

表一(b), (e) に示した、観測頻度や時刻を変化させたケースでは、その影響が明確に現われている。すなわち、観測頻度の最も多いケース T0 では精度は最もよく、続いて揚水を開始してから 20 日間に 9 回の観測を行ったケース T1 がよく、100 日間に 9 回の観測しか

行わなかったケース T2 の精度は最も劣る。T0 の精度が最もよいのは当然として、T1 が T2 より優れているのは、揚水開始直後の水頭変化の著しい時間に観測が集中しているためと考えられる。以上の事実は、平面的相関構造を考慮するしないにかかわらず、共通にみられた。

観測ノイズの影響もきわめて明解に現われた。すなわち推定誤差は、ノイズが小さいほど小さかった。特に、平面的相関構造を考慮しノイズが零の場合 (ケース I-2-W0TON0), 推定値は真値にきわめて近くなっている。

b) 事前情報を考慮した場合 (シリーズ II)

表一2 にシリーズ II の計算ケースおよびその結果を示した。このシリーズでは観測井戸の配置を W0 と W4 (図一5(a) 参照) の 2 通りとした。W0 はかなり密に観測井戸が配置されている場合であり、W4 はきわめて粗な場合である。以上のもとでさらに事前分布の平均値が真値より相対的に隔たった P0, P1, P2, P3 と、接近した P0', P1', P2', P3' の 2 つに大別した (表一2 脚注参照)。また事前分布の共分散については、表一2 脚注に示すように、P0, P0' では無情報、P1, P1' では log T や log S の標準偏差が 1.0 (すなわち T や S の一桁)、P2, P2' は P1, P1' で設定した標準偏差の 2 割の値とした。また P3, P3' では、パラメーター間に若干の相互相関を考慮した。このシリーズの推定ではすべてのケースで、水頭観測値の平面的相関構造をシリーズ I-2 と同様に考慮している。

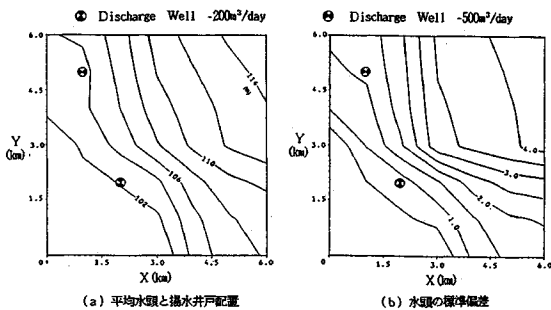


図-6 2つの井戸から揚水した場合の水頭分布の予測(W0T0N 1 P0'によるパラメーターの推定値を入力とする場合)

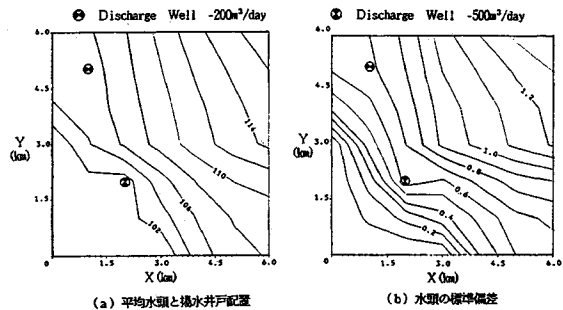


図-7 2つの井戸から揚水した場合の水頭分布の予測(W0T0N 1 P2'によるパラメーターの推定値を入力とする場合)

件下における水頭分布の予測を確率有限要素法に基づいて行った。新しく設けた条件は、パラメーター推定時の滞水層中央部からの揚水をやめ、図-6に示すような2か所の井戸からそれぞれ200 m³/dayと500 m³/dayの揚水を行うものである。図-6に、ケースII-1-W0T0N 1 P0'で推定したパラメーター値を入力した場合の定常平均水頭分布予測およびその標準偏差の分布を、図-7にケースII-1-W0T0N 1 P2'の結果を同様に示した。両者の平均水頭分布は類似しているが、パラメーターの推定分散の小さい図-7のケースでは、予測値の分散(=標準偏差)も小さいことがわかる。このほか、確率有限要素法より、各節点における経時的な平均水頭変化およびその不確実性の推移を知ることができる。図-8に図-6のケースに対応した、節点11と33における経時的な平均水頭変化の予測値およびその標準偏差を示した。

5. 結 論

本研究では、地下水水理解析における逆解析の問題を、観測結果と事前情報に基づいたパラメーター推定とその不確実性の評価、さらにこれを入力とする予測という一貫したシステムとして不確実性を定量的に捉える手順を示した(図-1)。このため特に事前情報の役割、推定パラメーターの定量的な不確実性評価法、およびこのような不確実性が予測値に与える影響の計算法について述べ、計算例によって上記の点を例示した。得られた主な

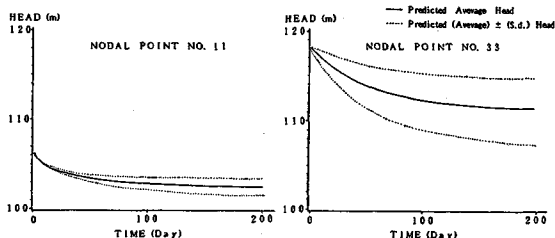


図-8 節点11および33における予測水頭の経時変化およびその不確実性(W0T0N 1 P0'におけるパラメーター推定値を入力とした場合)

結論は以下のとおりである。

- (1) 水頭観測結果、事前情報に基づきパラメーターを推定し、これを入力として不確実性を含め将来の地下水環境を予測する手法を、1つのシステムとして提案できた。
- (2) 例題を通じて、観測井戸の数と分布、観測頻度、雑音の大小などが、パラメーター推定に与える影響について調べ、推定誤差がそれらの影響を明確に反映することを示した。
- (3) 提示した例題の範囲では、事前情報はパラメーターの(平均値の)推定よりも、その不確実性の評価において重要な役割を果たした。すなわち、より現実的な推定共分散マトリックスを与えた(しかし、他の問題では事前情報はパラメーターの推定それ自身においても、重要な場合があると考えられる)。
- (4) 確率有限要素法は、パラメーターの不確実性の予測への影響を評価するうえで有効な方法であることが示された。

残された最も大きな問題点は、本文の中でもたびたび述べたように、最適モデルの選択法に関するものである。そのような方法をこの研究で示した解析手順の中に組み込むことにより、本方法は地下水挙動を予測するうえでより有用な方法となると考えられる。

付録A 随伴状態法による $\partial J / \partial u^T$ の計算法

随伴状態法(adjoint state method)は、最初石油工学の分野で応用が始まった方法であるが、地下水の逆解析の問題にはNeumanによって導入された¹²⁾。この方法は通常変分法を用いて定式化されているが、ここでは、Townleyに従い式(2)、(3)で与えられた隔散形のまま、ラグランジェの未定乗数法に準拠した方法により定式化を行う¹⁾。

等式制約条件下で、ある目的関数の最小化を行うのがラグランジェの未定乗数法である。いまここで式(3)を最小化する問題を、形式的に式(2)の等式制約条件

下で式(3)を最小化する問題であるとみなす。こうすることにより、形式的に \underline{u} と \underline{h} が独立の変数であるとみることができる。いまこの定式化に従って問題を書くと、

$$L = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^K (\underline{h}^k - \underline{h}^{*k})^T (\rho_{ki} \mathbf{V}_k)^{-1} (\underline{h}^i - \underline{h}^{*i}) + (\underline{u} - \underline{u}^*)^T \mathbf{V}_u^{-1} (\underline{u} - \underline{u}^*) + \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda^k)^T [C^k(\underline{u}) \underline{h}^{k+1} - D^k(\underline{u}) \underline{h}^k - f^k(\underline{u})] \dots (A.1)$$

ここに、 λ^k はラグランジェ乗数である。式(A.1)は形式上書かれたもので、式(A.1)の第3項は必ず零となり、 J と L は一致する。したがってまた、式(A.1)の λ^k は任意の定数をとり得る。 L を連続で滑らかな関数であると仮定すれば、これを \underline{u} と \underline{h} について全微分できる。

$$dL = (\partial L / \partial \underline{h}^T) d\underline{h} + (\partial L / \partial \underline{u}^T) d\underline{u} \dots (A.2)$$

式(A.2)は任意の λ^k について成り立つので、 λ^k を調整して式(A.2)の第1項が零になる条件を求めることができる。この条件は λ^k が次の連立方程式を満たすことである。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^{k-1})^T C^{k-1}(\underline{u}) + \sum_{i=0}^K (\underline{h}^i - \underline{h}^{*i})^T (\rho_{ki} \mathbf{V}_k)^{-1} &= 0 \\ (\lambda^{k-1})^T C^{k-1}(\underline{u}) - (\lambda^k)^T D^k(\underline{u}) & \\ + \sum_{i=0}^K (\underline{h}^i - \underline{h}^{*i})^T (\rho_{ki} \mathbf{V}_k)^{-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (A.3)$$

(for $k=1, \dots, K-1$)

式(A.3)を解いて式(A.2)の $d\underline{h}$ に関する項が消去できるような λ^k が求まる。式(A.3)は式(2)ときわめて類似した形をしている。しかし式(A.3)は後退形をしており、まず式(A.3)の第1式を解いて λ^{k-1} を求めた後、時刻をさかのぼって λ^k ($k=K-2, \dots, 0$) を求めていくことになる。以上の λ^k を式(A.2)に代入すると、

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{u}^T} = \frac{\partial L}{\partial \underline{u}^T} = 2(\underline{u} - \underline{u}^*)^T \mathbf{V}_u^{-1} + \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda^k)^T \frac{\partial}{\partial \underline{u}^T} \cdot [C^k(\underline{u}) \underline{h}^{k+1} - D^k(\underline{u}) \underline{h}^k - f^k(\underline{u})] \dots (A.4)$$

すなわち、 \underline{u} における J の偏微分 $\partial J / \partial \underline{u}^T$ は、式(2)と式(A.3)を1回ずつ解き、付加的な計算、式(A.4)を行えば、求めることができる。

なお、式(A.1)を注意してみればわかるように、この方法では等式制約条件が式(2)で与えられるのであれば、目的関数は J に限らず任意の関数に対して成り立つ。すなわち式(4)に示した感度行列を随伴状態法によって求めるときの定式化も、以上の方法と全く同様に行うことができる。

謝 辞：本研究遂行にあたりお世話になった、基礎地盤コンサルタンツ(株)阪上最一氏、日本大学理工学

部 長尾義三教授、竹澤三雄教授に深謝の意を表します。また計算は日本大学理工学部卒業生 安藤 学君、中谷秀樹君の援助を得ましたので、ここに合わせて謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Townley, L.R. : Numerical Models of Groundwater Flow : Prediction and Parameter Estimation in the presence of Uncertainty, MIT Ph.D. thesis, 1983.
- 2) Carrera, J. and Neuman, S.P. : Estimation of Aquifer Parameters Under Transient and Steady Conditions : 1, 2&3, WRR 22(2), pp.199-242, 1986.
- 3) Cooley, R.L., Konikow, L.F. and Naff, R.L. : Nonlinear-Regression Groundwater Flow Modeling of a Deep Regional Aquifer System, WRR 22(13), pp.1759-1778, 1986.
- 4) 大西有三・井尻裕二：不均質地盤における浸透流の逆解析手法に関する基礎的研究，土木学会論文集，第376号/Ⅲ-6, 1986.
- 5) 青木一男・嘉門雅史：不均質地盤における滞水層定数の同定について，土木学会論文集，第382号/Ⅲ-7, 1987.
- 6) Kitamura, S. and Nakagiri, S. : Identifiability of spatially varying and constant parameters in distributed system of parabolic type, SIAM J. Contr. Optimiz., 15(5), pp.785-802, 1977.
- 7) Huyakone, P.S. and Pinder, G.F. : Computational Methods in Subsurface Flow, pp.473, Academic Press Inc., 1983.
- 8) Freeze, R.A. : A Stochastic-Conceptual Analysis of One-Dimensional Groundwater Flow in Nonuniform Homogeneous Media, WRR 11(5), pp.725-741, 1975.
- 9) Yeh, W. W-G. : Review of Parameter Identification Procedure in Groundwater Hydrology : The Inverse Problem, WRR 22(2), pp.95-108, 1986.
- 10) Cooley, R.L. : Incorporation of Prior Information on Parameters into Nonlinear Regression Groundwater Flow Models, WRR 18(4), pp.965-976, 1982.
- 11) Luenberger, D.G. : Linear and Nonlinear Programming (2nd. ed.), pp.491, Addison-Wesley Publishing Co., 1984.
- 12) Neuman, S.P. : A Statistical Approach in the Inverse Problem of Aquifer Hydrology 3, WRR 16(2), pp.331-346, 1980.
- 13) Vecchia, A.V. and Cooley, R.L. : Simultaneous Confidence and Prediction Intervals for Nonlinear Regression Models with Application to a Groundwater Flow Model, WRR 23(7), pp.1237-1250, 1987.
- 14) Sager, B. : Galerkin Finite Element Procedure for Analyzing Flow Through Random Media, WRR 14(6), pp.1035-1044, 1978.
- 15) Dettinger, M.D. and Wilson, J.L. : First Order Analysis of Uncertainty in Numerical Models of Groundwater Flow, WRR 17(1), pp.149-161, 1981.

(注) WRR : Water Resources Research

(1988. 4. 18・受付)