

三次元挙動をする複合地盤の二次元有限要素解析法

A TWO-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT METHOD FOR COMPOSITE GROUND UNDER THREE-DIMENSIONAL DEFORMATION

石崎 仁*・松岡 元**・中井照夫***

By Hitoshi ISHIZAKI, Hajime MATSUOKA and Teruo NAKAI

In order to analyze the clay layer improved by sand piles, called the 'composite ground', a numerical method is proposed using the special plane strain element whose degree of freedom is reduced to two for each nodal point by constraint conditions. The three-dimensional behavior of the composite ground under plane strain condition can be analyzed by the two-dimensional FEM code using the proposed element. This element is also extended to analyze the coupled problem of flow in the ground such as 'vertical drain', which takes the stiffness of the drain into account. The proposed finite element method for the composite ground is checked by comparing the computed values with the three-dimensional analytical results as elastic and elasto-plastic materials.

Keywords : composite ground, three-dimensional problem, FEM

1. まえがき

軟弱地盤の代表的な改良工法である「サンドコンパクション工法」や「深層混合処理工法」は、原地盤より剛性、強度の高い材料を地盤中に圧入したり、固化材により部分的に固結させることによって、“複合地盤”を形成し、沈下量の低減や地盤支持力の増加を図る工法である。これらの工法で最もよく行われている改良形状の1つが、“杭状改良”である。しかし、杭状改良された地盤は、道路盛土や堤防などの帯状荷重を受ける場合でも、三次元的な変形挙動をする。たとえば、図-1に示すように、改良杭が格子状に配列されている地盤に帯状荷重が作用する場合を考える。この場合、荷重長手方向(Z軸)に直交する杭列(図-1で、X軸に平行な杭列)の列間中心では平面ひずみ状態に近いと考えられる。すなわち、平面図X-Z(図-2)でみると、X軸に平行な杭列の列間中心(図中斜線部)のZ方向変位は0である。しかし、改良杭はたとえば、図中の破線で示すような変

形をする。このようなX-Z平面内の変形は、改良杭と原地盤土の応力分担に大きく影響するので、杭状改良さ

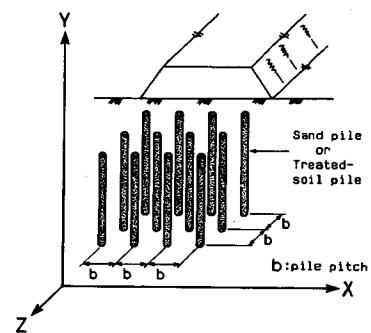


図-1 帯状荷重を受ける杭状改良地盤

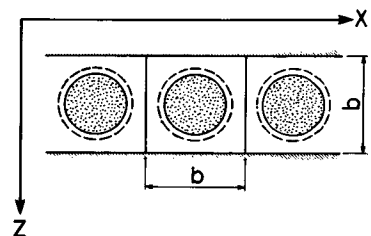


図-2 改良杭の平面内変形の一例

* 正会員 工修 住友セメント(株)セメント・コンクリート技術開発センター(〒274 船橋市豊富町581)

** 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科(〒466 名古屋市昭和区御器所町)

*** 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科(同上)

れた地盤の解析を妥当に行うためには、この改良杭の平面内変形を考慮する必要がある。そのためには、三次元解析が必要となるが、一方、改良領域外では二次元平面ひずみ解析で十分である。実施工では、荷重が作用する部分（たとえば、盛土下）だけを改良するという場合が多いが、解析にあたっては改良領域外のある程度離れた部分も解析領域としなければならない。改良杭の平面内変形を考慮するために、本来二次元解析で十分な改良領域外も含めて三次元解析するのは不経済である。本研究では、基本的には三次元有限要素解析であるが、いくつかの仮定により二次元要素と同様に扱えるようにした「複合要素」を提案し、その解析方法と妥当性について述べる。また、ここで提案する「複合要素」が、サンドコンパクション工法のように改良杭（砂杭）の排水（ドレーン）効果を期待する場合を含めて適用できることも示す。

2. 「複合要素」の提案

改良杭径 a 、影響径（図—1 の杭列間隔に等しい） b とする杭状改良単位を、図—3 のように 5 個の三次元有限要素から成る要素組で表わすとしてしよう。図中の中心要素（薄墨の 4 角柱）は改良杭、その他の周辺要素は原地盤土に対応する。一般に改良杭は円柱状であるが、ここでは要素分割を簡単にするために 4 角柱とした。周辺要素の中間節点（図—3 の節点番号 9~12, 21~24）は、要素内の応力、ひずみ分布を精度よく計算するために設けている。図—3 の 5 個の要素で形成された要素組全体の節点数は 24、自由度は 72（=24×3）であるが、次に示すように、いくつかの変形モードを拘束することによって、自由度を 24 に減らすことができる。

まず、図—4 の平面図（図中の破線は変形後の形状を示す）から、 X, Z 変位に以下の拘束条件を与える。なお、 u_i, v_i, w_i は、節点 i の X, Y, Z 方向変位を表わす。

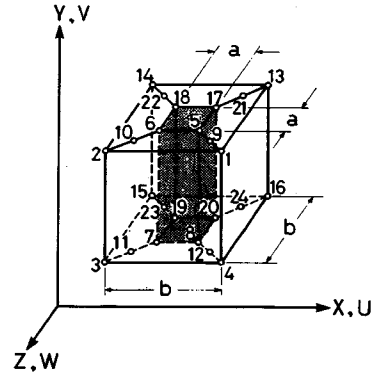
- ① Z 方向の外側は平面ひずみである。
 $w_1 \sim w_4 = 0, w_{13} \sim w_{16} = 0$(1)

- ② 平面中心 A-A に対して対称運動をする。
 $u_{i+12} = u_i, w_{i+12} = -w_i$(2)
- ここに、 $i = 1 \sim 12$ である。

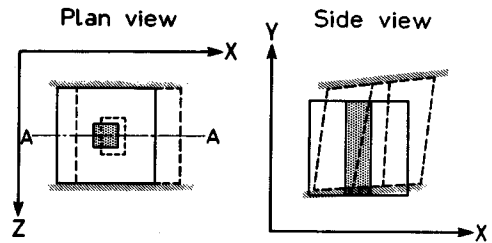
次に、図—4 の側面図から Y 方向変位を以下のように拘束する。

- ③ XY 平面では平面運動をする。
 $v_{i+12} = v_i$(3)
- ここに、 $i = 1 \sim 12$ である。

- ④ 要素組内の Y 変位は線形分布とする。たとえば、節点 5~8 の Y 変位 $v_5 \sim v_8$ は次式で表わされる。
 $v_5 = \xi_0 \cdot v_1 + (1 - \xi_0) \cdot v_2, v_6 = (1 - \xi_0) \cdot v_1 + \xi_0 \cdot v_2$
 $v_7 = \xi_0 \cdot v_3 + (1 - \xi_0) \cdot v_4, v_8 = (1 - \xi_0) \cdot v_3 + \xi_0 \cdot v_4$



図—3 「複合要素」の要素組構成
 (U, V, W は X, Y, Z 方向の変位)



図—4 平面、側面内の変形モードの拘束

.....(4)

ここに、 $\xi_0 = (1 + a/b)/2$ である。節点 9~12 の Y 変位 $v_9 \sim v_{12}$ は、式 (4) で $\xi_0 = (3 + a/b)/4$ とすればよい。式 (1), (2) より X 変位は節点 1~12 の変位で、 Z 変位は節点 5~12 の変位で表わされる。また、式 (3), (4) から節点 1~4 以外の Y 変位は、節点 1~4 の Y 変位 $v_1 \sim v_4$ の一次従属となる。以上から、要素組全体の変位は、節点 1~12 の変位で表わされる。このうち、節点 1~4 は、 X, Y 変位、節点 5~12 は X, Z 変位となり、要素組全体の自由度は $24 (=12 \times 2)$ となる。

具体的な自由度の低減は以下のように行う。まず、要素組（5 個の三次元要素）の剛性方程式を組み立てる。この場合の剛性方程式は、次式で与えられる。

$$[K]\{\delta\} = \{f\} \text{.....(5)}$$

ここに、 $[K]$ は剛性マトリックスである。また、 $\{\delta\}$ 、 $\{f\}$ は、節点変位、荷重ベクトルで、次のように表わされる。

$$\{\delta\} = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_{24}, v_{24}, w_{24}\}^T$$

$$\{f\} = \{f_{x1}, f_{y1}, f_{z1}, \dots, f_{x24}, f_{y24}, f_{z24}\}^T$$

ここに、上添字 T は転置を表わす。次に、変位拘束条件式を座標変換を用いて表わす。たとえば、節点 5~6 の Y 変位 $v_5 \sim v_6$ の場合は、次式のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \xi_0 & 1-\xi_0 & 1 & 0 \\ 1-\xi_0 & \xi_0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -\xi_0 \cdot v_1 - (1-\xi_0) \cdot v_2 + v_3 \\ -(1-\xi_0) \cdot v_1 - \xi_0 \cdot v_2 + v_6 \end{Bmatrix} = [T] \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3' \\ v_6' \end{Bmatrix} \dots\dots (6)$$

式(1)~(4)のすべての変位拘束条件を同様の操作で表わしてやると、要素組の全節点変位(72自由度)に対する座標変換マトリックス[T]が求まる。したがって、式(5)は次式のように座標変換される。

$$[T]^T [K] [T] \{\delta\} = [T]^T \{f\} \dots\dots (7)$$

ゆえに、実際に計算する剛性方程式は、次式となる。

$$[K'] \{\delta'\} = \{f'\} \dots\dots (8)$$

ここに、 $[K'] = [T]^T [K] [T]$ 、 $\{f'\} = [T]^T \{f\}$ 、 $\{\delta'\}$ は変形された変位ベクトルである。式(1)の $w_1 \sim w_4$ 、 $w_{13} \sim w_{16}$ や式(6)の v_3' 、 v_6' などは、0であるから、それらに対応する行列成分は式(8)から削除できる。結局、式(8)は24自由度となって、全体剛性方程式に加算されることになる。

上記の自由度を低減した要素組の各節点自由度は2であるから、二次元要素と同様に取り扱うことができる。本研究で提案する「複合要素」とは、上記の要素を図5のように12節点二次元要素として扱うもので、既存の二次元FEMプログラムに容易に組み込むことができる。

ここで、「複合要素」が単なるサブストラクチャー解析ではないことに注意しなければならない。要素ごとに縮約が行われる場合、縮約された変位は浮動変位となり、隣接要素の変位と適合条件を満たさない。したがって、たとえば、改良杭の変位が要素境界面で不連続になるなどの不合理な結果を生ずる。サブストラクチャー解析で、このような不合理を避けるためには、図3の要素組に対して縦に連なるすべての要素組の剛性方程式を組み立てた後に、節点変位を縮約しなければならない。その場合、三次元有限要素の剛性方程式であるから、記憶容量

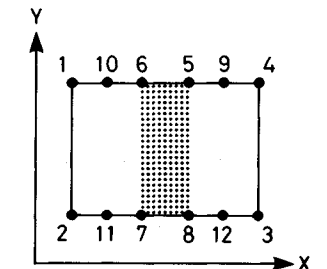


図-5 「複合要素」の二次元要素表示

や縮約に要する演算時間は多大なものとなる。ここで提案する「複合要素」は、要素組ごとの剛性方程式が組み立てられた時点で、上記の問題点が処理されるようになっていく。

なお、図3に示す杭状改良単位を従来の三次元有限要素法で解析すると、24節点72自由度となり、ここで提案している「複合要素」(12節点24自由度)の3倍である。すなわち、未知数が3倍になるが、さらにバンド幅も3倍になるので、三次元有限要素法における全体剛性方程式の記憶容量は、本提案法のほぼ9(=3×3)倍になる。全体剛性方程式を解くのに要する時間は、記憶容量に比例するので、本提案法の演算時間は三次元有限要素法に比べ約1/9になる。

3. 「複合要素」の連成圧密問題への適用

サンドコンパクション工法のように改良杭に砂杭を用いる場合には、砂杭の排水(ドレーン)効果により間隙水圧がすみやかに消散し、圧密沈下が促進される。このような場合、しばしば、圧密解析として“パーチカルドレーン解析”が用いられる。しかし、砂杭の置換率が大きい場合は、ドレーン材(砂杭)の剛性を無視できない。そこで、「複合要素」を“ドレーンの剛性を考慮したパーチカルドレーン解析”ができるように連成圧密問題へ拡張する。まず、「複合要素」内の間隙水圧について、次の仮定を行う。

- ① 砂杭には間隙水圧は生じない。
 - ② 原地盤土の間隙水圧は、平均間隙水圧で取り扱う。
- 仮定①、②より、連成方程式における体積変換マトリックス[L]は、砂杭以外の周辺要素で形成されることになる。次に、間隙水圧の消散(連続の式)について考える。関口ら¹⁾は、“ドレーンの剛性を考慮しないパーチカルドレーン解析”に対して、「マクロ・エレメント法」を提案している。一般に、パーチカルドレーン法では図

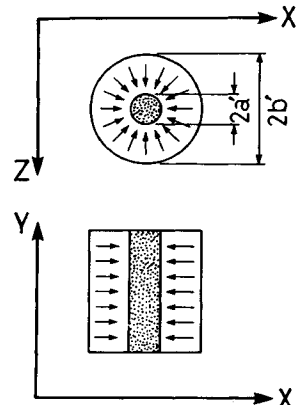


図-6 パーチカルドレーンの排水状態

—6に示すように、原地盤土からドレーン材（砂杭）に向かって放射状に排水するので、軸対称問題として考えることができる。

そこで、「マクロ・エレメント法」では、間隙水圧の形状関数 $u(r)$ を次式で与えている（図—7参照）。

$$u(r) = u^* \cdot \left\{ \ln\left(\frac{r}{a'}\right) - \frac{r^2 - a'^2}{2b'^2} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

式（9）、図—6,7の a', b' を $\sqrt{\pi}$ 倍したものが、図—3の a, b に対応することに注意しよう（図—3の「複合要素」の改良杭，原地盤土と図—6のドレーン，原地盤土の平面面積を等価する）。本研究でも，式（9）を用いるが，間隙水圧は原地盤土だけに生ずるから，「マクロ・エレメント法」での平均間隙水圧 \bar{u} と代表間隙水圧 u^* との関係式は，次式のように修正される。

$$\bar{u} = \frac{\int_a^b 2\pi r \cdot u(r) dr}{\pi(b^2 - a^2)} = F(n') \cdot u^* \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $F(n') = \frac{n'^2}{n'^2 - 1} \left\{ \ln(n') - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n'^2} \right) \left(3 - \frac{1}{n'^2} \right) \right\}$ ， $n' = b'/a'$ である。後の操作は，「マクロ・エレメント法」¹⁾ とすべて同じである。

4. 「複合要素」の妥当性の検証

ここでは、「複合要素」の妥当性を杭状改良地盤の一次元圧密解析により検討する。杭状改良地盤の“一次元圧密”とは，以下の変形状態にあることをいう。

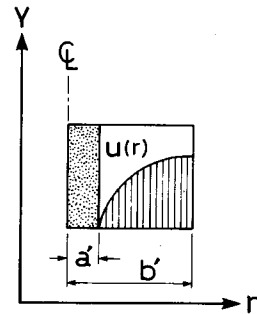
① 改良杭，原地盤土とも鉛直方向（図—3では Y 方向）には，均等な変形（等ひずみ）をする。

② 原地盤土の影響境界では，水平方向に変形しない（図—3の節点1—4，13—16の X, Z 変位は0である）。

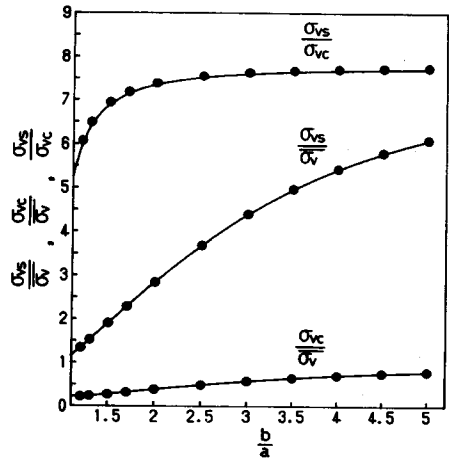
したがって，改良杭は原地盤土との境界で平衡条件を満足しながら，水平方向には自由に変形できる。材料特性は，改良杭，原地盤土とも等方線形弾性体とし，改良杭と原地盤土の縦弾性係数比 $E_s/E_c = 10$ ，ポアソン比は両者とも $\nu = 0.3$ とした。なお，本論文中では，応力，ひずみとも圧縮を正とする。

(1) 排水解析

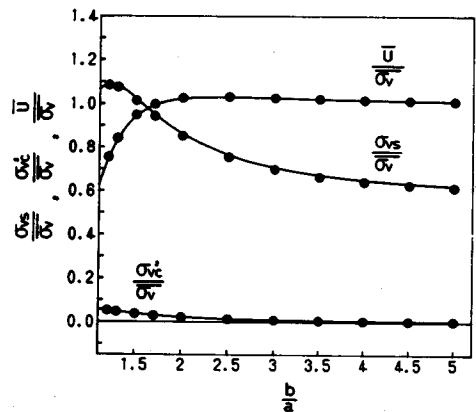
図—8は，排水状態（間隙水圧が発生しない）での，一次元圧密時の改良杭径と影響径の比 b/a と平均圧密応力 $\bar{\sigma}_v$ で無次元化した改良杭，原地盤土の鉛直応力 $\sigma_{vs}/\bar{\sigma}_v$ ， $\sigma_{vc}/\bar{\sigma}_v$ および改良杭と原地盤土の応力分担比 σ_{vs}/σ_{vc} の関係である。図中の実線は理論解（付録参照），プロットは「複合要素」の計算値であるが，両者はよく一致している。ここで平均圧密応力 $\bar{\sigma}_v$ は，杭状改良単位（図—3）の平面（図—3の節点1，2，13，14で囲まれる面）に作用する鉛直荷重をその平面面積で除したものである。



図—7 原地盤土内の間隙水圧分布



図—8 径比 b/a ~改良杭，原地盤土の鉛直応力，応力分担比関係



図—9 径比 b/a ~改良杭，原地盤土の鉛直有効応力，間隙水圧関係

(2) 非排水解析（砂杭部は排水状態）

ここでは，改良杭は排水状態，原地盤土は非排水状態にある場合の一次元圧密を解析する。この解析では，原地盤土は非排水状態であるから，原地盤土内に間隙水圧が生ずる。図—9は，改良杭径比 b/a と平均圧密応力

$\bar{\sigma}_v$ で無次元化した改良杭の鉛直応力 $\sigma_{vs}/\bar{\sigma}_v$ 、原地盤土の鉛直有効応力 $\sigma'_{vc}/\bar{\sigma}_v$ 、間隙水圧 $\bar{u}/\bar{\sigma}_v$ の関係である。この場合でも、理論値(実線, 付録参照)と「複合要素」による計算値(プロット)はよく一致しているのがわかる。

(3) 連成圧密解析

ここでは、原地盤土部が非排水状態で載荷された後、間隙水圧が消散する過程での一次元圧密を解析する。この解析では、原地盤土の透水係数 $k=0.001$ m/day (体積圧縮係数 $m_v=1/E_c=0.01$ m²/tf とした場合、水平方向圧密係数 $C_h=k/(\gamma_w \cdot m_v)=0.1$ m²/day となるように k を設定した)、影響径 $b=1$ m (図-6 のドレーン影響半径 $b'=1/\sqrt{\pi}$ m) として計算している。図-10 は、改良杭径比 $n(=b/a)=1.5, 2, 3, 5$ の場合の圧密度 $1-\bar{u}/\bar{u}_0$ と時間の関係を示している。連成圧密解析においても、理論解(実線, 付録参照)と「複合要素」の計算値(プロット)の間にはよい一致がみられる。

以上、(1)~(3)の結果より、弾性問題では、「複合要素」は、排水、非排水、連成圧密のいずれの場合の解析でも、精度上の問題なく解析できることがわかる。

5. 材料非線形問題への適用

実際の地盤材料は、弾塑性的な挙動を示すが、その材料特性の中で特徴的なものに、“摩擦則”と“ダイレタンシー”がある。改良地盤の解析を妥当に行うには、最低限、地盤材料の応力~ひずみ関係が、上記の特性を表現できなければならない。ここでは、改良杭として“砂杭”，原地盤土として“粘土”を想定し、砂杭には SMP* モデル²⁾，粘土には t_{ij} -clay モデル³⁾ を用いる。これらのモデルは、三次元応力下における上記の特性をよく表現できる弾塑性構成式である。計算に用いる材料パラメーターは、砂杭は豊浦砂(密詰め)，粘土は藤の森粘土に対するものを用いる(文献2,3)参照)。

ここでも、一次元圧密解析により「複合要素」の材料非線形問題への適用性について検討する。この場合、材料非線形性より解析解は得られないので、粘土部を細分割(5分割)した軸対称 FEM 解析結果を理論解とみなして「複合要素」の妥当性を調べる。なお、初期応力は、砂杭、粘土とも鉛直方向 $\bar{\sigma}_{v0}=1$ kgf/cm²(98 kN/m²)，水平方向 $\bar{\sigma}_{h0}=0.5$ kgf/cm²(49 kN/m²) として計算している。また、以下の文中では、できるだけ応力を初期鉛直応力 $\bar{\sigma}_{v0}$ で除した無次元応力を用いて説明する。これは、応力経路は初期応力の大きさに相似的に変化するので、無次元化すると $\bar{\sigma}_{h0}/\bar{\sigma}_{v0}$ が同じであれば、すべての初期応力からの応力変化を统一的に説明できるからである。

(1) 排水解析

一次元圧密問題では、砂杭は三軸圧縮あるいは伸張応

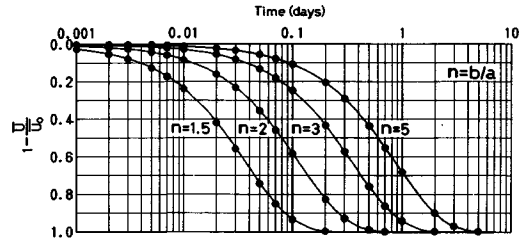


図-10 圧密度~時間関係

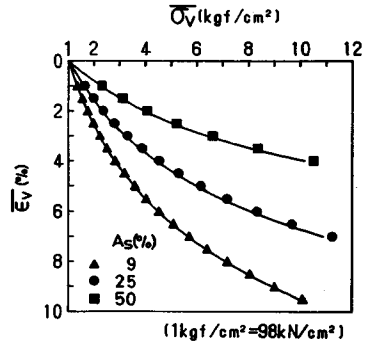


図-11 平均圧密応力~鉛直ひずみ関係

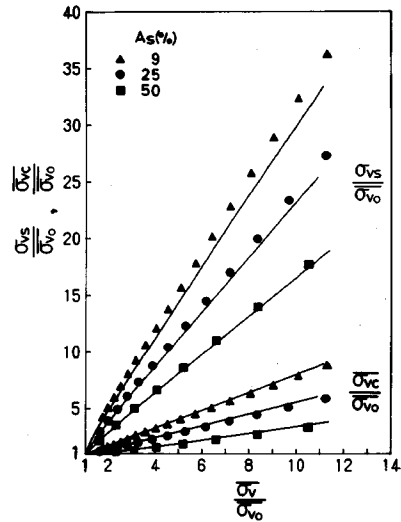
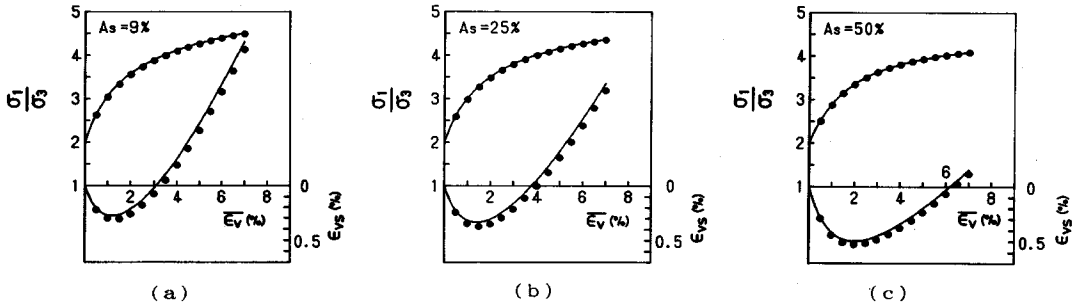


図-12 平均圧密応力~砂杭, 粘土の鉛直応力関係

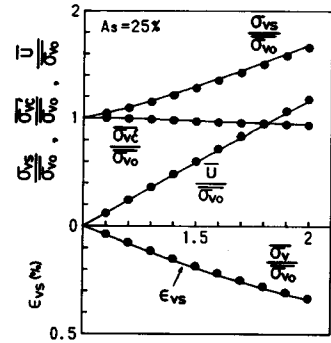
力状態にあり、砂杭内の応力は一様である。しかし、粘土部の応力は半径方向に変化するから、弾塑性モデルで計算する場合は、粘土部の剛性も半径方向に異なる。このことから、粘土部の半径方向の厚さは、解析の精度に影響を及ぼすことが予想される。ここでは、砂杭の置換率 $A_s(=(a/b)^2)$ を変化させることによって、上記の問題点を検討する。図-11 は、置換率 $A_s=9, 25, 50$ % のときの平均圧密応力 $\bar{\sigma}_v$ と鉛直ひずみ $\bar{\epsilon}_v$ の関係である。図中の実線は軸対称 FEM 解、プロットは「複合



図一13 置換率別の砂杭の最大・最小主応力比～鉛直ひずみ～体積ひずみ関係

要素」による計算値であるが、両者は各置換率ともよく一致している。図一12は、無次元化された平均圧密応力 $\bar{\sigma}_v/\bar{\sigma}_{v0}$ と砂杭の鉛直応力 $\sigma_{vs}/\bar{\sigma}_{v0}$ 、粘土部の平均鉛直応力 $\bar{\sigma}_{vc}/\bar{\sigma}_{v0}$ の関係を示している。同図より各置換率とも、「複合要素」(プロット)の砂杭の鉛直応力 $\sigma_{vs}/\bar{\sigma}_{v0}$ は、軸対称 FEM 解(実線)より多少大きく、粘土部の平均鉛直応力 $\bar{\sigma}_{vc}/\bar{\sigma}_{v0}$ は多少小さく計算されるものの、砂杭と粘土の応力分担を妥当に表わしている。ここに、「複合要素」と軸対称 FEM 解の差は、以下の理由により生じる。「複合要素」では、改良杭(砂杭)要素に1次要素、周辺(粘土)要素に2次要素を用いているが、1次要素は2次要素に比べて剛性(マトリックスの固有値の和)が大きくなるため、砂杭の応力が大きめに計算されるということである。また、同図より置換率 A_s が小さいほど、両者の差は大きくなっている。これは、置換率が小さいほど粘土部の半径方向の厚さが大きくなるため、場所的な応力変化を十分に表現できなくなるからであるが、置換率が小さくなるほど、砂杭の複合地盤全体に対する剛性の寄与は少なくなるから、これらの差は実質的には問題ないと思われる。また、このことは図一11の荷重～沈下関係からも明らかである。

図一13は、置換率別の砂杭の最大・最小主応力比 σ_1/σ_3 と鉛直ひずみ $\bar{\epsilon}_v$ と体積ひずみ ϵ_{vs} の関係を示している。各置換率とも、主応力比 σ_1/σ_3 と鉛直ひずみ $\bar{\epsilon}_v$ 関係では、「複合要素」の計算値(プロット)と軸対称 FEM 解(実線)はよく一致しているが、体積ひずみ ϵ_{vs} は「複合要素」の方が軸対称 FEM 解よりやや圧縮側に計算されている。これは、前述したように砂杭要素の応力が大きめに計算されるため、「圧密(σ_m)の変化」による体積ひずみ成分が大きき計算されるからであるが、体積ひずみが“圧縮から膨張に転ずる”という砂特有のせん断特性をよく表現している。また、複合地盤全体は圧縮しているのに、砂杭が体積膨張(ダイレタンス)をするという現象は、図一3のように砂杭を要素モデル化しているから可能なのであって、複合地盤全体を等価な変形をするように材料パラメータをフィッ



図一14 平均圧密応力～砂杭、粘土の鉛直有効応力、間隙水圧～砂杭の体積ひずみ関係

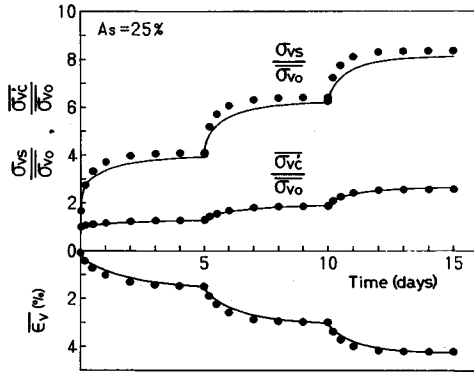
ティングさせる解析では表現できない。

(2) 非排水解析(砂杭部は排水状態)

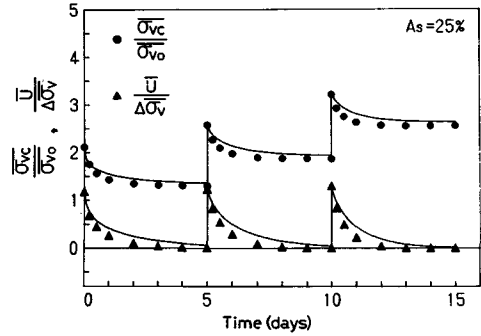
ここでは、置換率 $A_s=25\%$ の場合について述べる。図一14は、無次元化された平均圧密応力 $\bar{\sigma}_v/\bar{\sigma}_{v0}$ と砂杭の鉛直応力 $\sigma_{vs}/\bar{\sigma}_{v0}$ 、粘土部の平均鉛直有効応力 $\bar{\sigma}'_{vc}/\bar{\sigma}_{v0}$ 、平均間隙水圧 $\bar{u}/\bar{\sigma}_{v0}$ と砂杭の体積ひずみ ϵ_{vs} の関係である。この図では、「複合要素」の計算値(プロット)と軸対称 FEM 解(実線)はよく一致している。特に、(1)の排水解析に比べても、砂杭の鉛直応力 $\sigma_{vs}/\bar{\sigma}_{v0}$ 、体積ひずみ ϵ_{vs} の精度がよい。これは、圧密応力の大部分が粘土部の間隙水圧で受け持たれるので、変形を規定する有効応力の誤差が少なくなるためと考えられる。

(3) 連成圧密解析

ここでは、圧密荷重増分 $\Delta\bar{\sigma}_v=1 \text{ kgf/cm}^2(98 \text{ kN/m}^2)$ が瞬間載荷された後、5日間放置するという段階盛土を3回繰り返した場合を考える。粘土の透水係数 $k=0.0005 \text{ m/day}$ (圧密試験より決めた藤の森粘土の平均的な水平方向透水係数)、影響径 $b=1 \text{ m}$ (ドレーンの影響半径 $b'=0.564 \text{ m}$)、置換率 $A_s=25\%$ として計算している。図一15は、無次元化された砂杭の鉛直応力 $\sigma_{vs}/\bar{\sigma}_{v0}$ 、粘土部の平均鉛直有効応力 $\bar{\sigma}'_{vc}/\bar{\sigma}_{v0}$ と鉛直ひずみ $\bar{\epsilon}_v$ の経時(日)変化を表わしている。同図より、砂杭の鉛直応力 $\sigma_{vs}/\bar{\sigma}_{v0}$ は、「複合要素」の計算値(プロット)



図一15 時間～砂杭，粘土の鉛直有効応力～鉛直ひずみ関係



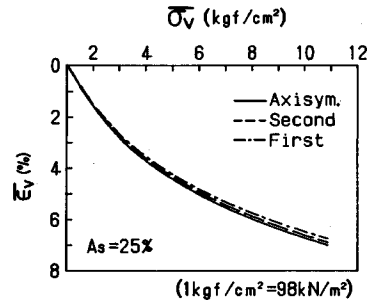
図一16 時間～粘土の鉛直全応力，間隙水圧関係

ト)が軸対称FEM解(実線)より大きくなっているが、これは(1)の排水解析で述べたものと同じ理由による。図一16は、粘土部の平均間隙水圧 $\bar{u}/\Delta\sigma_v$ (圧密荷重増分 $\Delta\sigma_v$ で無次元化している) と平均鉛直全応力 $\bar{\sigma}_{vc}/\sigma_{vo}$ の経時(日)変化である。この場合、平均間隙水圧 $\bar{u}/\Delta\sigma_v$ は、「複合要素」の計算値(プロット)の方が軸対称FEM解(実線)より速く消散している。この解析で、「複合要素」はBarronの等ひずみ理論による間隙水圧分布(式(9))を用いて計算しているのに対して、軸対称FEMは5要素分割のBiotの圧密解析で行われている。したがって、軸対称FEM解では要素間の連続条件が十分満足されているのに対して、「複合要素」では半径方向に1層しか要素分割していないので、場所的な体積変化量が正確に計算されないためと考えられる。この差が、平均鉛直全応力 $\bar{\sigma}_{vc}/\sigma_{vo}$ (図一16)の「複合要素」と軸対称FEM解の差に現われている。しかし、図一15の粘土部の平均鉛直有効応力 $\bar{\sigma}_{vc}/\sigma_{vo}$ や鉛直ひずみ $\bar{\epsilon}_v$ はよく一致しているから、実用的には許容できると思われる。

以上、「複合要素」を材料非線形問題に適用した結果、砂杭の応力や粘土部の間隙水圧の評価に多少の誤差を生ずるが、複合地盤の複雑な変形挙動を簡便かつ妥当に解析できることがわかる。なお、「複合要素」を誘導する際に、構成式や支配方程式を何ら限定していないので、ほとんどすべての応力～ひずみ関係式(ただし、三次元応力下のもの)が使用でき、クリープや動的問題も解析可能である。

6. 「複合要素」の自由度の問題点

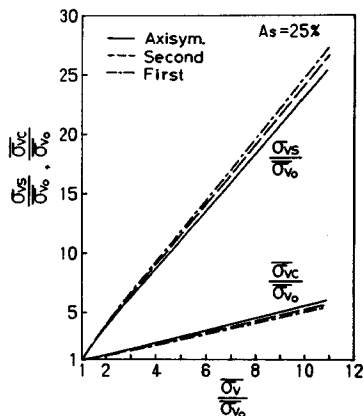
図一3の要素分割において、周辺要素には、ひずみ分布を滑らかにするために中間節点を設けているが、中間節点がなくても改良杭と原地盤土の応力分担などは、同様に計算できる。この場合、中間節点に関する変位拘束を式(1)～(4)から除けば、後の操作(自由度の低減



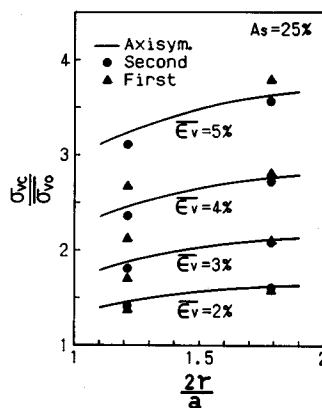
図一17 平均圧密応力～鉛直ひずみ関係

方法)は同じである。最終的に、「複合要素」の変位は節点1～8の変位で表わされるので、自由度は $16(=8 \times 2)$ となり、演算の面ではさらに経済的となる。ここでは、中間節点がある要素を「複合2次要素」、ない要素を「複合1次要素」とよび、精度上の差を一次元圧密(排水)解析の結果から検討する。材料モデル、計算条件は5.と同じであるが、砂杭の置換率 $A_s=25\%$ とする。なお、以下の図一17～19中で、Axisym.は軸対称FEM、Secondは「複合2次要素」、Firstは「複合1次要素」を意味している。

図一17は、平均圧密応力 $\bar{\sigma}_v$ と鉛直ひずみ $\bar{\epsilon}_v$ の関係である。図中の実線は軸対称FEM解、破線は「複合2次要素」、一点鎖線は「複合1次要素」による計算値である。「複合1次、2次要素」の鉛直ひずみ $\bar{\epsilon}_v$ は、軸対称FEM解よりやや小さめに計算され、その差は「複合1次要素」の方が「複合2次要素」より大きい。図一18は、無次元化された平均圧密応力 $\bar{\sigma}_v/\sigma_{vo}$ と砂杭の鉛直応力 σ_{vs}/σ_{vo} 、粘土部の平均鉛直応力 $\bar{\sigma}_{vc}/\sigma_{vo}$ の関係である。図一18の各線は、図一17と同じ計算値に対応している。この図で、「複合1、2次要素」による砂杭の鉛直応力 σ_{vs}/σ_{vo} は軸対称FEM解より大きく、粘土部の平均鉛直応力 $\bar{\sigma}_{vc}/\sigma_{vo}$ は小さく計算されているのは、5.(1)で述べたものと同じ理由によるが、その差は「複合1次要素」の方が「複合2次要素」より大きい。図一



図一18 平均圧密応力～砂杭，粘土の鉛直応力関係



図一19 正規化半径～粘土の鉛直応力関係

17, 18 にみられる「複合1次要素」と「複合2次要素」にみられる差の原因は次のように考えられる。「複合1次要素」では、周辺要素も1次要素（中間節点がない）なので、ひずみ分布が場所的に滑らかに変化しないためによる。このことは、図一19の粘土部の応力分布図をみればさらに明らかになる。同図は、鉛直ひずみ $\bar{\epsilon}_v=2, 3, 4, 5\%$ のときの粘土部内の鉛直応力 σ_{vc}/σ_{vc} の半径方向の分布を表わしたもので、図中の実線は軸対称 FEM 解、プロット●は「複合2次要素」、▲は「複合1次要素」の計算結果である。図の横軸 $2r/a$ は、砂杭中心からの半径座標 r を砂杭半径 $a/2$ で除した正規化座標で、図の左端は砂杭と粘土の境界面、右端は影響境界面に対応する。

なお、図中の「複合1, 2次要素」の粘土部の応力値（プロット）は、周辺要素内の2点 Gauss 公式による数値積分点での値である。積分点の全体座標 (X, Y, Z) と r 座標には、 $r = \sqrt{(X - X_0)^2 + (Z - Z_0)^2}$ の関係がある。ここに (X_0, Z_0) は砂杭中心の X, Z 座標で、座標系の取り方は図一3, 4 に示すとおりである。この図より、「複合1次要素」の計算値は、鉛直ひずみ $\bar{\epsilon}_v$ が大きくなるにつれて、軸対称 FEM 解からはずれていくのがわかる。また、実際問題では、改良地盤は“一次元圧密”だけでなく“せん断”変形も生ずるから、応力分布も精度よく計算される必要がある。このようなことを考えれば、自由度は多少増えるものの、「複合2次要素」を用いる方が望ましいが、変形が小さい場合や“一次元圧密”変形が主体であるような場合には「複合1次要素」を用いても十分と思われる。

7. 結 論

本研究では、帯状荷重を受ける杭状改良地盤の解析用に「複合要素」を提案し、その妥当性をマクロな一次元圧密問題について検討したが、以上をまとめると次のよ

うになる。

- (1) 弾性問題では、排水、非排水、連成圧密解析とも「複合要素」による計算値は、理論値とよく一致する。
- (2) 材料非線形問題では、「複合要素」の計算値は、理論値（軸対称 FEM 解）に比べて、改良杭の応力を大きめに、原地盤の応力を小さめに計算する傾向があるが、改良杭、原地盤の個々の変形特性を妥当に表現できる。
- (3) 材料非線形問題の排水解析では、改良杭の置換率 A_s が小さい（原地盤土の半径方向の厚さが大きい）ほど、「複合要素」の計算値と理論値の差が広がるが、複合地盤全体にはあまり影響を及ぼさない。
- (4) 材料非線形問題でも非排水解析では、「複合要素」の計算値は、理論値とよく一致する。
- (5) 材料非線形問題の連成圧密解析では、「複合要素」の間隙水圧の消散、圧密沈下は、理論値より速く進行する傾向がある。
- (6) 「複合1次要素」は「複合2次要素」に比べて、自由度は減るが、応力分布などの計算精度が落ちるので、変形が大きい場合などには取扱いに注意が必要である。

謝 辞：本研究は第1著者が名古屋工業大学大学院博士課程に在学中の研究成果である。日頃ご援助頂いている本学 山内利彦、吉田弥智教授に深謝致します。

付 録

杭状改良地盤の一次元圧密では、改良杭は三軸圧縮あるいは伸張状態にあるが、原地盤土部は相異なる三主応力状態にある。等方線形弾性体の厚肉円筒理論より、原地盤土部の半径方向の変位 $\delta(r)$ は、次式で表わされる。

$$\delta(r) = A_1 \cdot r + A_2 \cdot \frac{1}{r} \dots\dots\dots (A.1)$$

ここに、 A_1, A_2 ：未定定数、 r ：半径座標である。一般

的なケースとして、原地盤土内に間隙水圧が生じている場合を考える。ただし、改良杭は常に排水状態にあるものとする。この場合の平衡条件式は、次の2式となる。

① 鉛直方向のつり合い

$$\frac{1}{n_2} \sigma_{as} + \left(1 - \frac{1}{n_2}\right) (\sigma_{ac} + \bar{u}) = p \quad \text{..... (A.2)}$$

② 改良杭と原地盤土の境界での半径方向のつり合い

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n^2} \bar{E}_s + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \bar{E}_c \\ \bar{E}_s \bar{\nu}_s - \bar{E}_c \bar{\nu}_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{n^2} (\bar{E}_s \bar{\nu}_s - \bar{E}_c \bar{\nu}_c) \\ \bar{E}_s (1 - \bar{\nu}_s) + \frac{n^2}{n^2 - 1} \bar{E}_c \left[1 + \frac{1}{n^2} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \bar{\nu}_c\right] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_a \\ \dots \\ \epsilon_{rs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{n^2} \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \bar{u} = \begin{bmatrix} p \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{..... (A.4)}$$

ここに、 $\bar{E} = \frac{(1-\nu) \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}$

E : 縦弾性係数, ν : ポアソン比, ϵ_a : 軸ひずみ, ϵ_{rs} : 改良杭の半径ひずみである。

次に、原地盤土の間隙水圧の消散による体積変化(連続の式)は、改良杭と原地盤土の境界面を排水境界とすると、ダルシー則から次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_{vc} - \frac{8}{d_e^2} \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u(r)}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad \text{..... (A.5)}$$

ここに、 $\dot{\epsilon}_{vc}$: 原地盤土全体の体積ひずみ速度, k : 透水係数, d_e : ドレーン影響直径, γ_w : 間隙水の単位体積重量, $u(r)$: 間隙水圧である。 $u(r)$ に本文中の式(9)を用い、本文中の式(10)より平均間隙水圧で表わすと、式(A.5)は次式のようになる。

$$\left[1 \quad -\frac{2}{n^2 - 1}\right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_a \\ \dots \\ \dot{\epsilon}_{rs} \end{bmatrix} - \frac{8}{d_e^2} \frac{k}{\gamma_w} \frac{1}{F(n)} \bar{u} = 0 \quad \text{..... (A.6)}$$

式(A.6)の第1項は、 $\dot{\epsilon}_{vc}$ を軸ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_a$ と改良杭の半径ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{rs}$ で表わしている。

したがって、最終的には式(A.4)、(A.6)の連立微分方程式を解けばよいことになる。なお、平均圧密応力 p が時間的に一定の場合には解析的に解け、時刻 t の平均間隙水圧 $\bar{u}(t)$ は次式で表わされる。

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_0 \cdot \exp\left[-\frac{8}{F(n)} T_h\right] \quad \text{..... (A.7)}$$

ここに、 T_h : 時間係数 $T_h = \frac{k}{\gamma_w \cdot m_v} \frac{t}{d_e^2}$

\bar{u}_0 : 初期平均間隙水圧である。 m_v は体積圧縮係数で、次式で計算される。

$$m_v = [C] \cdot [A]^{-1} \cdot [B] \quad \text{..... (A.8)}$$

ここで、 $[A]$ 、 $[B]$ は式(A.4)の左辺第1、2マトリックス、 $[C]$ は式(A.6)の第1マトリックスで、上添字-1は逆マトリックスを意味する。すなわち、体積圧縮係数 m_v を式(A.8)で計算するだけで、Barronの等ひずみ解がそのままの形で使える。平均圧密応力 p が時間的に変化する場合には、式(A.4)、(A.6)を時間に関する差分、あるいはガラーキン法を用いて逐次解い

$$\sigma_{rs} - (\sigma_{rc}(r=a) + \bar{u}) = 0 \quad \text{..... (A.3)}$$

ここに、 n : 径比 $n = b/a$, a : 改良杭径, b : 影響径, p : 平均圧密応力, σ_a : 軸応力, σ_r : 半径応力, \bar{u} : 原地盤土の平均間隙水圧である。なお、以下の文中では、下添字 s, c は改良杭, 原地盤土を表わし、応力は有効応力とする。式(A.2)、(A.3)は、等方線形弾性体の応力~ひずみ関係式(Hookeの式)より、式(A.4)で表わされる。

ていけばよい。

排水解析の場合は、平均間隙水圧 $\bar{u} = 0$ として式(A.4)を、非排水解析の場合は、非排水条件 $\epsilon_{vc} = 0$ の下で式(A.4)を解けばよい。なお、式(A.7)の初期平均間隙水圧 \bar{u}_0 は、非排水解析で得られた平均間隙水圧である。

[注意1] 改良杭と原地盤土の E, ν を同値にして、式(A.7)を計算しても、“ドレーンの剛性を考慮しない”Barronの等ひずみ解に一致しない。それは、改良杭は常に排水状態にあり、間隙水圧は生じないからである。

[注意2] 厳密には、式(A.3)は正しくない。間隙水圧(本文中の式(9))は改良杭と原地盤土の境界で0であるから、改良杭と原地盤土の有効応力だけでつり合わなければならない。そのとき、改良杭との境界付近の原地盤土は、境界面からの圧密排水により、式(A.1)で計算されるものより圧縮側にある。したがって、境界面での原地盤土の実際の半径有効応力は、式(A.4)の第2式第1項で計算されるものより大きな値になる。式(A.3)は、それを、式(A.4)で計算される半径有効応力と平均間隙水圧の和で近似していることになる。Barronの等ひずみ解の矛盾点は、排水は水平方向であるのに、変形は鉛直方向のみに生じ、水平方向には変形しないと仮定している点にある。本研究の圧密解析においても、Barron解の矛盾点はそのまま残っている。

参考文献

- 1) 関口秀雄・柴田 徹・藤本 朗・山口博久: 局部載荷を受けるパーチカル・ドレーン打設地盤の変形解析, 第31回土質工学シンポジウム論文集, pp.111~116, 1986.
- 2) Nakai, T. and Matsuoka, H.: Constitutive equation for soils based on the extended concept of "Spatial Mobilized Plane" and its application to finite element analysis, Soils and Foundations, Vol.23, No.4, pp.87~105, 1983.
- 3) Nakai, T. and Matsuoka, H.: A generalized elastoplastic constitutive model for clay in three dimensional stresses, Soils and Foundations, Vol.26, pp.81~98, 1986. (1987.12.18・受付)