

乱流モデルによる傾斜壁面密度噴流の解析

ANALYSIS OF INCLINED WALL PLUME BY TURBULENCE MODEL

福嶋祐介*

By Yusuke FUKUSHIMA

The similarity solution of inclined wall plume is obtained analytically. The mathematical model used herein consists of the continuity equation of flow, the momentum balance equation in the flow direction, the diffusion equation of concentration, the equation of kinetic energy of turbulence and the equation of viscous dissipation rate of turbulence. It is shown that this set of equations has the similarity solution which can be solved numerically for each angle of the inclined wall. This numerical model is applied to the wide range of the slope angle, which includes the plume along the vertical wall for the special case and along the nearly horizontal wall. The velocity and concentration profiles of the inclined wall plume are explained well by the similarity solution.

Keywords : inclined wall plume, turbulence model, similarity solution

1. 序論

周囲流体と密度の異なる流体が傾斜した壁面の近くにあると、この流体は壁面に沿って上昇あるいは下降する。この流れを傾斜壁面密度噴流あるいは傾斜プリュームとよぶ。このような流れは自然界で多く観測され、工学的にも重要である。傾斜壁面密度噴流はこれまでに数多くの研究者の関心を引いてきた。Ellison & Turner¹⁾は壁面の傾斜角度を種々変化させて実験を行い、壁面密度噴流の流速分布、濃度分布を測定した。さらに噴流による周囲水の連行係数が壁面の傾斜角の強い関数であることを示した。Turner²⁾は、種々の流れの連行係数が層平均リチャードソン数の関数であることを示している。小松、椿³⁾は、Ellison & Turnerと同様の実験を行っており、乱流構造を考慮した層積分解析法により、層平均リチャードソン数と連行係数の流下方向変化の予測式を提案した。Grella & Faeth⁴⁾は、浮力源として一酸化炭素の燃焼ジェットを用い、熱線流速計と熱電対により鉛直壁面密度噴流の流速分布、密度分布と乱れ強度の詳細な測定を行っている。福岡ら^{5), 6)}は、貯水池に流入する濁水による下層流を想定して実験を行い、流速分布、密度

分布の特性を明らかにしている。Yoshida⁷⁾は、塩水による鉛直壁面密度噴流の乱流構造を水素気泡法により調べている。

以上のように壁面密度噴流については、主として実験的な検討がなされてきた。これに対して著者らは、層流および乱流の鉛直密度噴流が相似解をもつことを示し、流速分布、密度分布を求めた⁸⁾⁻¹⁰⁾。しかし、乱流の解析では、渦動粘性係数モデルを用いており、その分布をどのように与えるか、特に壁面近傍での取扱いに問題が残された。

近年、乱流の解析に対して乱流特性量を未知数とする乱流モデルを用いることが一般化しつつある。Rodi¹¹⁾は、乱流運動エネルギー k と粘性逸散率 ε を未知数として用いる $k-\varepsilon$ モデルを中心として、乱流モデルとの応用についての概説を行っている。Ljuboja & Rodi¹²⁾は、 $k-\varepsilon$ モデルを発展させた代数応力モデルにより鉛直壁面密度噴流の解析を行い、Grella & Faeth⁴⁾の実験結果と比較している。また、著者ら^{13), 14)}は、浮遊砂を含む開水路流について $k-\varepsilon$ モデルを適用し実験値との良好な一致を見出している。乱流モデルを用いることの最大の利点は渦動粘性係数が結果として得られることにある。したがって、乱流モデルの使用によりかなり複雑な流れの解析が可能になる。

* 正会員 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部建設系
(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)

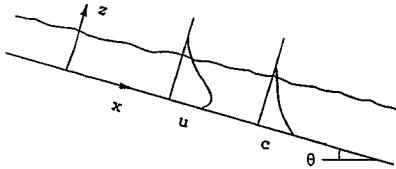


Fig. 1 Definition sketch of inclined wall plume.

本研究の目的は、密度差により傾斜壁面に沿って流動する傾斜壁面密度噴流の特性を乱流モデルにより明らかにすることである。このため、 $k-\epsilon$ モデルを用いた場合に方程式系が相似解をもつことを示し、壁面が鉛直の場合から水平に近い場合にまで応用する。

2. 傾斜壁面密度噴流の基礎方程式

Fig. 1 に示すように半無限領域に密度 ρ_0 の流体が静止しており、これより密度の大きな（小さな）密度 ρ の流体が傾斜面に沿って流下（上昇）する場合を考える。流れは、二次元、非圧縮であり、十分に発達した乱流である。流入する流体と周囲流体は、乱流の作用により混合する。二流体の相対密度差は、小さくブーシネスク近似が成立する。流れの x 方向の変化は緩やかであり、次のような境界層近似が成立する。

$$u \gg w \quad \frac{\partial}{\partial z} \gg \frac{\partial}{\partial x} \quad (1)$$

ここで、 u, w は、それぞれ、流下方向とこれに直交する方向 (z 方向) の流速成分である。このとき、流れの連続式、流下方向の運動方程式、塩分濃度 c (あるいは温度差等の密度差の原因となるスカラー量) の拡散方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\rho}{\rho_0} g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h R c dz + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (4)$$

ここで、 g は重力加速度、 θ は壁面の傾斜角度、 R は濃度と相対密度差との換算係数である (Rc が相対密度差)。渦動粘性係数 ν_t 、および渦動粘性係数と渦拡散係数の比 σ_t は、次のように定義される。

$$\overline{u'w'} = - \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5)$$

$$\overline{c'w'} = - \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} \quad (6)$$

ここで、 $-\overline{u'w'}$ 、 $-\overline{c'w'}$ は、それぞれレイノルズ応力、濃度速度相関である。乱流運動エネルギー k 、分子粘性逸散率 ϵ の方程式は、次のようになる。

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + w \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

$$+ Rg \cos \theta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} - \epsilon \quad (7)$$

$$u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + w \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \left[\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right.$$

$$\left. + (1 - c_{3\epsilon}) Rg \cos \theta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} \right] - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (8)$$

$k-\epsilon$ モデルでは渦動粘性係数を次のように表わす。

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (9)$$

式 (7), (8), (9) に含まれる係数、 c_μ 、 σ_k 、 σ_ϵ 、 $c_{1\epsilon}$ 、 $c_{2\epsilon}$ は種々の流れとの比較により次のように同定されている¹¹⁾。

$c_\mu = 0.09$ $\sigma_k = 1.0$ $\sigma_\epsilon = 1.3$ $c_{1\epsilon} = 1.44$ $c_{2\epsilon} = 1.92$
 c_μ の値は局所等方性の流れ場に対して求められたものであるが、ここでは流れのすべての領域でこの値をとるものとする。一方、密度差による流れに対して、 σ_t 、 $c_{3\epsilon}$ の値は十分には検討されていないようである。

解析にあたり次のように流関数を導入する。このとき、式 (2) は常に満たされる。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10)$$

相似解を求めるため、変数を次のようにおく。

$$\eta = azx^{-l} \quad (11\text{-a})$$

$$\psi = bx^m F(\eta) \quad (11\text{-b})$$

$$c = c_* x^n G(\eta) \quad (11\text{-c})$$

$$k = dx^p K(\eta) \quad (11\text{-d})$$

$$\epsilon = ex^q E(\eta) \quad (11\text{-e})$$

ここで、 η は相似変数であり、 F 、 G 、 K 、 E は、それぞれ、 ψ 、 c 、 k 、 ϵ に対する相似関数である。これらが相似解となるためには、式 (11) がそれぞれ式 (3), (4), (7), (8) を満たし、 x のべき数 l, m, n, p, q やび係数 a, b, c_* , d, e が一意的に定まることが必要十分条件である。以下ではこの展開を行う。

流速成分、 u, w は式 (10), (11) より次のように表わされる。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [bx^m F(\eta)] = bx^m \frac{\partial \eta}{\partial z} F' = abx^{m-l} F' \quad (12)$$

$$w = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} [bx^m F(\eta)] = - bmx^{m-1} F$$

$$+ bx^m \frac{\partial \eta}{\partial x} F' = bx^{m-1} (l\eta F' - mF) \quad (13)$$

式 (11)～(13) の関係を用いて式 (3), (4), (7), (8) を整理すると次のようになる。

$$a^2 b^2 x^{2m-2l-1} [(m-l) F'^2 - mFF'']$$

$$= Rg \sin \theta cx^n G - \frac{Rc}{a} g \cos \theta (n+l) x^{n+l-1} \int_z^h G d\eta$$

である。繰り返し計算の過程で $\eta = \eta_0 + \Delta\eta$ での流速 U_* は既知とみなすことができるので、 $\eta = \eta_0$ での流速 U_0 、摩擦速度 U_* を求めることができる。このとき、式(41・b)～(41・e) の無次元表示は次のようになる。

$$F=0 \quad G'=0 \dots \quad (48\text{-a, b})$$

$$\frac{K}{U_*^2} = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} \quad E = \frac{U_*^3}{x\eta_0} \dots \quad (48\text{-c, d})$$

無限遠での境界条件は、次のようになる。

以上のように問題は、境界条件式(43), (48)および(49)のもとに、非線形常微分方程式(36)～(39)を解くことに帰着する。数値解析では、差分法により基礎方程式を離散化し、繰り返し計算により収束解を求めた。計算領域は、流速の半値幅の3倍程度とした。境界条件に含まれている量のうち、 U_0 , U_* , $\eta_{1/2}$ は、計算の始めでは未定の量であり、第1回目の計算では、なんらかの値を仮定する必要がある。しかし、これらは繰り返し計算の過程で正しい値に収束していく。

4. 数値計算の結果（実験値との比較）

以上の数値モデルを実験結果と比較する。比較に用いた実験を Table 1 にまとめて示す。福嶋の実験は、これまでに公表されていない。これは、長さ 6 m、幅 0.2 m の水槽に勾配 1/125 の水路床を設定し、淡水中に上流から

ら静かに塩水を流入させた実験である。他の実験の詳細については参考文献を参照されたい。

まず、傾斜プリュームの特別な場合として、鉛直壁面に沿う流れを検討する。この場合には $\cot \theta = 0$ となり、検討すべきパラメータは、 σ_1 だけとなる。

Fig. 2 に無次元平均流速と相対密度差の分布の Grella & Faeth⁴⁾ の実験結果との比較を σ_t をパラメーターとして示す。彼らの実験では、レイノルズ数が大きく変化しており、Test 1 から Test 5 の順に $R_{xm}=18\,300, 23\,700, 38\,300, 53\,200, 70\,000$ となっている ($R_{xm}=u_{max}x/\nu$)。**Fig. 2** に示した計算では、それぞれのレイノルズ数に対応した解析を行っている。しかしながら、Test 1 から Test 5 までの比較により、レイノルズ数の変化による影響は流速分布、相対密度差の分布とともにきわめて小さいことがわかる。また、相対密度差の分布の比較から σ_t として 0.8~1.0 とすればよいことがわかる。

Fig. 3 は、福嶋ら¹⁰⁾の流速分布と相対密度差分布の計算結果との比較を次元形で σ_t をパラメーターとして示したものである。この実験は同一の流入条件のもとで、流速分布、相対密度差の流下方向の変化特性を調べたものである。計算結果は、流下に伴って流動層が線形的に増加し、相対密度差が減少する特性をうまく表現している。この場合にも σ_t としては 0.8~1.0 とすればよい。

Fig. 4, Fig. 5 は、それぞれ Yoshida⁷⁾と福嶋ら¹⁰⁾の鉛直壁面噴流のレイノルズ応力と渦動粘性係数を σ_t をパラメーターとして計算値と比較したものである。福嶋ら

Table 1 Experimental conditions.

Case	θ (deg.)	Q_c (cm^2/s)	$(\Delta P/P)_0$	x (m)	Researcher etc.
GF1	90.0	5.12	0.0509	0.61	Grella & Faeth ⁴⁾
GF2	90.0	11.06	0.0823	0.61	"
GF3	90.0	4.26	0.0200	1.22	"
GF4	90.0	10.11	0.0333	1.22	"
GF5	90.0	24.93	0.0599	1.22	"
FFH	90.0	0.0804	0.01411	0.16 0.26 0.36 0.52	Fukushima et al. ¹⁰⁾
Yo	90.0	0.0454	0.0270	0.2	Yoshida ⁷⁾
Na	30.0	0.351	0.01450	0.4 0.5	Nakashima ¹⁵⁾
Fu1	0.46	0.154	0.00980	4.9	Fukushima
Fu2	0.46	0.161	0.00919	4.9	"
Fu3	0.46	0.294	0.01862	4.9	Run 1 Run 2 Run 3

Table 2 Summary of calculational results

θ (deg)	$F(\omega)$ $\times 10^2$	F^* max	G_{\max}	$\eta_{1/2}$ $\times 10^2$	I_1	I_2	I_3	I_4	E_o $\times 10^2$	R_i	c_f $\times 10^2$
90.0	6.797	2.72	8.80	7.574	0.968	0.689	0.717	0.551	10.272	0.137	5.204
80.0	6.269	2.79	9.29	7.205	0.942	0.680	0.694	0.535	9.482	0.132	5.245
70.0	5.794	2.87	9.72	6.615	0.943	0.685	0.706	0.542	8.656	0.124	5.607
60.0	5.562	2.94	10.10	5.929	1.007	0.724	0.744	0.569	8.367	0.122	5.636
50.0	5.225	2.99	10.59	5.643	1.000	0.718	0.732	0.561	7.930	0.132	5.677
40.0	4.759	3.07	11.34	5.389	0.960	0.689	0.696	0.534	7.279	0.152	5.700
30.0	3.543	3.34	14.05	3.991	0.986	0.705	0.695	0.534	5.559	0.149	5.955
20.0	3.387	3.38	14.55	4.023	0.940	0.672	0.658	0.505	5.351	0.221	6.000
15.0	2.874	3.56	16.52	3.403	0.954	0.677	0.654	0.499	4.626	0.251	6.186
10.0	2.080	3.83	21.13	2.566	0.963	0.679	0.630	0.482	3.543	0.304	6.288
8.0	1.720	4.01	24.59	2.111	0.999	0.696	0.634	0.480	3.053	0.329	6.292
6.0	1.255	4.25	31.42	1.697	0.968	0.669	0.583	0.442	2.399	0.392	6.300
5.71	1.199	4.30	32.71	1.596	0.991	0.682	0.590	0.446	2.319	0.391	6.377
4.57	0.913	4.53	40.83	1.271	1.005	0.678	0.570	0.425	1.910	0.436	6.310
3.43	0.733	4.90	47.16	1.077	0.948	0.646	0.540	0.402	1.507	0.472	6.847
2.86	0.648	5.15	51.28	0.946	0.947	0.648	0.541	0.401	1.317	0.483	7.100
2.29	0.495	5.60	62.87	0.705	0.981	0.665	0.543	0.403	1.034	0.467	7.777
0.46	0.105	7.61	136.5	0.192	0.836	0.826	0.685	0.501	0.214	0.806	6.971

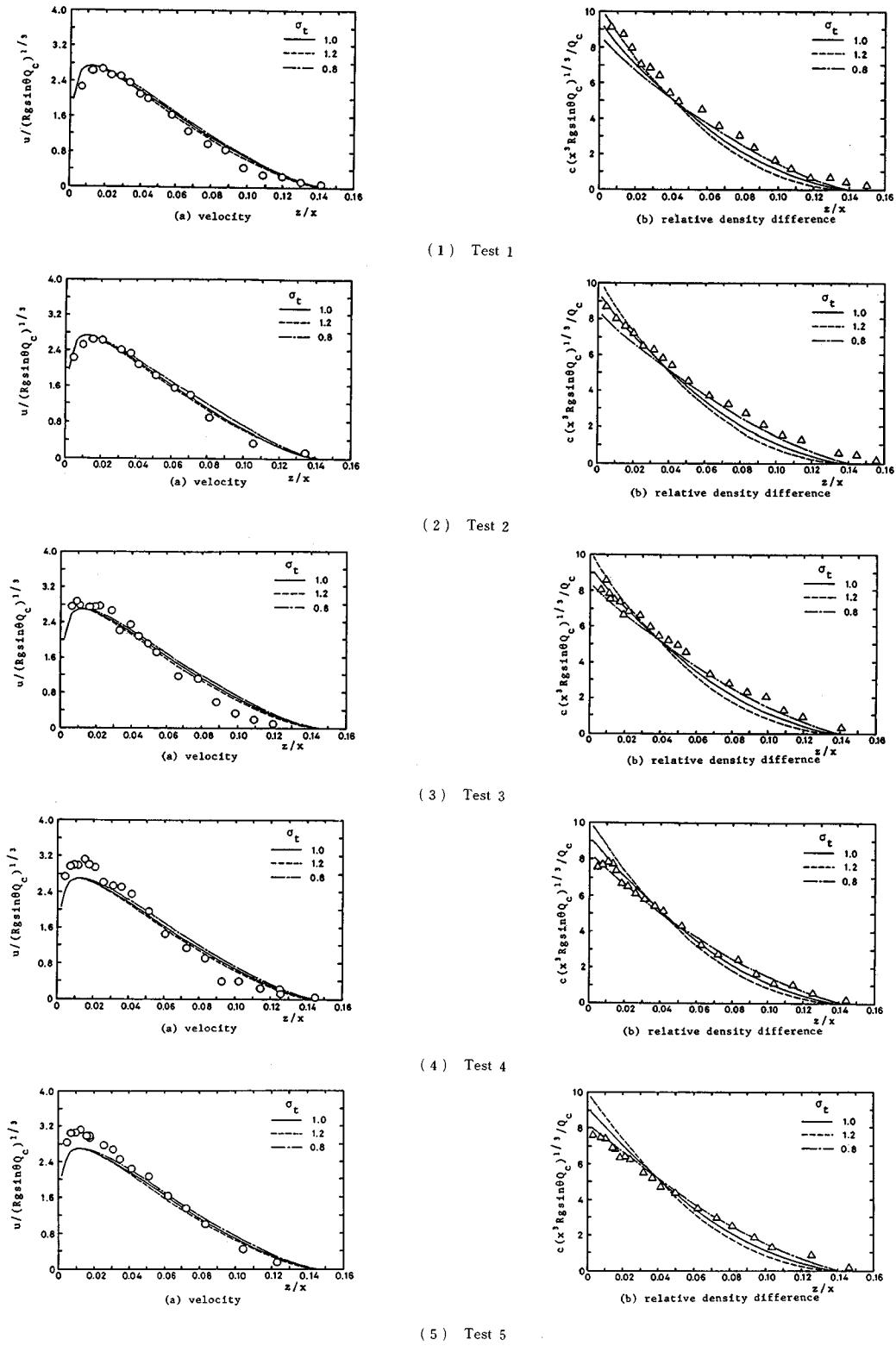


Fig. 2 Comparison of numerical solutions to Grella & Faeth⁴⁾'s experimental results ($\theta=90^\circ$).

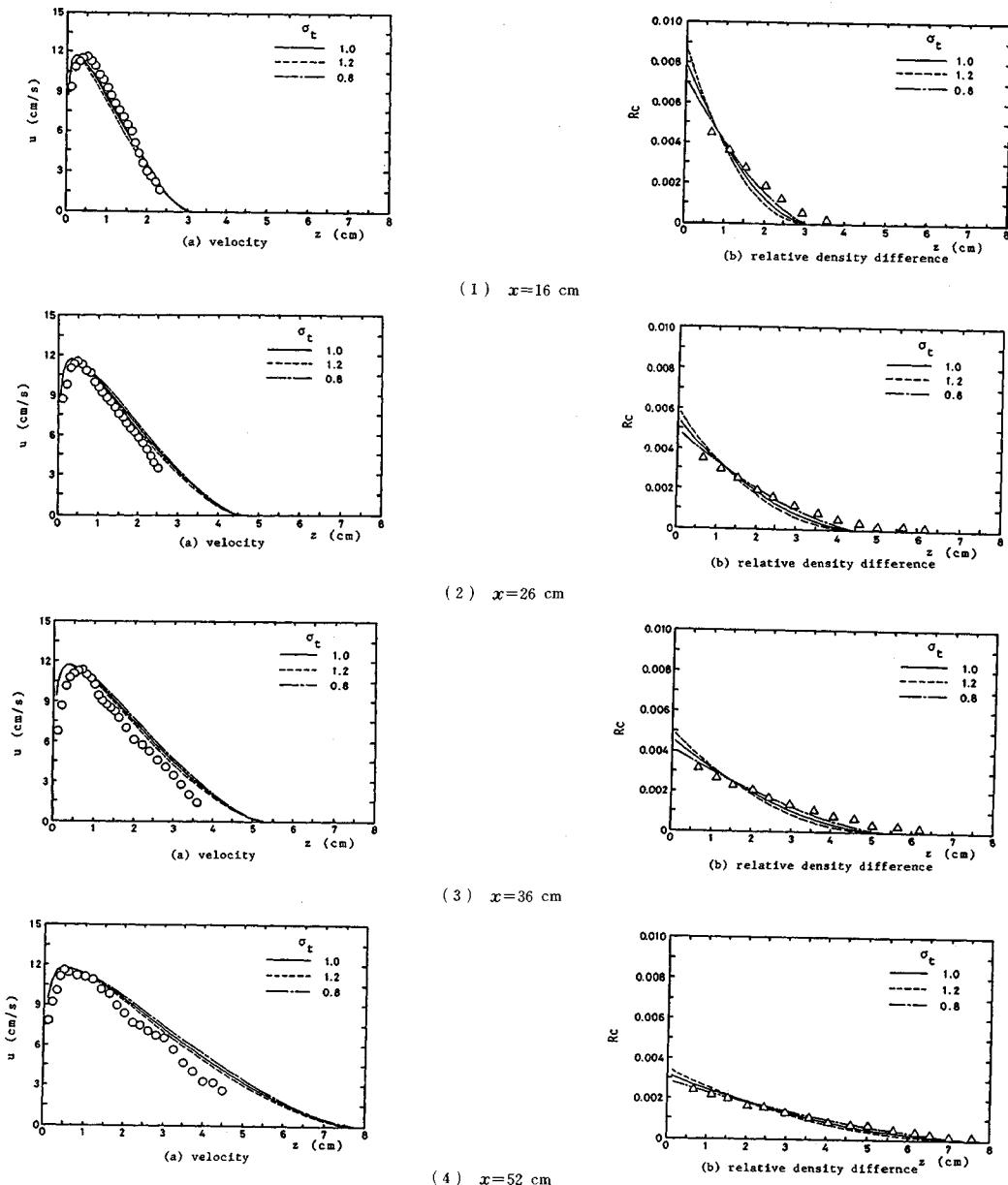


Fig. 3 Comparison of numerical solutions to Fukushima et al.¹⁰⁾'s experimental results ($\theta=90^\circ$).

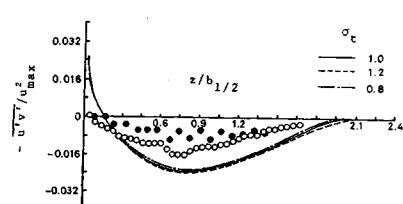


Fig. 4 Distribution of Reynolds stress (open circles indicate Yoshida⁷⁾'s data, close circles indicate Fukushima et al.¹⁰⁾'s data).

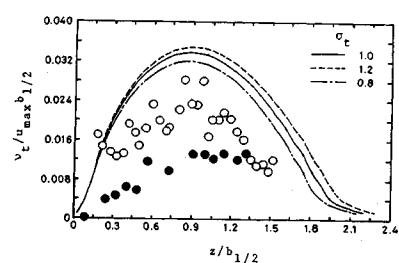


Fig. 5 Distribution of the eddy viscosity (symbols are the same as those of Fig. 4).

の測定は、 $x=0.36\text{ m}$ で行われたものである。これらの測定はいずれも水素気泡法で行われたものであり、乱流測定としては多少精度が落ちることに留意する必要がある。レイノルズ応力は最大流速の2乗で、渦動粘性係数は最大流速と流速の半値幅で無次元化されている。計算結果と実測値との一致はあまりよくないが、これらの実験のレイノルズ数がかなり小さく乱流の発達が十分ではないためと考えられる。また、このようなレイノルズ数の小さな条件でも適用できる乱流モデルの開発が必要である。

以上のように鉛直壁面密度噴流について検討を行ったが、本解析モデルでその流動特性をかなりうまく表現できることがわかった。特に σ_t の値として、0.8~1.0とすればよいことがわかったので以下の解析では、 $\sigma_t=1.0$ としている。以下では、パラメーターとして c_{3e} の値を検討する。

Fig. 6は、壁面の傾斜角をパラメーターとした相似解を無次元形で示す。この場合には $c_{3e}=0.6$ としている。壁面の傾斜角が小さくなるとともに流動層厚が減少し、最大速度、最大濃度が増加することがわかる。乱れ運動エネルギー、粘性逸散率、渦動粘性係数も傾斜角によって大きく変化している。

次に、傾斜角 $\theta=30^\circ$ の中島¹⁵⁾の実験結果との比較を行った。この場合には、 $c_{3e}=0.0\sim1.0$ まで変化させたが、 $c_{3e}=1.0$ の結果が最もよい一致をみた。**Fig. 7**がその結果である。壁面に近いところで相対密度差の実験値が計算値より小さくなっているが、流速分布の一一致は良好である。

Fig. 8は、きわめて緩い傾斜角($\theta=0.46^\circ$)で行った福嶋の実験との比較を示す。この場合は、 $c_{3e}=0.6$ としたとき、実験と計算とがかなり一致した。Run 1, Run 2では、流速が最大値の付近で平坦になっており、計算値との一致がよくない。相対密度差も同じ傾向にある。著者が行った実験では、**Fig. 8**で示した測定のほかに、 $x=1.4\text{ m}$, $x=3.4\text{ m}$ でも測定を行っているが、これらはいずれも境界層の発達が十分ではなく相似解では表現できなかった。したがって、**Fig. 8**に示したRun 1, Run 2のいずれも相対的に流下距離がまだ短く、境界層の発達が十分ではない可能性がある。また、相似解の適用限界については、さらに高度な解析を行い検討する必要がある。

本解析モデルにより傾斜プリュームの諸特性を調べる。流速分布、濃度分布を、最大流速 u_{\max} 、最大濃度 c_{\max} 、流速の半値幅 $b_{1/2}$ を用いて次のように表わす。

$$u = u_{\max} f(\xi) \quad c = c_{\max} g(\xi) \dots \dots \dots (50)$$

ここで、 $\xi=z/b_{1/2}$ である。以下のように傾斜壁面噴流の層積分を定義する⁴⁾。

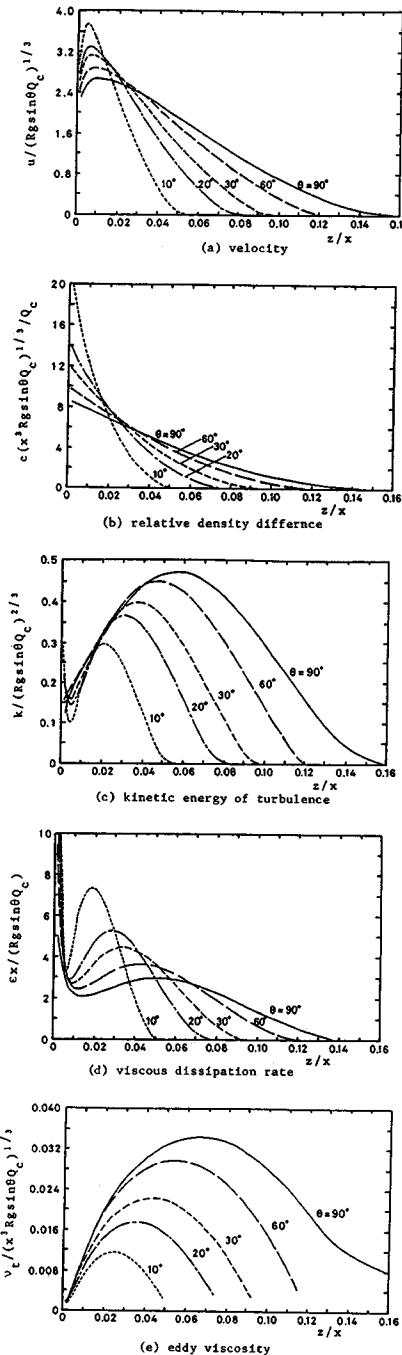
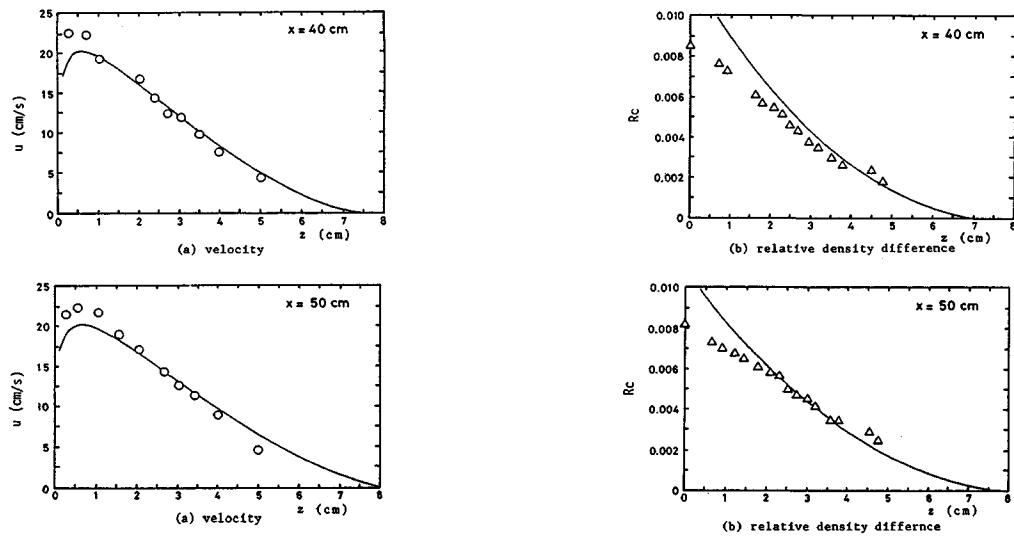
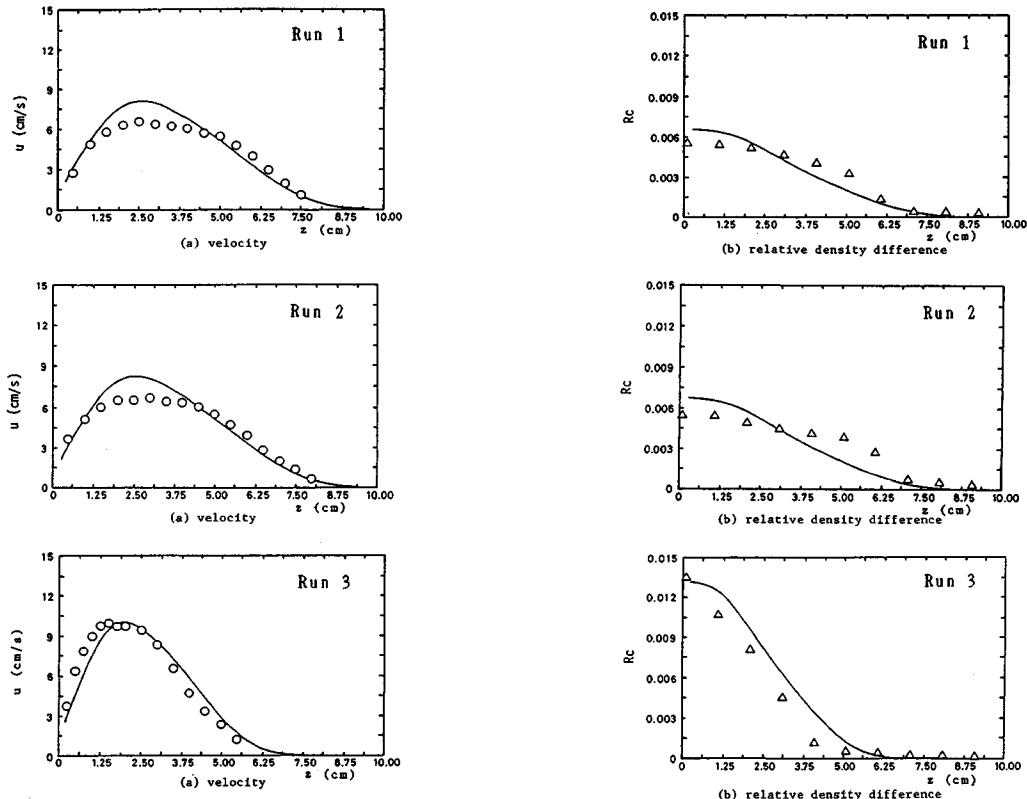


Fig. 6 Similarity solution of inclined wall plume with the slope angle as the parameter.

$$ub = u_{\max} b_{1/2} \int_0^\infty f d\xi = u_{\max} b_{1/2} I_1 \dots \dots \dots (51)$$

$$u^2 b = u_{\max}^2 b_{1/2} \int_0^\infty f^2 d\xi = u_{\max}^2 b_{1/2} I_2 \dots \dots \dots (52)$$

$$cb = c_{\max} b_{1/2} \int_0^\infty g d\xi = c_{\max} b_{1/2} I_3 \dots \dots \dots (53)$$

Fig. 7 Comparison of numerical solutions to Nakashima¹⁵⁾'s experimental results ($\theta=30^\circ$).Fig. 8 Comparison of numerical solutions to Fukushima's experimental results ($\tan \theta=0.008$).

$$cub = c_{\max} u_{\max} b_{1/2} \int_0^\infty f g d\xi = c_{\max} u_{\max} b_{1/2} I_4 \dots (54)$$

このとき、層平均流速、層平均濃度、層厚が次のように求められる。

$$u = \frac{I_2}{I_1} u_{\max} \quad b = \frac{I_1^2}{I_2} b_{1/2} \quad c = \frac{I_4}{I_1} c_{\max} \dots \dots \dots (55)$$

式 (12), (13), (40・a) から、層平均流速に対する連行係数が、次のように求められる。

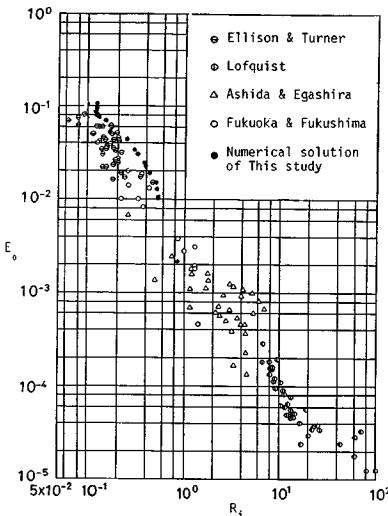


Fig. 9 Entrainment coefficients versus the overall Richardson Number.

$$E_o = -\frac{w_0}{u} = \frac{I_1 F(\infty)}{I_2 F'_{\max}} \quad \dots \dots \dots (56)$$

これに対して層平均リチャードソン数は、式(40)、(55)から次のように求められる。

$$R_i = \frac{R_g c b}{u^2} = \frac{I_1^3 I_4 G_{\max} \eta_{1/2}}{I_2^3 \sin \theta F'_{\max}^2} \quad \dots \dots \dots (57)$$

Table 2 に本解析で得られた式(51)～(54)の積分と、式(56)、(57)で定義される連行係数、層平均リチャードソン数をまとめて示す。表中で、\$c_s\$ は、次式で定義される壁面の摩擦係数である。

$$c_s = u_*^2 / u_{\max}^2 \quad \dots \dots \dots (58)$$

Fig. 9 に解析で得られた連行係数を層平均リチャードソン数に対して示す。図中には、下層密度流で得られた実験結果も示している⁶⁾。数値解析の結果は実験結果に対して大きい傾向を示すが実験誤差の範囲内にあり、十分に妥当な結果であると考えられる。

5. 結 論

密度差により傾斜壁面に沿って流動する傾斜壁面密度噴流の特性を乱流モデルにより検討した。その結果、\$k-\epsilon\$ 乱流モデルを用いた場合に方程式系が相似解をもつことを示した。壁面が鉛直の場合から水平に近い場合にまでに数値解析を行い実験結果と比較した結果、かなり良好な一致をみることができ、本解析モデルの妥当性が確認された。以上により、十分に流下距離が大きく、流れの相似性が保たれている場合の壁面密度噴流の特性が明らかにされた。

しかし、レイノルズ応力と渦動粘性係数については計算値は実測値と必ずしもよく一致しなかった。また、

\$k-\epsilon\$ 乱流モデルによって求められる \$k\$ と \$\epsilon\$ については直接実験値との比較を行うことができなかった。これらの点については、詳細な実験と低レイノルズ数に対しても適用できるモデルを開発する必要があり、今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) Ellison, T. H. and Turner, J. S. : Turbulent entrainment in stratified flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 6, pp. 423～448, 1959.
- 2) Turner, J. S. : Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge Univ. Press, pp. 178～187, 1973.
- 3) 横東一郎・小松利光：傾斜 Plume の流れと連行現象、第 23 回水理講演会論文集, pp. 415～422, 1979.
- 4) Grella, J. J. and Faeth, G. M. : Measurements in a two-dimensional thermal plume along a vertical adiabatic wall, *J. Fluid Mech.*, Vol. 71, part 4, pp. 701～710, 1975.
- 5) 福岡捷二・福嶋祐介・村田和夫・荒井 健：成層化した二次元貯水池に流入する密度流の実験的研究、土木学会論文報告集, No. 293, pp. 65～77, 1980.
- 6) 福岡捷二・福嶋祐介・中村健一：二次元貯水池密度流の潜り込み水深と界面形状、土木学会論文報告集, No. 302, pp. 55～65, 1980.
- 7) Yoshida, J. : On the velocity fields and their variations in the two-dimensional forced plumes and the behavior of the two-dimensional dual plumes, Doctoral Thesis, Univ. of Tokyo, 1982.
- 8) 福嶋祐介：鉛直壁面密度噴流の流速分布と密度分布の層流解、第 37 回年次学術講演会講演概要集, 1982.
- 9) 福嶋祐介・早川典生・福永和久：鉛直壁面密度噴流に関する研究、長岡技術科学大学研究報告, 第 5 号, pp. 53～59, 1983.
- 10) 福嶋祐介・福永和久・早川典生：鉛直壁面密度噴流に関する研究、第 28 回水理講演会論文集, pp. 303～310, 1984.
- 11) Rodi, W. : Turbulence Models and Their Application in Hydraulics, State of the Arts Paper, IAHR, 1980.
- 12) Ljuboja, M. and Rodi, W. : Prediction of horizontal and vertical turbulent buoyant wall jet, *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Vol. 103, pp. 343～349, 1981.
- 13) Fukushima, Y. and Fukuda, M. : Analysis of turbulent structure of open channel flow with suspended sediment, *J. Hydrosci. and Hydraul. Eng., JSCE*, Vol. 4, No. 2, pp. 47～54, 1986.
- 14) 福嶋祐介・福田雅晴：乱流モデルによる非平衡浮遊砂流の解析、第 32 回水理講演会論文集, pp. 413～418, 1988.
- 15) 中島卓夫：壁面密度噴流に関する研究、長岡技術科学大学修士論文, 1985.
- 16) Lofquist, K. : Flow and Stress near an Interface between stratified Liquids, *Phys. Fluids*, Vol. 3, pp. 158～175, 1960.

(1988.4.23・受付)