

# 安定な浮力フラックスの鉛直混合抑制効果

## STABILIZING EFFECT OF SURFACE BUOYANCY FLUX UPON MECHANICALLY-DRIVEN VERTICAL MIXING

室田 明\*・道奥 康治\*\*・阪口 進一\*\*\*

By Akira MUROTA, Kohji MICHIOKU and Sin-ichi SAKAGUCHI

During heating season, hydrodynamic behavior of the thermocline in lakes and reservoirs is predominantly affected by the combined action of the stabilizing buoyancy flux due to solar radiation and the mechanical stirring due to wind shear stress. The present paper examines the entrainment process in such a situation experimentally and theoretically. In a physical model, the oscillating-grid turbulence and the stabilizing buoyancy flux are simultaneously supplied to the upper surface of a two-layer thermal stratification system and the resultant entrainment process is investigated. The entrainment rate is related to an overall Richardson number. The turbulent structure is also analyzed by considering the energy balance in the present system. Applying the entrainment law, we get an analytical solution of the equilibrium condition where the mechanical disturbance energy just balances the stabilizing effect of the buoyancy flux.

*Keywords:* entrainment, thermal stratification, turbulent structure, heating season

### 1. 序論

水温成層の発達・減衰は水域内の移流効果のほか、水面に供給される熱エネルギーと風の応力に起因する機械的擾乱エネルギーとの相互作用によって支配される。放熱期においては冷却による熱的擾乱と機械的擾乱がともに外乱として相乗的に作用し水温成層場の水質混合を促進する。逆に受熱期では水面加熱による浮力フラックスが機械的擾乱を緩和して成層安定度を増加させ、鉛直混合は抑制される。前者のように2つの外的エネルギーとともに擾乱源として貢献する複合因擾乱場での混合現象についてはこれまで著者らによって集中的に検討され連行特性・内部変動特性等が明らかにされた<sup>1,2)</sup>。これに対し後者のごとく熱エネルギーが混合抑制作用をなす場合の混合現象についてはいまだ検討されていない。受熱期においては表層近傍の浅い領域に密度勾配の大きな水温躍層が発達し、水面での熱収支と機械的擾乱強度との微妙なバランスによって躍層位置が上下方向へ移動する。躍層が浅く混合層の熱容量が小さいため、躍層のわ

ずかな鉛直移動は表層の水温変動に大きく反映される。したがって受熱期において高温水の表層選択取水を目的とする場合には、水面加熱に伴う安定な浮力フラックス作用下での鉛直混合を的確に評価し水温構造の変遷を把握しなければならない。

本研究は以上のような受熱期の混合現象を想定して基礎的な水理実験を遂行し、水温躍層の挙動に及ぼす浮力フラックスの安定効果と機械的擾乱の混合促進効果について理論的検討を行うものである。

まず、混合量を規定する支配物理量を導出し連行則の実験的定式化を行う。次に、これに基づいて躍層挙動を記述し得る理論解を求め、支配パラメーターによって混合過程を標準化する。以上のことから安定な浮力フラックスの混合抑制効果が定量化され、受熱期における表層近傍の水温構造を予測するための実用的な知見が得られる。

### 2. 実験方法

#### (1) 実験装置

停滞水域内では平均流の移流効果が小さく、風応力によって水面せん断層から伝達される乱れが混合を促進する主要な起動力である。また、混合はほぼ鉛直一次元的に進行する。そこで、本研究では図-1に示すように風

\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科  
(〒565 吹田市山田丘2-1)

\*\* 正会員 工博 神戸大学助教授 工学部土木工学科  
(〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

\*\*\* 正会員 工修 建設省(前・大阪大学大学院学生)

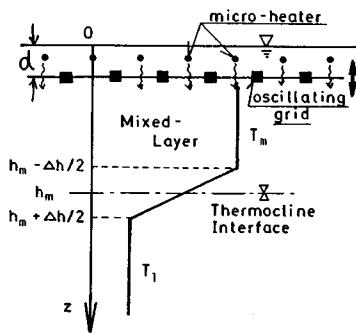


図-1 実験モデル

(本文では  $0 \leq z \leq h_m$  の範囲を「混合層」と称し,  $h_m - \Delta h/2 \leq z \leq h_m + \Delta h/2$  の間の水温遷移部を「躍層」と称する。)

の応力による機械的な乱れを水面付近に設置した振動格子によって、水面からの熱供給をマイクロヒーターの加熱によって、おののの代替した実験モデルを設定し、水温二成層場に生起する鉛直混合過程を実験的に再現する。実験水槽としては縦 25 cm, 横 25 cm, 高さ 50 cm の鉛直一次元水槽を用いる。乱れ強度を評価するうえでの便宜を計るために格子の幾何形状は Turner (1968)<sup>3)</sup>と同じく格子要素間隔  $M = 5$  cm とする。水面と格子との鉛直間隔  $d$  は  $d = 4.75$  cm, 5.5 cm の 2 種類である。格子の擾乱によって上層は一様に混合されるためマイクロヒーターによる加熱度の空間的不均一性は解消され水平方向にはほぼ一様な熱フラックスが供給される。

## (2) 実験方法・条件

まず水槽内に常温水を満たし、所定の実験条件よりやや低い一定電圧でヒーターに通電しながら格子を緩やかに振動させることによって明瞭な躍層界面をもつ水温二層系を形成させる。所定の混合層厚さ  $h_m$  と上下水温差  $\Delta T$  が得られた後ただちに一定の振幅  $s$  (=1 cm に固定), 周波数  $f$  (Hz), ヒーター電圧のもとに実験を開始する。時々刻々の水温分布は鉛直方向 30 点に設置されたサーミスタ水温計で計測される。ヒーターから供給される単位水柱当たり、単位時間当たりの熱フラックス  $H_s$  (密度  $\rho$  と定圧比熱  $c_p$  との積で除した形となっており、単位は  $(\text{cm}^2 \text{C}/\text{s})$ ) は系内貯熱量の時間変化率から算定される。表-1 に実験条件を示す。

## 3. 混合過程の概要

計測された水温分布の経時変化例を図-2 に示す。た

表-1 実験条件

$H_s = 0.0121 \sim 0.0960 (\text{cm}^2 \text{C}/\text{s})$
$f = 2.10 \sim 5.00 (\text{Hz}), \quad s = 1 (\text{cm}), \quad M = 5 (\text{cm})$
$d = 4.75 (\text{cm}), \quad 5.50 (\text{cm})$

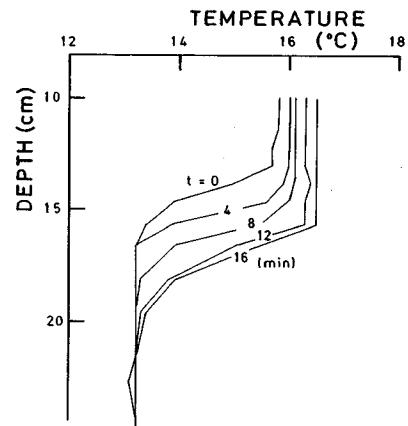


図-2 水温分布の経時変化例 (躍層近傍の拡大図)

だし、同図は躍層付近の拡大図であり水温計測点は高さ方向により広範囲に分布している。縦軸は水深、横軸は水温、図中の数字は実験開始後の経過時間を表わす。

躍層厚さが 2~3 cm 程度の明瞭な水温二層系が発達している様子がわかる。上方からの熱供給のため混合層水温  $T_m$  は時間とともに増加するが、下層水温  $T_1$  はほぼ一定に保たれており、上下層水温差  $\Delta T = T_m - T_1$  は時間とともに増大する。振動格子が誘起する機械的擾乱によって下層水が上層へと連行されるため、躍層界面は時間とともに低下する。しかし、 $\Delta T$  の増加に伴い密度成層の力学的安定度が増すため、界面低下速度（あるいは混合層の発達速度） $dh_m/dt$  は時間的に減少する。最終的には機械的擾乱の混合促進効果と浮力フラックスの安定効果とが平衡し、ある位置で界面連行は停止する。

## 4. 亂れエネルギー平衡式に基づく考察

ここで対象とする現象は (I) 振動格子より発生した乱れエネルギーが、(II) 系外から供給される浮力フラックスの安定効果を受けながら、鉛直混合すなわち浮力輸送によるポテンシャル・エネルギー変化と、(III) 粘性による逸散エネルギーに変換され消費される物理過程である。動力学的には、(I) が乱れの拡散項、(II) が浮力項、(III) が逸散項、におのの相当する、そこで、まず簡略化された乱れエネルギー平衡式に基づいて乱れエネルギー各項の収支に関する予備的考察を行う。さらにこれを発展させて連行則の理論的導出を試みる。

### (1) 基礎方程式

停滞水域内の混合過程は一般に鉛直一次元的であり、また乱れエネルギーの時間変化率は小さい。このとき乱れエネルギーならびに熱エネルギーの平衡はおののの次のように記述される。

[乱れエネルギー]

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{u'_j p'} + \frac{1}{2} \overline{u'_j u'_i u'_i} \right)}_{\text{(I) 拡散項}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \rho' u'_j g \delta_{j3}}_{\text{(II) 浮力項}} - \varepsilon' = 0 \quad \text{(III) 逸散項}$$

.....(1)

((注)  $x_3=z$  は鉛直下向きが正であるので (II) 項は正号をとる。)

### [熱エネルギー]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_T \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j T'}) \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 $u'_j$ ：流速の変動成分、 $p'$ ：圧力変動量、 $\rho'$ ：密度変動量、 $g$ ：重力加速度、 $x_j$ ：空間座標、 $\rho_0$ ：基準密度、 $\delta_{j3}$ ：クロネッカーデルタ、 $\varepsilon'$ ：乱れの逸散量、 $T$ 、 $T'$ ：水温の平均および変動成分、 $\kappa_T$ ：熱拡散係数、である。

### (2) モデル化

いま、乱れの特性速度・特性長をおのおの  $u_t$ 、 $l_t$  とし、鉛直一次元場 ( $j=3$ 、 $x_3=z$ ) における式 (1) 中の各項を次のようにおく。

#### (I) [拡散項]

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{u'_j p'} + \frac{1}{2} \overline{u'_j u'^2} \right)}_{(I)} = -r \frac{d u_t^3}{dz} \quad \dots \dots \dots (3)$$

#### (II) [浮力項]

$$\underbrace{\frac{\rho' u'_j}{\rho_0} g \delta_{j3}}_{(II)} = -a g \overline{w' T'} \quad \dots \dots \dots (4)$$

#### (III) [逸散項]

$$\underbrace{-\varepsilon'}_{(III)} = -E \frac{u_t^3}{l_t} \quad \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 $E$ ：比例定数、 $\alpha$ ：熱膨張係数、である。また、 $r$  は振動格子乱流場の等方性度に関するパラメーターであり、本研究では Hopfinger と Linden<sup>4)</sup>により得られた  $r=2.2$  を採用する。

以上よりモデル化された乱れエネルギー式が次式のようになる。

$$\underbrace{-r \frac{d u_t^3}{dz}}_{(I)} - \underbrace{a g \overline{w' T'}}_{(II)} - \underbrace{E \frac{u_t^3}{l_t}}_{(III)} = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

いま、図-1 に示すように二層系の水温分布が次式で表わされると仮定し、

$$T(z, t) = \begin{cases} \cdot T_m & (\text{for } 0 \leq z \leq h_m - \Delta h/2) \\ \cdot T_m + \frac{T_1 - T_m}{\Delta h} |z - (h_m - \Delta h/2)| \\ & (\text{for } h_m - \Delta h/2 \leq z \leq h_m + \Delta h/2) \\ \cdot T_1 & (\text{for } h_m + \Delta h/2 \leq z) \end{cases} \quad \dots \dots \dots (7)$$

これを式 (2) 左辺に代入して  $0 \leq z \leq h_m - \Delta h/2$  の領域に対しては

$$\overline{w' T'} = H_s \quad \text{at} \quad z=0$$

$h_m - \Delta h/2 \leq z \leq h_m + \Delta h/2$  の領域に対しては

$$\overline{w' T'} = 0 \quad \text{at} \quad z=h_m + \frac{\Delta h}{2}$$

なる境界条件のもとに積分すればおののの領域に対する  $\overline{w' T'}$  の解が次のように得られる。

$$\overline{w' T'} = \begin{cases} \cdot H_s \left( 1 - \frac{z}{h_m} \right) + (T_m - T_1) \frac{z}{h_m} \cdot \frac{dh_m}{dt} \\ \quad (\text{for } 0 \leq z \leq h_m - \Delta h/2) \\ \cdot H_s \left[ 1 - \frac{z}{h_m} + \frac{|z - (h_m - \Delta h/2)|^2}{2 h_m \Delta h} \right] + (T_m - T_1) \\ \left[ \frac{z}{h_m} - \frac{|z - (h_m - \Delta h/2)|^2}{2 h_m \Delta h} - \frac{|z - (h_m - \Delta h/2)|}{\Delta h} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{(z-h_m)^2}{\Delta h^2} - \frac{1}{4} \right) \frac{\Delta h}{h_m} \right] \frac{dh_m}{dt} \\ \quad (\text{for } h_m - \frac{\Delta h}{2} \leq z \leq h_m + \frac{\Delta h}{2}) \end{cases} \quad \dots \dots \dots (8)$$

ただし、以上の展開において十分乱れた混合層内では分子拡散の寄与は小さいとし式 (2) の右辺第1項は無視されている。また実験より  $\chi \equiv \Delta h/h_m$  なる躍層の相対厚さ(後述)の時間変化率  $d\chi/dt$  は小さいことがわかっているので近似的に  $\frac{d\Delta h}{dt} \approx \frac{\Delta h}{h_m} \frac{dh_m}{dt}$  とおいている。

以上の式中、 $T_m$ ：混合層の水温、 $h_m$ ：混合層の厚さ、 $T_1$ ：下層(非攪乱層)の水温、 $\Delta h$ ：水温遷移層の厚さ、 $H_s$ ：水面から鉛直下向きに供給される熱フラックスである。

一方、ここでは乱れのスケールに対して浮力供給の影響がないと考え、 $l_t$  は均質密度場で得られた振動格子乱流の積分特性長  $l_s$  に等しいと仮定する。すなわち、

$$l_t = l_s = \beta(z-d) \quad \dots \dots \dots (9)$$

ここで、 $\beta$ ：比例定数、 $d$ ：格子と水面との距離、である。

式 (8)、(9) を式 (6) に代入し、 $u_t^3$  について解けば  $0 \leq z \leq h_m - \Delta h/2$  の範囲内で次の解を得る。

$$u_t^3 = \frac{ag}{r} \left[ -H_s \frac{z-d}{J'+1} + \frac{(z-d)(J'+1)z+d}{(J'+1)(J'+2)} \right. \\ \left. + \left( \frac{H_s}{h_m} - \frac{T_m - T_1}{h_m} \frac{dh_m}{dt} \right) \right] + C_s (z-d)^{-J'} \quad \dots \dots \dots (10)$$

ここで、 $J' \equiv E/\beta r$ 、 $C_s$ ：係数である。

上下層密度差がなく( $T_m = T_1$ )、浮力供給もない( $H_s = 0$ )場合、上式で与えられる  $u_t$  は均質密度場における振動格子乱流場の乱れ強度<sup>5)</sup>

$$u_s = c f s^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} (z-d)^{-1} \quad \dots \dots \dots (11)$$

に等しくなければならない。これより、 $C_s$ 、 $J'$  の同定値として

$$C_s = (c f s^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}})^3 = (u_{s0} l_{s0})^3 \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$J' = 3 \quad \dots \dots \dots (13)$$

を得る。ここで； $u_{s0} = fs$ ：格子の振動の速度スケール、 $l_{s0} = c \sqrt{sM}$ ：格子幾何形状の長さスケールである。

### (3) 連行則

式(10)中に含まれる鉛直混合量( $dh_m/dt$ )を求めれば、 $u_t$ の値が算定でき、乱れエネルギーのバランスが評価される。最終的には実験に基づいて連行則を定式化し、これを用いて( $dh_m/dt$ )を表現するが、そのための準備としてまず簡単な考察に基づいて躍層界面での乱れエネルギー平衡を表現し、連行則の関数形をあらかじめ理論的に求めておく。

躍層部の乱れは間欠的でありかつ乱流特性が鉛直方向に急変するため本解析で用いたようなモデル化によってその空間構造までを議論することはできない。しかし、少なくとも式(10)から算出される $z=h_m-\Delta h/2$ での乱れエネルギーフラックス $u_{t|z=h_m-\Delta h/2}^3$ の大部分は $h_m-\Delta h/2 \leq z \leq h_m+\Delta h/2$ なる躍層内で界面連行によるボテンシャルエネルギーへと変換され消費されると考えることはおむね妥当であろう<sup>注1)</sup>。そこで、次式のように $h_m-\Delta h/2 \leq z \leq h_m+\Delta h/2$ の範囲内で式(1)を積分し、躍層内全体の乱れエネルギー収支を考えることにする。

$$\begin{aligned} & \int_{h_m-\Delta h/2}^{h_m+\Delta h/2} -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{w}' p'}{\rho_0} + \frac{1}{2} \bar{w}' u_t'^2 \right) dz \\ & \quad (\text{I}) \text{拡散項} \\ & - \int_{h_m-\Delta h/2}^{h_m+\Delta h/2} a g \bar{w}' T' dz - \int_{h_m-\Delta h/2}^{h_m+\Delta h/2} \epsilon' dz = 0 \\ & \quad (\text{II}) \text{浮力項} \quad (\text{III}) \text{逸散項} \end{aligned} \quad (14)$$

・まず躍層の上端 $z=h_m-\Delta h/2$ においては拡散項(I)が式(10)で与えられる拡散項の値に等しいと考え、

$$\left( \frac{\bar{w}' p'}{\rho_0} + \frac{1}{2} \bar{w}' u_t'^2 \right) = r u_{t|z=h_m-\Delta h/2}^3 \quad (15)$$

とおく。

・次に躍層の下端 $z=h_m+\Delta h/2$ より下方では乱れが完全に消失すると仮定して、

$$\left( \frac{\bar{w}' p'}{\rho_0} + \frac{1}{2} \bar{w}' u_t'^2 \right) = 0 \quad (16)$$

とおく。浮力項(II)は式(8)の第2式を式(14)中の第2項へ代入することによって評価される。一方、躍層内の乱れ特性長は明らかに式(9)に従わず、したがって逸散項(III)を混合層内の場合のように簡単に表現することはできない。そこで、近似的にエネルギー発生量(I)に比例して逸散が生ずると考え、便宜上次式のようにおく。

$$-\int_{h_m-\Delta h/2}^{h_m+\Delta h/2} \epsilon' dz = -Dr u_{t|z=h_m-\Delta h/2}^3 \quad (17)$$

注1) 実験的には確認されていないが乱流モデルを用いた数值解析(文献8))によると躍層上端( $z=h_m-\Delta h/2$ )での運動エネルギー $u_{t|z=h_m-\Delta h/2}^3$ は躍層内で完全に消費されることがわかっている。

ここで、 $D$ : 比例係数である。

以上を式(14)に代入し、機械的擾乱が作用する場合の連行則と同様

$$\hat{E}_s = \left( \frac{dh_m}{dt} \right) / u_s', \quad \hat{R}_{ts} = \varepsilon g l_s' / u_s'^2 \quad (18)$$

(ここで、 $u_s' = u_{s|z=h_m}$ ,  $l_s' = l_{s|z=h_m}$ ,  $\varepsilon = \alpha (T_1 - T_m)$ : 密度界面での相対密度差, である。) なる連行係数 $\hat{E}_s$ とりチャードソン数 $\hat{R}_{ts}$ を用いてこれを整理すれば、結局次式を得る。

$$\hat{E}_s = \left( \frac{e_2}{e_1} - \frac{e_3}{e_1} \cdot \frac{u_b^3}{u_s'^3} \right) \cdot \hat{R}_{ts}^{-1} \quad (19)$$

ここで、 $u_b = (\alpha g H_s h_m)^{1/3}$ : 速度の次元を有する加熱の強度、

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= (D-1) \cdot \frac{1/4(1-\chi/2)+\lambda(1-\chi/2-\lambda)}{20\beta(1-\lambda)} \\ &\quad - \frac{(\chi/2-\chi^2/12)}{\beta(1-\lambda)} \\ e_2 &= (D-1) r \left( \frac{1-\lambda}{1-\chi/2-\lambda} \right)^3 \\ e_3 &= (D-1) \left[ \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\chi}{2} - \lambda \right) - \frac{1}{20} \left\{ 4 \left( 1 - \frac{\chi}{2} \right) + \lambda \right\} \right. \\ &\quad \left. \left( 1 - \frac{\chi}{2} - \lambda \right) \right] - \frac{\chi^2}{6} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

また、 $\chi = \Delta h/h_m$ : 跳層の相対厚さ,  $\lambda = d/h_m$ , である。

この時点では $D$ が未定であるので $e_1 \sim e_3$ の関数形は定まっていない。これらは以下のようにして決定する。

まず、加熱がないときすなわち $u_b=0$ のとき、式(19)は機械的擾乱のみが作用する場合の連行則<sup>1)</sup>

$$\hat{E}_s = C_1 \hat{R}_{ts}^{-1}, \quad (C_1=1.10) \quad (21)$$

に一致する必要があることから

$$e_2/e_1 = C_1 \quad (22)$$

を得る。上式と式(20)<sub>1</sub>, (20)<sub>2</sub>とから $D$ が $\chi$ ,  $\lambda$ 等の関数として求められる。これを用いれば $e_3/e_1$ の値もまた決定される。結局、連行則として次式が得られる。

$$\hat{E}_s = \left[ C_1 - \frac{1}{\eta_b^3} \left( \frac{u_b}{u_s'} \right)^3 \right] \hat{R}_{ts}^{-1} \quad (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_b^3} &= \frac{C_1 \left( 1 - \frac{\chi}{2} - \lambda \right)^4}{4 r (1-\lambda)^3} \left[ 1 - \frac{1}{5} \left\{ 4 \left( 1 - \frac{\chi}{2} \right) + \lambda \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{6+\chi}{6-\chi} \right) \right] + \frac{2\beta\chi(1-\lambda)}{6-\chi} \end{aligned} \quad (24)$$

である。

### (4) 亂れエネルギーフラックス

$u_t$ を加熱強度に関する特性速度 $u_b = (\alpha g H_s h_m)^{1/3}$ を用いて次のように規準化し、無次元乱れエネルギーフラックス $G(\xi)$ を定義する。

ここで、 $\xi = z/h_m$ ：無次元鉛直座標である。

式(10)中の鉛直混合量( $dh_m/dt$ )を式(23)の連続則によって表わせば $G(\xi)$ の解が次のように得られる。

$$G(\xi) = -\frac{\zeta - \lambda}{4} + \frac{1}{20} (\zeta - \lambda)(4\zeta + \lambda) \left[ 1 - \frac{C_1 \xi^4}{\beta (\hat{h}_m - \lambda_0)^4} + \frac{1}{\beta (1-\lambda) \eta^3} \right] + \frac{r \xi^4}{(\zeta - \lambda)^2 \hat{h}_m^4} \dots \dots \dots (26)$$

ここで、 $\xi_b \equiv (\hat{u}_{so} \hat{l}_{so} / \hat{u}_{bo})^{3/4}$ ：(振動格子による擾乱強度)  
 // (安定な浮力フラックスの強度) なる比を表わす無次元量であり、 $\xi_b$  が小さいほど安定な浮力フラックスの供給の影響が相対的に大きくなることを示す。また  $\hat{u}_{so} \equiv u_{so} / \sqrt{\varepsilon_0 g h_m}$ 、 $\hat{l}_{so} \equiv l_{so} / h_m$ 、 $\hat{u}_{bo} \equiv u_{bo} / \sqrt{\varepsilon_0 g h_m}$ 、 $u_{bo} \equiv (agH_s h_m)^{1/3}$ 、 $\hat{h}_m \equiv h_m / h_m$ ：無次元混合層厚さ、 $\lambda_0 \equiv d / h_m$  であり、 $\varepsilon_0 \cdot h_m$ ：おのおの相対密度差  $\varepsilon$  および混合層厚さ  $h_m$  の基準値（いずれも初期値とする）である。

ただし、式(26)の解は式(9)のような乱れスケルの関数形がおおむね妥当と思われる一様混合層内( $0 \leq \xi \leq 1 - \chi/2$ )に対してのみ有効である。

乱れエネルギー平衡式(6)も同様にして浮力フラックス  $u_b^3 h_m^{-1} (= \alpha g H_s)$  で除して次式のように規準化される。

$$-\frac{d}{d\xi} G(\xi) + q_b(\xi) - \frac{3G(\xi)}{\xi - \lambda} = 0 \dots \dots \dots (27)$$

浮力フラックスの解 (8) (ただし、式 (23) によって混合量 ( $dh_m/dt$ ) を評価する) と乱れエネルギー フラックスの解 (26) を用いればエネルギー平衡式 (27) 中の各項が次のように得られる。

### ( I ) 拓散項

$$-\frac{d}{d\xi} G(\xi) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} (-8\xi + 3\lambda) \left[ 1 - \frac{C_1 \xi^4}{\beta (\hat{h}_m - \lambda)^4} \right] + \frac{1}{\beta (1-\lambda) \eta_\lambda^3} + \frac{3r \xi^4}{(\xi - \lambda)^4 \hat{h}_m^4} \dots \quad (28)$$

## (II) 浮力項

(浮力項に関しては成層部全域 ( $0 \leq \xi \leq 1 + \chi/2$ ) に対し式(8)の  $\overline{w' T'}$  によって解が与えられる。)

### (III) 逸散項

$$-\varepsilon' = -3 \frac{G(\xi)}{\xi - \lambda} = \frac{3}{4} - \frac{3}{20}(4\xi + \lambda) \left[ 1 - \frac{C_1 \xi_b^4}{\beta (\hat{h}_m - \lambda_0)^4} \right] + \frac{1}{\beta (1-\lambda) \lambda_b^3} - \frac{3 r \xi_b^4}{(\xi - \lambda)^4 \hat{h}_m^4} \dots \quad (30)$$

まず安定な浮力フラックスによる乱れの低減効果を見るために、式(10)で与えられる乱れエネルギー・フラックス  $u_i^3$  と安定な浮力フラックスの供給がない場合の乱れエネルギー・フラックス  $u_{i0}^3$  (式(10)において  $H_s=0$ )

とおいた場合の  $u_t^3$  の値に等しい)との比  $u_t^3/u_{t0}^3$  の鉛直分布を図-3に示す。ここでは躍層の厚さとして実験で得られた典型的な値  $\chi = \Delta h/h_m = 0.3$  を用い<sup>注2)</sup>、混合層厚さが  $h_m = 1.5$  の場合について例示している。 $\xi_0$  が小さいほど、すなわち浮力フラックスの安定効果が相対的に増大するほど、浮力供給がない場合に比べて、乱れエネルギーーフラックスの低減が大きくなることがわかる。

図-4 は式 (28)～(30) で与えられる乱れエネルギー平衡式各項の鉛直分布例を  $\chi=0.3$ ,  $\hat{h}_m=1.5$ ,  $\lambda=\lambda_0=0$  の場合について示している。拡散項は常に正の値をとり、乱れエネルギーを生成しているのに対し、逸散項と浮力項はともにエネルギーの吸収項として負値をとることが

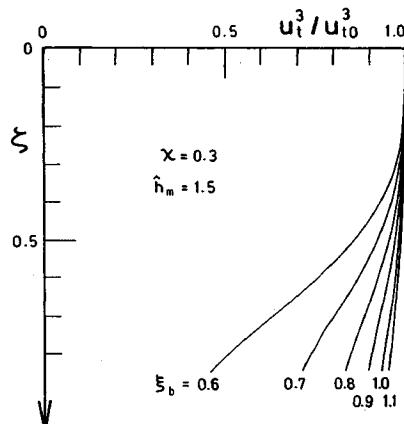


図-3 安定な浮力フラックスによる乱れエネルギーフラックスの低減効果（縦軸：鉛直座標、横軸：安定な浮力フラックスの供給がある場合とない場合のエネルギーフラックスの比  $u_1^3/u_0^3$ 、 $\xi$ ：（機械的擾乱の強度）/（安定な浮力フラックスの強度）なる比を表すパラメーター）

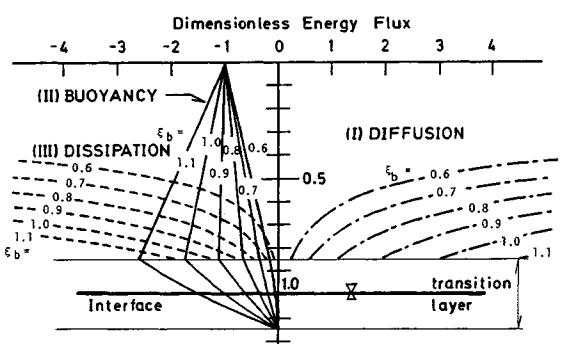


図-4 亂れエネルギー・フラックス各項の鉛直分布 ( $\xi_0$ に伴う変化,  $\gamma=0.3$ ,  $\hat{h}_m=1.5$ ,  $\lambda_0=0$ の場合)

注2) 実験より $\chi$ の変化は小さくおよそ0.3~0.4の値をとることを確認している。以後の解析においても $\chi$ は定数とみなす。

わかる。水面付近、すなわち擾乱源の近傍では拡散項と逸散項がおおむねつり合っており両者が卓越している。しかし、水深方向に乱れの運動は急減するため、下方領域では拡散・逸散項がともに減少し、逆に浮力項が相対的に重要となる。また  $\eta$  が増大して振動格子による擾乱効果が卓越するほど界面連行は増大し、浮力項による躍層部でのエネルギー消費量—すなわち躍層界面での水質混合に費やされるエネルギー損失分率—が増加する。

## 5. 連行特性

### (1) 理論値と実験値との比較

## 振動格子の機械的擾乱に浮力フラックスの安定効果の寄与を組み入れた速度スケールとして

$$\sigma_b \equiv \left( u_s'^3 - \frac{u_b^3}{C_1 \eta_b^3} \right)^{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots \quad (31)$$

を新たに定義する。これを用いて連行係数  $E_{\alpha_0}$  とりチャードソン数  $R_{i\alpha_0}$  を次のように再定義する。

$$E_{\sigma_b} \equiv \left( \frac{dh_m}{dt} \right) / \sigma_b, \quad R_{i\sigma_b} \equiv \varepsilon g l_s' / \sigma_b^2 \dots \dots \dots (32)$$

これらを用いれば式(23)の連行則を形式上

のごとく $-1$ 乗則として書き直すことができる。

以上のように理論的に誘導された連行則と水理実験から得られる  $E_{\infty} \sim R_{t\infty}$  間の関係とを図-5において比較する。同図に示すように  $E_{\infty} \propto R_{t\infty}^{-1}$  の関係は実験値においてもおおむね認められ本理論解析の妥当性が立証された。ただ実験値は実線で示された理論式(33)よりやや小さめの値を示し、速度スケール  $\sigma_b$  が幾分過大に評価されていることがわかる。そこで、以下のごとく  $\sigma_b$  の中に含まれる  $\eta_b$  を実験値に基づき決定することによつ

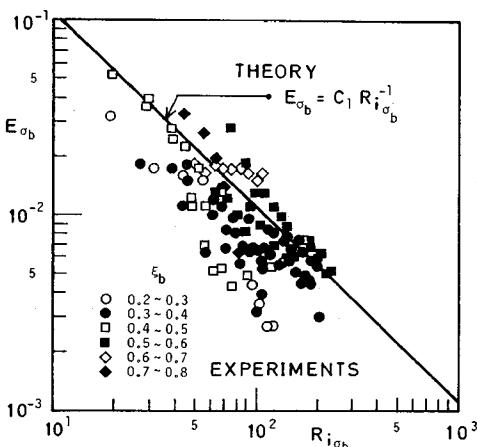


図-5 連行係数  $E_{\infty}$  とりチャードソン数  $R_{t\infty}$  の関係 ( $\eta_0$  の理論値式 (24) を用いて  $\sigma_0$  を算定した場合, 実線: 理論式 (33), 各記号: 実験値)

て実験値が式 (33) によりよく適合するように  $\sigma_b$  の値を補正する。

## (2) $\eta_b$ の補正

後述の混合過程に関する理論解析において厳密解を得るために式(31)中の $\eta_0$ を新たに次式のようにおく。

これは振動格子中心が水面に一致せず  $d$  だけ下方に位置することに対する算術上の換算であり、これまでの議論における物理的本質を変えるものではない。もちろん本実験範囲のように混合層厚さ  $h_m$  が  $d$  に比べてある程度大きい場合には  $\eta_b$  と  $\eta_{bo}$  の数値に大差はない。 $\eta_{bo}$  の理論値は式(24)と(34)から算定されるが、ここでは  $\eta_{bo}$  を経験定数とみなし、実験値が式(33)の連行則に適合するような定数係数としての  $\eta_{bo}$  を実験的に同定する。図-6は求めた  $\eta_{bo}$  の実験値を  $\lambda = d/h_m$  の関数として示したものである。両者には顕著な関数関係は認められない。一方、同図中の点線は式(24)と(34)によって得られる  $\eta_{bo}$  の理論値である。 $\lambda$  と弱い正の相関を示してはいるが、実験値が分布する範囲においては定数とみなせる程度にわずかしか変化していない。理論値は実験値よりやや大きく評価されており、この点が結果的には図-5における連行係数の理論値の過大評価として反映されている。そこで実験値の算術平均をとれば図中の実線で示すように定数としての最適合値  $\eta_{bo} = 3.04$  が得られる(一点鎖線、二点鎖線については次節で詳述する)。

このようにして得られた定数係数  $\eta_{b0} = 3.04$  を用いて  $E_\infty$  と  $R_{tob}$  の実験値を算出し、式(33)と比較したもののが図-7に示す。当然のことながら「理論-実験」間の適合性は向上する。また  $\eta_{b0}$  を定数係数とみなして速度スケール  $\sigma_0$  を算出し連行則を定式化することの妥当性が確認される。

### (3) 浮力フラックスによる安定効果と振動格子による擾乱効果との平衡条件

3. で述べたように混合層厚さと界面での密度差が時間とともに増大しある値に至ると浮力フラックスによる安定効果と振動格子による擾乱効果とがつり合う平衡状

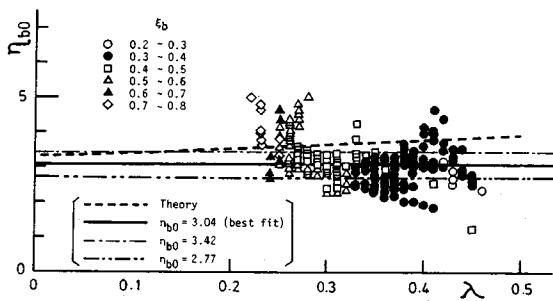


図-6  $\eta_{b0}$  と  $\lambda$  の関係 (係数  $\eta_{b0}$  の同定)

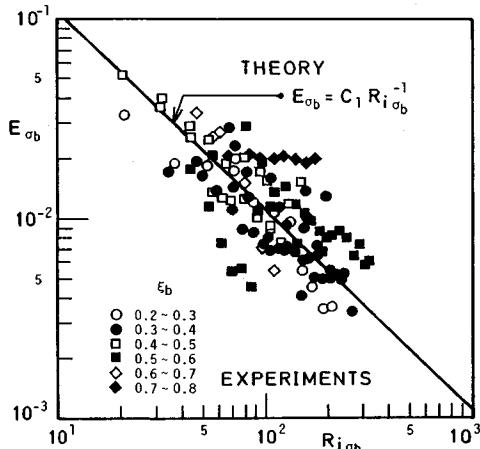


図-7 連行係数  $E_\infty$  とリチャードソン数  $R_{i\infty}$  の関係（実験値より同定された  $\eta_{b0}$  を用いて  $\sigma_b$  を算定した場合）

態に達し連行は停止する。このような平衡条件に関してはこれまで Hopfinger と Linden (1982)<sup>4)</sup>あるいは Thompson (1984)<sup>5)</sup>らによって実験的・理論的に検討されているが、本研究成果に基づけば、前節までに得られた連行則を用いて  $E_{\sigma_b} = 0$  (あるいは  $\sigma_b = 0$ ) とおくことにより平衡条件を評価することができる。このときの混合層厚さを「平衡水深」と称し  $h_{me}$  で記せば式(31)から

を得る。ここで  $\hat{h}_{me} = h_{me}/h_{mo}$  は無次元平衡水深である。上式は  $\xi$ 、すなわち (機械的擾乱の強度)/(安定浮力の供給量) に比例して平衡水深が増大することを示している。図-8 は式 (35) (実線) と実験値との比較を示す。Hopfinger と Linden<sup>4)</sup> はより広範囲な水理条件のもとに実験結果を得ており、彼らのデータも再整理して同図中に併記されている。破線は同じくエネルギー的考察に基

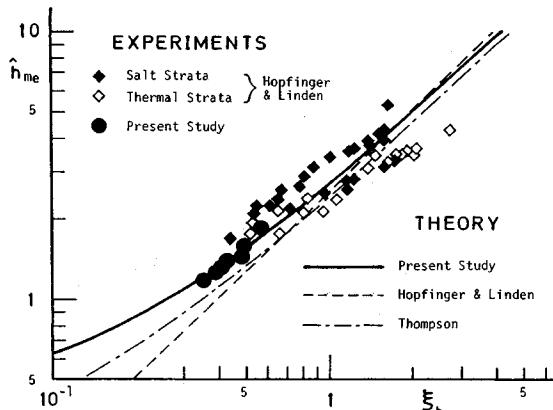


図-8 平衡水深  $h_{me}$  に関する理論値、式(35) (実線) と実験値との比較

づいて彼らが得た半理論式であり本研究の記号を用いて書き改めれば次式で表わせる。

上式は式(35)と本質的な差異を有するものではないが、「振動格子中心-水面」間の距離  $d$  (あるいは  $\lambda_0 = d/h_{me}$ ) を考慮に入れていないために  $\xi_0$  の小さな領域では  $\hat{h}_{me}$  の値を幾分過小に評価している。一方、Thompson<sup>6)</sup>は振動格子乱流の統計特性に着目して平衡水深に関する理論解析を行い、次の結果を得ている。

これを図-8中に一点鎖線で併記する。

ところで、前節においては連行量に関する実験結果を $-1$ 乗の連行則に適合させることによって定数係数としての $\eta_{b0}$ を得たが、ここで示した平衡条件からも $\eta_{b0}$ を同定することが可能である。すなわち $\lambda_0=0$ の場合について上記3式中の係数どうしを比較し、式(35)と(36)との比較から $\eta_{b0}=3.42$ 、(35)と(37)との比較から $\eta_{b0}=2.77$ なる値をそれぞれ得る。これらを図-6中にわのわの一点鎖線、二点鎖線で示す。両者はともに連行量に関する実験から得られた値 $\eta_{b0}=3.04$ (実線)やエネルギー平衡式から理論的に誘導された値(破線)と大きく異なるものではない。

## 6. 混合過程の理論解析

前節までに得られた連行則と図-1の二層系に対する浮力保存式を連立させて、所定の初期条件のもとに積分すれば、混合層諸量の経時変化に関する理論解を導出することができる。

まず、式(33)の連行則を式(31), (34)を用いて書き直せば混合速度に関する次式を得る。

$$\frac{dh_m}{dt} = C_1 \frac{u_s'^3}{\varepsilon g l'_s} - \frac{1}{\eta^3 \beta} \cdot \frac{u_b^3}{\varepsilon g h_m} \dots \dots \dots \quad (38)$$

次に混合層内の浮力保存は次式で与えられる。

初期条件として

を与える。いま、

$$\hat{h}_m = \frac{h_m}{h_{m_0}}, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \tau_3 = \hat{U}_{b0}^3 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 G}{h_{m_0}}} \cdot t \quad \dots \dots \dots \quad (41)$$

なる無次元化を施せば、式(38)と(39)はおのれ

$$\frac{d\hat{h}_m}{d\tau_3} = \frac{\{C_1\eta_{b0}^3\xi_b^4\hat{h}_m(\hat{h}_m - \lambda_0)^{-4} - \hat{h}_m\}}{\beta\eta_{b0}^3\xi_b\hat{h}_m} \dots\dots\dots(42)$$

となる。初期条件も同様に無次元化されて

となる。

まず式(43)を式(44)の条件のもとに積分して

を得る。次に式 (45) を (42) に代入すれば  $\hat{h}_m$  に関する常微分方程式

$$\frac{d\hat{h}_m}{C_1 \eta_{b0}^3 \xi_b^4 \hat{h}_m (\hat{h}_m - \lambda_0)^{-4} - \hat{h}_m} = \frac{1}{\beta \eta_{b0}^3} \frac{d\tau_3}{1 + \tau_3} \dots \quad (46)$$

を得る. 式 (44) の初期条件を用いてこれを積分すると  
 $\hat{h}_m$  の解として最終的に次式を得る.

ただし、ここで  $\Phi \equiv C_1^{1/4} \eta_0^{3/4} \xi_0$  とおいている。上式によつて陰形式ではあるが混合層厚さ  $\hat{h}_m$  が時間  $\tau_3$  の関数として与えられる。これを用いて相対密度差  $\epsilon$  の経時変化もまた式 (45) から求めることができる。 $\lambda_0=0$  の場合にはこれらは簡単になり陽形式で次式のように与えられる。

$$\hat{h}_m = [(1 - C_1 \eta_{bb}^3 \xi_b^4)(1 + \tau_3)^{-\frac{4}{B\eta_{bb}^3}} + C_1 \eta_{bb}^3 \xi_b^4]^{\frac{1}{4}} \dots \dots \dots (48)$$

$$\hat{\varepsilon} = (1 + \tau_3)[(1 - C_1 \eta_{bo}^3 \xi_b^4)(1 + \tau_3)^{-\frac{4}{B\eta_{bo}^3}} + C_1 \eta_{bo}^3 \xi_b^4]^{-\frac{1}{4}}$$

.....(49)

式(48)から  $\tau_3 \rightarrow \infty$  の漸近解として

が得られる。上式は十分時間が経過した後の平衡状態における混合層厚さ  $\hat{h}_{me}$  の値を与える式 (35) において  $\lambda_0 = 0$  とおいたものに等しい。図-9 (a), (b) に式 (48) と (50) の関係を示す。

図-10 は相対密度差  $\hat{\epsilon}$  の解、式(49)を示している。

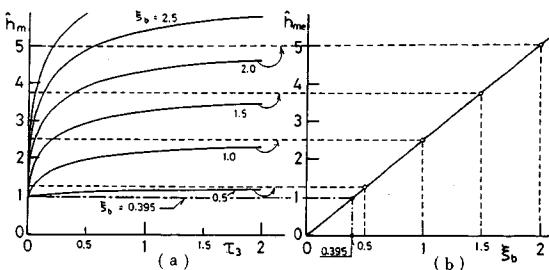


図-9 混合層の発達と平衡水深との関係

- (a) 混合層厚さ  $\hat{h}_m$  の経時変化に関する理論値 ( $\lambda_0=0$ )  
 (b) 平衡水深  $\hat{h}_{me}$  とバラメーター  $\xi_m$  の関係 ( $\lambda_0=0$ )  
 ( $\eta_{bo}$  は図-6中の破線で示される理論値を用いている)

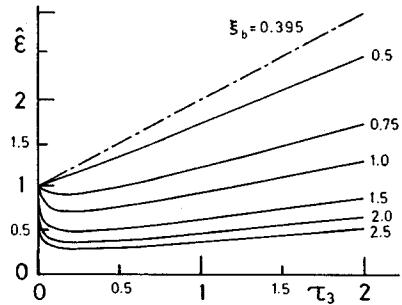


図-10 相対密度差  $\hat{\epsilon}$  の経時変化に関する理論値 ( $\lambda_0=0$ )  
 (  $\eta_{bo}$  は図-6 中の破線で示される理論値を用いている)

式(49)からもわかるように  $\tau_3 \rightarrow \infty$  の平衡状態において  $\hat{\epsilon}$  は時間に比例して増大する。

式(47), (45)から与えられる  $\hat{h}_m$ ,  $\hat{\epsilon}$  の理論解と実験値との比較をおのの図-11, 12に示す。 $\xi_0$  が小さいほど、すなわち安定な浮力フラックスの混合抑制効果が相対的に大きくなるほど、混合層の発達は抑制され相対密度差がより増大しやすくなる様子が両図よりわかる。

7. 結論

受熱期における停滞水域表層近傍の水温構造に焦点をあて、機械的擾乱が作用しつつ安定な浮力フラックスが水面より供給される場合の鉛直混合特性について検討を行い以下の結論を得た。

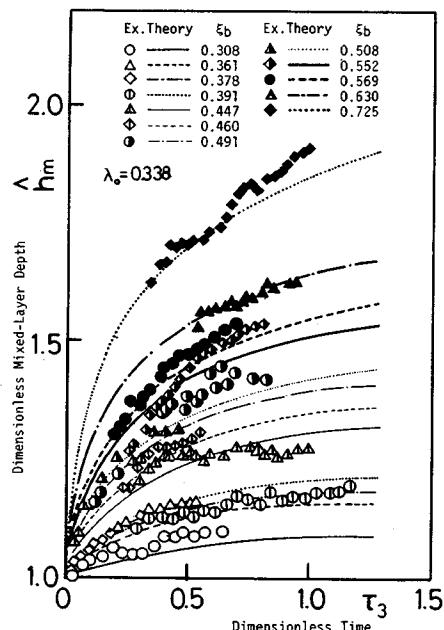


図-11 混合層厚さ  $\hat{h}_m$  の実験値と理論値の比較 ( $\lambda_0 = 0.338$ ,  $\eta_{b0} = 3.04$ )

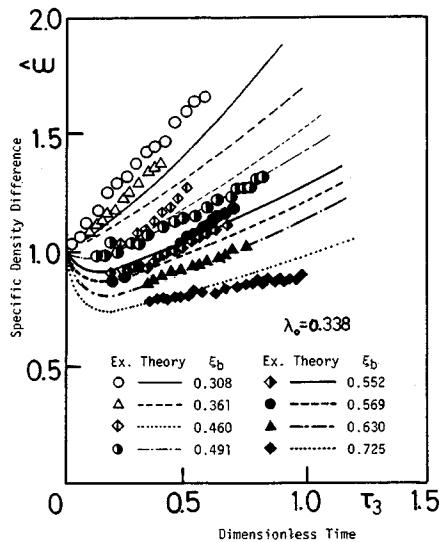


図-12 相対密度差  $\bar{\epsilon}$  の実験値と理論値との比較 ( $\lambda_0=0.338$ ,  $\eta_{00}=3.04$ )

(1) 簡単なエネルギー的考察に基づいて乱れエネルギー・フラックスの収支に関する理論解析と連行則の誘導を行った。浮力フラックスの解析結果についてはある程度実際現象を説明し得るものと予想されるが、乱れの拡散・逸散項に関しては理論の妥当性を検証し得る計測例がないため現時点ではエネルギー収支の定性的な議論にとどまる。特に躍層内の情報が欠如しており、より正確な乱流構造を得るためにも有効な計測手法の開発が期待される。

(2) 連行特性に関しては解析結果と実験値との間である程度十分な適合が得られた。また、さらにこれをもとにして  $\eta_{00}$  の値を実験的に補正し、実験値とより整合性の高い連行則が誘導された。

(3) 得られた連行則を用いて、安定な浮力フラックスの混合抑制効果と機械的擾乱の混合促進効果とがつり合う平衡条件が誘導され、従来の水理実験値や理論解析値ともよい一致が得られた。

(4) 連行則をもとにして混合層の発達過程を記述する厳密解が誘導され、混合層厚さ、相対密度差とともに実験値とよく一致した。

著者らは別途、振動格子による機械的擾乱効果を風応力による機械的擾乱効果に換算することによって本研究成果を自然湖沼に適用し、受熱後期におけるゆっくりとした躍層低下現象を良好に再現し得ることをすでに確認している<sup>7)</sup>。より時間スケールの小さい躍層挙動に対しても同様に考えれば、受熱期において日～時間の単位で小刻みかつ敏感に応答する表層水温の変動特性を正確に評価することができ、表層水の選択取水の効率化を期することができよう。

#### 参考文献

- 1) 室田・道奥：機械的擾乱と熱的擾乱が複合的に作用する水温成層場での鉛直混合量に関する研究、土木学会論文集、第369号／II-5, pp. 61~70, 1986.
- 2) 室田・道奥：機械的擾乱と熱的擾乱が複合的に作用する水温成層場での内部変動特性に関する研究、土木学会論文集、第375号／II-6, pp. 171~179, 1986.
- 3) Turner, J. S. : The influence of molecular diffusivity on turbulent entrainment across a density interface, J. Fluid Mech., Vol. 33, pp. 639~659, 1968.
- 4) Hopfinger, E. J. and Linden, P. F. : Formation of thermoclines in zero-mean-shear turbulence subjected to a stabilizing buoyancy flux, J. Fluid Mech., Vol. 114, pp. 157~173, 1982.
- 5) Hopfinger, E. J. and Toly, J. A. : Spatially decaying turbulence and its relation to mixing across density interfaces, J. Fluid Mech., Vol. 78, pp. 155~175, 1976.
- 6) Thompson, R. O. R. Y. : Formation of thermoclines in zero-mean-shear turbulence, J. Geophysical Res., Vol. 89, pp. 8017~8021, 1984.
- 7) 室田・道奥・阪口：停滞成層水域の水温構造年周変化に関する考察、第32回水理講演会論文集、pp. 263~268, 1988.
- 8) 室田・道奥・口田：複合因擾乱により誘起される鉛直混合現象の数値解析、土木学会論文集、第393号／II-9, pp. 67~76, 1988.

(1987.12.26・受付)