

# 非円形断面直線流路の2次流に対する乱流モデルについて

## NOTE ON TURBULENCE MODELING FOR SECONDARY FLOWS IN PASSAGES OF NON-CIRCULAR CROSS-SECTION

河原能久\*・玉井信行\*\*

By Yoshihisa KAWAHARA and Nobuyuki TAMAI

The mechanism for maintaining turbulent secondary flows in ducts and open channels of non-circular cross section is examined from a theoretical standpoint. It is proven mathematically that no turbulence model based on isotropic eddy viscosity concept predicts secondary motion. Furthermore, necessary conditions for a turbulence model which includes driving mechanism of the secondary flow are briefly discussed.

*Keywords:* secondary flow of the second kind, turbulence model, isotropic eddy viscosity

### 1. はじめに

長方形などの非円形断面の直線管路や開水路の乱流ではプラントルの第2種2次流が形成され、断面内において主流速度の等値線が隅角部に向かって張り出す形状となることが知られている（Fig.1）。このような流れの構造について多くの測定および検討が行われ、非等方非一様なレイノルズ応力により2次流が維持されていること、2次流の大きさは高々主流速度の2~3%程度であり小さいが、主流速度の等値線を大きくひずませることや摩擦損失係数を増加させることなどが確認されている<sup>1)~3)</sup>。

最近、乱流モデルが発展させられており、多方面の複雑な流れに適用されている。そのなかで、2方程式モデル（Two-equation model）に分類される  $k-\epsilon$  モデルは三次元流れ場の解析に最も多く利用されている。しかし、 $k-\epsilon$  モデルのように等方的な渦動粘性係数を用いた乱流モデルでは非円形断面の直線流路の2次流を算出できないことが数値計算の経験から知られている<sup>4),5)</sup>。そして、第2種2次流の計算のためには、代数的応力モデル

(Algebraic Reynolds stress model)<sup>5),6)</sup>や応力方程式モデル (Reynolds stress model)<sup>7)</sup>などのように渦動粘性係数の概念を用いない乱流モデルや、 $k-\epsilon$  モデルに非線形項を加えたモデル<sup>8),9)</sup>などが有効であると考えられている。実際、そのようなモデルが正方形や長方形などの横断面形状の管路や開水路の流れに適用され良好な結果が得られつつある。

このノートの目的は、等方的な渦動粘性係数を用いた乱流モデルが第2種2次流を再現しないという経験的事実を解析的に証明し、その理由を考察することである。また、その結果に基づいて、乱流モデルが2次流を表現するために必要な条件について検討することである。

### 2. 命題および基礎方程式

#### (1) 命題と前提条件

証明すべき命題は以下のようである。

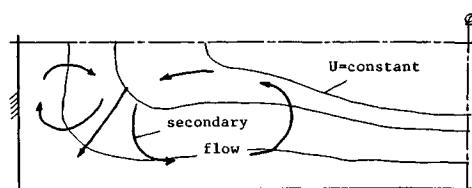


Fig.1 Schematic view of flow in a rectangular duct.

\* 正会員 工博 東京大学講師 工学部土木工学科  
(〒113 文京区本郷7-3-1)

\*\* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科（同上）



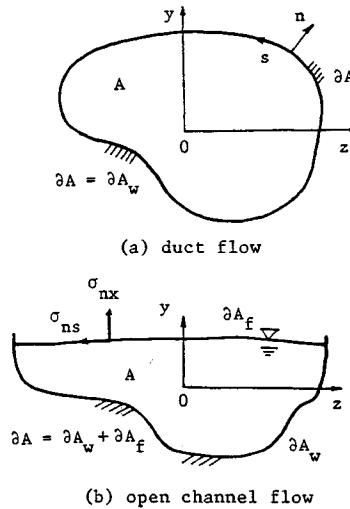


Fig. 2 The coordinate systems.

平均流速に対する境界条件を流れ関数で記述すると以下のようにになる。

$$\psi=0 \text{ or } \psi_s=0, \quad \psi_{,n}=0 \quad \text{on } \partial A_w \dots (17)$$

ここで、 $s$  は壁面に沿う方向、 $n$  は壁面に垂直方向を示す。

境界条件式 (16), (17) を用いると、式 (15) の右辺の各項はゼロとなることが明らかである。なお、右辺第 1 項の圧力は前提条件 (d) より一価の関数であるから、それを含む積分値はゼロである。一方、前提条件 (e) より渦動粘性係数が非負であることから、左辺は非負である。したがって式 (15) が成立するための条件は流れ場の任意の位置で次式が成り立つことである。

$$\psi_{,yy}=\psi_{,yz}=\psi_{,zz}=0 \dots (18)$$

これより、 $\psi_{,y}$ ,  $\psi_{,z}$  は全領域で一定である。境界条件式 (17) を考慮すれば、その一定値はゼロであることがわかる。すなわち、2次流は全領域でゼロであり存在しない。

## (2) 開水路流れ (Fig. 2 (b))

壁面での境界条件は、管路流れの場合と同一であり式 (17) で与えられる。一方、自由水面での境界条件は、水面を垂直に横切る流速がゼロであることと水面に作用するせん断応力（レイノルズ応力と分子粘性による応力との和であり、 $\sigma_{nx}$ ,  $\sigma_{ns}$  と表記する）がゼロであることである。それらは以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} V_n=0, \quad V_{n,s}=0, \quad \sigma_{nx}=(\mu+\mu_t)U_{,n}=0 \\ \sigma_{ns}=(\mu+\mu_t)(V_{s,n}+V_{n,s})=0 \quad \text{on } \partial A_f \dots (19) \end{aligned}$$

ここで、 $U$  は主流方向の平均速度である。上式を流れ関数で表現すると次式となる。

$$\psi_{,s}=0, \quad \psi_{,ss}=0, \quad \psi_{,nn}=0 \dots (20)$$

したがって、水面では以下の関係が成り立つ。

$$\Delta\phi=0, \quad E_{,n}=V_nV_{n,n}+V_sV_{s,n}=0 \quad \text{on } \partial A_f \dots (21)$$

境界条件式 (21) より、式 (16) の右辺の積分は開水路流れにおいてもゼロである。したがって、管路流れの場合と同様に 2 次流は存在しない。

## 4. 考 察

式 (15) と式 (6) とを対比させながら、等方的な渦動粘性係数を用いる乱流モデルが第 2 種 2 次流を生成しない理由を考えてみる。式 (15) より、移流項や圧力勾配、ポテンシャル力を表わす右辺第 1 項は乱流モデルとは無関係にゼロであり、それらの項は 2 次流への運動エネルギーの補給ではなく再分配の役割を果たしていることがわかる。したがって、2 次流の生成、維持に基本的な役割を担っているのはレイノルズ応力である。等方的な渦動粘性係数を用いた乱流モデルが 2 次流を算出できないのは、レイノルズ応力  $-\rho\bar{v}^2$ ,  $-\rho\bar{w}^2$ ,  $-\rho\bar{vw}$  を通して主流の運動エネルギーを 2 次流に供給することができないためである。このことは、2 次流に主流の運動エネルギーを輸送するモデルには主流速度の断面方向の勾配を含むことが必要であることを意味している。第 2 種 2 次流を算出するために利用されている乱流モデルの例を挙げると Table 1 のようである。2 つのモデルとも確かにレイノルズ応力に主流の速度勾配を含んでいる。

次に、第 2 種 2 次流を算出する乱流モデルの必要条件を考えてみる。まず、モデルが式 (6) のレイノルズ応力を含む項の全領域にわたる積分値に対して、円形以外の任意の断面形状に対して正の値を与えることが必要である。負あるいはゼロを与えるモデルは物理的に矛盾をもつものである。2 番目に、流れの場が層流の場合、渦動粘性係数が全領域でゼロである。式 (15) から知られるように、この場合にも断面内の流れは生じ得ない。このことを用いて主流方向の渦度方程式 (5) を考える。式 (5) の右辺第 2 項から第 5 項までの和が任意の地点

Table 1 Turbulence models for secondary flow.

### (a) Launder-Ying model<sup>[5]</sup>

$$-\rho\bar{v}^2=-\rho c_k k + c' \mu_t \frac{k}{\epsilon} U_{,y}^2$$

$$-\rho\bar{w}^2=-\rho c'_k k + c' \mu_t \frac{k}{\epsilon} U_{,z}^2$$

$$-\rho\bar{vw}=-c' \mu_t \frac{k}{\epsilon} U_{,y} U_{,z}$$

### (b) Speziale model<sup>[9]</sup>

$$-\rho\bar{v}^2=-\frac{2}{3} \rho k + \frac{c_o}{12} \rho l^2(U_{,y}^2 - 2U_{,y}^2) + \frac{c_E}{3} \rho l^2(U_{,y}^2 + U_{,z}^2)$$

$$-\rho\bar{w}^2=-\frac{2}{3} \rho k + \frac{c_o}{12} \rho l^2(U_{,z}^2 - 2U_{,z}^2) + \frac{c_E}{3} \rho l^2(U_{,y}^2 + U_{,z}^2)$$

$$-\rho\bar{vw}=\frac{c_o}{4} \rho l^2 U_{,y} U_{,z}$$

$$l=c k^{3/2}/\epsilon$$

$c_k$ ,  $c'$ ,  $c_o$ ,  $c_E$ ,  $c$  : constants.

$\epsilon$  : energy dissipation rate.

でゼロとなるようなモデルでは、層流と同一の式となり 2 次流を生じさせない。この第 2 項から第 5 項までの和が恒等的にはゼロでないという条件は、前述の 2 次流を再現するモデルがレイノルズ応力  $-\rho\bar{v}^2$ ,  $-\rho\bar{w}^2$ ,  $-\rho\bar{v}\bar{w}$  の表現に主流の速度勾配を含む必要があることを考えると、 $\rho\bar{w}^2 - \rho\bar{v}^2$ ,  $-\rho\bar{v}\bar{w}$  が主流速度の勾配を含むというより厳しい条件に言い換えることができよう。もとより、ここに述べた条件は十分条件ではない。第 2 種 2 次流に対する乱流モデルにはまだ多くの未解明な点がある<sup>10)</sup>。レイノルズ応力場の詳細な検討が、特に異方性の強い壁面や自由水面近傍について必要であると考えられる。

## 5. あとがき

非円形断面をもつ直線流路の乱流でみられる第 2 種 2 次流は、等方的な渦動粘性係数を用いるモデルでは再現されないことを解析的に示した。この証明の応用として乱流モデルの改良や数値計算について以下のことがいえる。

(a) 第 2 種 2 次流の維持には壁面近傍や自由水面近傍のレイノルズ応力の非等方性が大きく関与する。乱流モデルを改良して壁面や自由水面の効果を取り入れるようにして、等方的な渦動粘性係数を用いる限りこの 2 次流を再現することはできない。

(b) 流れ場の数値解析の多くでは、流れ場を壁面まで解かず、壁関数 (wall function)<sup>4)</sup> を用いて流れの対数則が成立する領域から内部を求める。その場合には、境界条件は対数則が成り立つ位置で与えられ、壁面で指定されるのではない。等方的な渦動粘性係数を用いる乱流モデルを使用し、境界でレイノルズ応力に非等方性を与えれば（たとえば、応力方程式モデルで使用する壁関数<sup>11)</sup> を用いると）誤った 2 次流を算出してしまう。この種の誤りは、断面形が複雑になるほど起こりやすい。湾

曲流路の流れを  $k-\epsilon$  モデルで解析する際など、直線流路の流れを解くことはコンピュータコードのなかの境界条件の処理ルーチンの検証として意味がある。

## 参考文献

- 1) Brundrett, E. and Baines, W.D. : The production and diffusion of vorticity in duct flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 19, pp. 375~394, 1964.
- 2) Perkins, H.J. : The formation of streamwise vorticity in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 44, 721~740, 1970.
- 3) 伸津家久・中川博次：一樣開水路および閉管路の三次元乱流構造に関する研究、土木学会論文集、第 369 号、II-5, pp. 89~98, 1986.
- 4) Rodi, W. : Turbulence Models and Their Application in Hydraulics, IAHR, Delft, 1980.
- 5) Launder, B.E. and Ying, W.M. : Prediction of flow and heat transfer in ducts of square cross-section, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 187, pp. 455~461, 1973.
- 6) Naot, D. and Rodi, W. : Calculation of secondary currents in open channel flow, *J. Hydraulics Div.*, ASCE, Vol. 108, HY 8, pp. 948~968, 1982.
- 7) Reece, G.J. : A generalized Reynolds stress model of turbulence, Ph.D. Thesis, Imperial College, London, 1976.
- 8) 西島勝一・吉沢 徹：非等方  $k-\epsilon$  モデルを用いた矩形管内乱流の数値解析、生産研究、38巻、1号、pp. 46~49, 1986.
- 9) Speziale, C.G. : On nonlinear  $k-l$  and  $k-\epsilon$  models of turbulence, *J. Fluid Mech.*, Vol. 178, pp. 459~475, 1987.
- 10) Demuren, A.D. and Rodi, W. : Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts, *J. Fluid Mech.*, Vol. 140, pp. 189~222, 1984.
- 11) 甲藤好郎ほか編著：伝熱学特論、養賢堂, pp. 297, 1984.

(1988.2.24・受付)

●出版案内●

# 水理公式集

B5判 642ページ上製・ビニールケース入り 14,000円 会員特価 12,000円(税込)

●主要目次●  
第1編 基礎水理編 1. 水理の基礎 2. 開水路の水理 3. 管水路の水理 4. 浸透流 5. 渦 6. 扇散 7. 噴流 8. 密度流 9. 流体力および流力弹性振動 10. 波 11. 環境水理 12. 資料解析 13. 数値解析  
第2編 水文編 1. 水文統計 2. 流域と流出過程 3. 流出解析 4. 水文予測 5. 水資源計画  
第3編 河川編 1. 流れと観測 2. 河川の不等流 3. 局部流 4. 洪水流 5. 流砂 6. 土砂生産と流出 7. 河床変動 8. 河川構造物の水理  
第4編 発電編 1. せきと越流頂 2. ゲートおよびバルブ 3. 跳水と減勢工 4. 水撃作用 5. サージタンク 6. 地震時動水圧 7. 貯水池の環境水理 8. 冷却水取放水  
第5編 上下水道・水質保全編 1. 地下取水とその保全 2. 送配水と下水の集水 3. 流量計およびポンプ 4. 水処理 5. 市街地雨水流出・汚濁流出 6. 汚泥の運動と脱水 7. 水域の水質環境  
第6編 海岸・港湾編 1. 波浪 2. 波浪推算と波浪の長期統計 3. 波の変形 4. 波と構造物 5. 漂砂および海浜過程 6. 潮汐・潮流および長周期水位変動と流れ 7. 津波および高潮 8. 沿岸域における密度流現象 9. 沿岸における水質拡散

● お申込みは土木学会または全国主要書店へ ●

●出版案内●

# 水理公式集例題集

B5判 310ページ 定価 7,000円 会員特価 6,000円(税350円)

●本書は、水理公式集（昭和60年版）に採用されている公式・図書等に基づいて具体的な水理計算・水理設計およびそれらの実施例につき、例題・解説を提示することによって、  
(1) 公式の考え方、意義を正しくとらえ、理解を深める、  
(2) 公式の適用の仕方、あるいはどの公式が実務のどの面に関係があるかを総合的な例題を通して体得する、  
(3) 新公式集で不足しがちな図表などを補い、実際の水理現象に即した分析ができるようとする、

ことを主たる目的として、水理学を専門としない一般実務者を対象に編纂したものであり、座右の書として活用されますようおすすめします。

●目次●  
第1編 基礎水理編／第2編 水文編／第3編 河川編／第4編 発電編／第5編 上下水道・水質保全編／第6編 海岸・港湾編

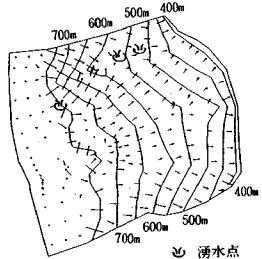
● お申込みは土木学会または全国主要書店へ ●

地下水解析のことなら **CRC**

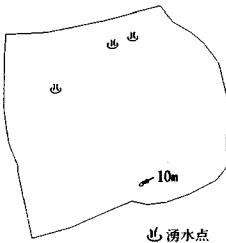
日本初!!逆解析手法による  
地下水変動解析プログラム

# UNISSF

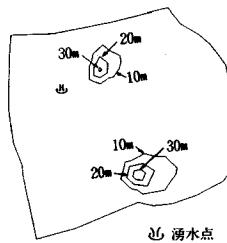
スピーディな同定・安価な解析



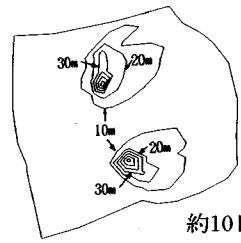
初期状態の地下水流



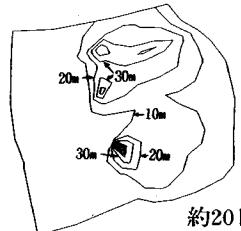
トンネル掘削開始直後



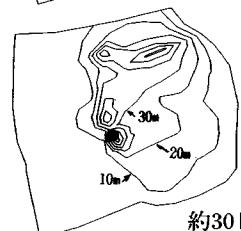
約4日後



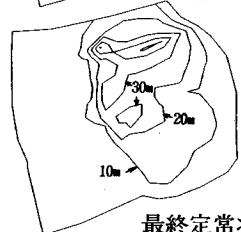
約10日後



約20日後



約30日後



最終定常状態

特長 ○有限要素法による準3次元解析を中心とした  
地下水の流れのトータルシステムです。

○観測水位と計算水位より、非線形最小二乗法を用いて  
帶水層定数の同定が可能です。(逆解析手法)

○建設・土木工事(掘削・ディープウェルその他)の  
解析に対応する多くの機能を備えています。

○メッシュ・ジュネレータにより、  
モデル(要素分割)作成の手間を軽減できます。

○図化処理プログラムにより、  
結果の確認が容易に行えます。

機種: FACOM-Mシリーズ, HITAC-Mシリーズ  
IBM303X, 308X, 43XX, CRAY  
NEC ACOSシリーズ, DEC VAX11 他

このシステムは、情報処理振興事業協会の委託を受けて開発したものです。

**IPA 情報処理振興事業協会**

**CRC センチュリリサーチセンタ 株式会社**

大阪市東区北久太郎町4-68  
(06-241-4121) 担当: 岩崎、中屋

# 土と水の連成逆解析プログラム(UNICOUP)

ついにベールを脱いだ!  
**UNICOUP** 新発売

CRC

## 特長

- ① 応力と地下水の流れをカップルさせた問題が解析可能です  
(圧密含む)
- ② 地下水の流れは飽和・不飽和域を対象としています。
- ③ 多段掘削・盛土や降雨等が扱えます。
- ④ 梁や連結要素も扱え実用的です。

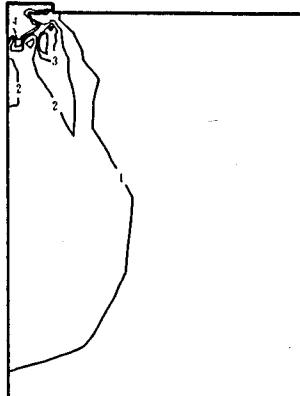
⑤ 経時観測記録(変位・水位)があれば、非線形最小二乗法に基づき変形係数や透水係数が逆解析できます。(順解析、逆解析がスイッチにて選択可能です。)

⑥ 弹性・非線形弾性・弾塑性・粘弾塑性を示す地盤が扱えます。  
(関口・太田モデル・カムクレイモデル使用可)

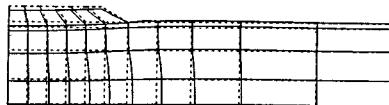
## 対応機種

FACOM-Mシリーズ, HITAC-Mシリーズ  
IBM303X, 308X, 43XX, CRAY  
NEC ACOSシリーズ, DEC VAX11  
シグマワークステーション  
(その他別途相談に応じます。)

□ (荷重)



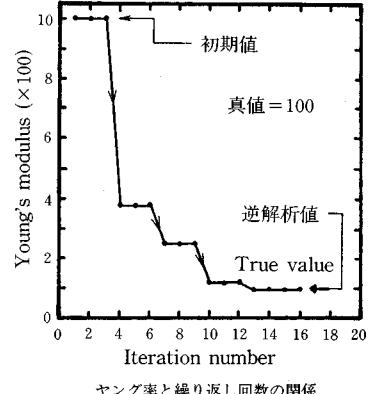
応力増分コンター( $\Delta\sigma_v$ )  
(10日後)



盛土(40日)後の地盤の変形



盛土(40日)後の地下水の流れと水頭  
センターおよび自由水面



逆解析によるパラメータの推定

**CRC センチュリリサーチセンタ 株式会社**

**IPA 情報処理振興事業協会**

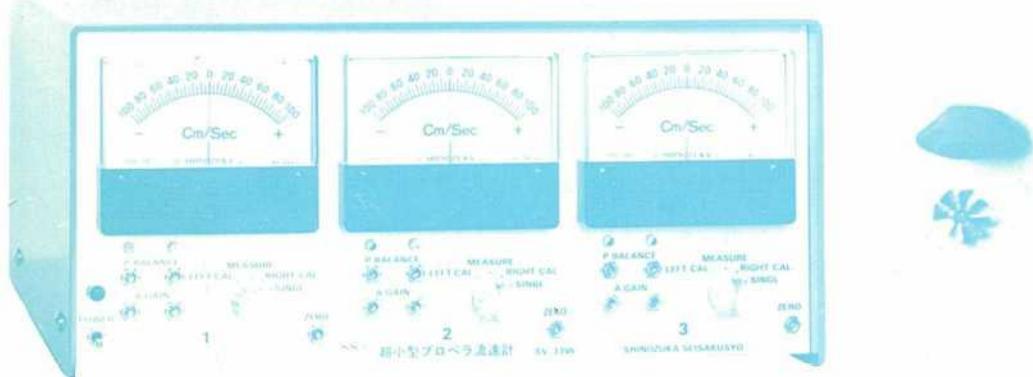
このシステムは、情報処理振興事業協会の委託を受けて開発したものです。

## 問合せ先

大阪市東区北久太郎町4-68

(06-241-4121)担当: 岩崎、

# 直径3ミリ 水理実験用に理想的 超小型プロペラ流速計 3チャンネル SV-33W型



## ● プロペラ検出器軸長

30~50cm, 軸の曲ったものも製作致します。

## 特徴

- ◎ 赤外線の回転検出で水温や水質に影響されません。
- ◎ 往復流の正逆判別は高感度で確実です。
- ◎ 正逆判別のないシングルのプロペラも使用出来ます。
- ◎ 独自の橿円軸に依り流れを乱すことが非常に小さくて済みます。
- ◎ プロペラが小さいので流速100cm/secで800~900パルスと高い分解能です。

A C サーボ水位計 SL-4 SL-20 SL-40

水理実験用測定器専門



篠塚製作所

〒196 東京都昭島市玉川町2-8-21 電話 0425-44-1731