

BEM-FEM 結合法による二次元弾性定常波動場の解析

BEM-FEM COUPLING ANALYSIS OF THE TWO-DIMENSIONAL
ELASTIC WAVE FIELD IN STEADY STATE

上杉真平*・大津政康**

By Shinpei UESUGI and Masayasu OHTSU

As a numerical technique, the Finite Element Method (FEM) is versatile for evaluating problems with complex geometries and materials. It is, however, not efficiently applicable to problems of wave scattering in an infinite domain. The Boundary Element Method (BEM) has been used very effectively in elastic wave problems with a homogeneous infinite domain. Therefore, it is reasonable to couple the FEM with the BEM in order to provide a single methodology for analyzing problems including non-homogeneous materials in an infinite domain. In the present paper, a method to couple a BEM domain with a FEM domain is proposed on the basis of the variational principle. To demonstrate the usefulness of the proposed method, P, SV and SH wave fields were investigated. From the results, applicability of the proposed method is discussed.

Keywords: indirect BEM formulation, coupling analysis, variational principle, elastodynamic problem

1. はじめに

有限要素法 (Finite Element Method, FEM) は工学上の問題を解く方法としてよく知られており, 広い範囲の解析に用いられている. しかし, 応用面で幅広い可能性をもっているにもかかわらず, FEM にはいくつかの欠点があり, その例として, 特異性がある問題や無限領域の問題に対しては, その適用性が大きく制限される. 一方, 近年注目されるようになった境界要素法 (Boundary Element Method, BEM) は, 上述のような FEM が適さない特異場とか無限領域問題に対してきわめて有効であることが知られている¹³⁾.

このようなことから, 対象とする領域において FEM が適用しにくい部分を BEM で, BEM で取り扱うことが難しい不均質性や非線形性を含む部分を FEM でモデル化して解析する, いわゆる結合法が開発できるならば, より現実的な数値計算法として有用であると考えられる^{1)-3), 16)}. これまでに, 動弾性の分野における結合解析の適用例としては, 不均質⁴⁾や粘弾性⁵⁾の問題ある

は過渡的解析⁶⁾などについて研究が行われている. これらの手法は, それぞれ周波数領域あるいは時間領域において定式化されているが, いずれも BEM の直接法に基づいており, この点でここに提案した BEM の間接法を用いた解析法とは異なっている.

著者らは, 変分原理に基づいた BEM と FEM の結合法の定式化を用い, すでにポテンシャル問題においてその妥当性を確認した⁸⁾. そこで, 本論文では, さらに本手法を P, SV および SH 波による弾性定常波動問題に適用し, いくつかの数値計算例を通してその有用性を検討することを試みる.

2. 基礎方程式と解の積分表示

対象とする弾性体が均質, 等方かつ線形であるとし, 平面ひずみ状態を仮定して物体力を無視すると, その定常状態における運動方程式は, テンソル表示を用いて次のように Navier-Cauchy の式で与えられる.

$$\begin{aligned} \text{面内: } & \left(\frac{k_s^2}{k_p^2} - 1 \right) u_{\beta, \alpha\beta}(x) + u_{\alpha, \beta\beta}(x) \\ & + k_s^2 u_\alpha(x) = 0 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\text{面外: } u_{3, \beta\beta}(x) + k_s^2 u_3(x) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに, $u(x)$ は変位ベクトルを表わし, $k_s = \omega/C_s$, $k_p = \omega/C_p$ は, それぞれ横波および縦波の波数であり,

* 正会員 工修 熊本工業大学助手 工学部土木工学科
(〒860 熊本市池田 4-22-1)

** 正会員 工博 熊本大学助教授 工学部土木工学科
(〒860 熊本市黒髪 2-39-1)

C_s は横波の速度, C_p は縦波の速度, ω は円振動数である。また, 下指標のギリシャ文字は 1, 2 をとるものとし, 総和規約を適用する。

いま, 境界 S をもつ等方, 均質かつ線形な弾性体領域 D において, 式 (1) および (2) の解が一重層ポテンシャルによって表わされるものとする, 次のように表現される¹⁵⁾。

$$\text{面内: } u_\alpha(x) = \int_S G_{\alpha\beta}(x, y) f_\beta(y) dC \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{面外: } u_3(x) = \int_S G_{33}(x, y) f_3(y) dC \dots\dots\dots (4)$$

ここに, $f(y)$ は一重層密度または積分密度とよばれるものである。また, $G_{ij}(x, y)$ は式 (1), (2) の基本解であって, 無限領域においては次のように求められている。

$$\begin{aligned} \text{面内: } G_{\alpha\beta}(x, y) = & \frac{i}{4\mu} [H_0^{(1)}(k_s r) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{k_s^2} \{H_0^{(1)}(k_s r) \\ & - H_0^{(1)}(k_p r)\}_{\alpha\beta}] \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\text{面外: } G_{33}(x, y) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s r) \dots\dots\dots (6)$$

上式中, $H_0^{(1)}$ は第一種 Hankel 関数, r は点 x と y の距離, $\delta_{\alpha\beta}$ は Kronecker のデルタである。また, μ はせん断弾性係数を表わす。

ここで, 境界 S が滑らかであるとする, 点 x の領域内部から境界への極限をとることによって次の特異積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \text{面内: } t_\alpha(x) = & \frac{1}{2} f_\alpha(x) + \int_S T_{\alpha\beta}(x, y) f_\beta(y) dC \\ & \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{面外: } t_3(x) = & \frac{1}{2} f_3(x) + \int_S T_{33}(x, y) f_3(y) dC \\ & \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}(x, y) = & \mu \left\{ G_{\alpha\beta,\gamma}(x, y) n_\gamma + G_{\gamma\beta,\alpha}(x, y) n_\gamma \right. \\ & \left. + \frac{2\nu}{1-2\nu} G_{\eta\delta,\gamma}(x, y) n_\alpha \right\} \end{aligned}$$

$$T_{33}(x, y) = \mu G_{33,\beta}(x, y) n_\beta$$

である。ここに, $t(x)$ は境界上の表面力を意味し, ν はポアソン比である。

これまで提案されている手法は, 多くの場合 BEM の直接法に基づいた定式化がなされているが, 境界条件として応力が与えられる定常問題では, 直接法に比べて計算上の取り扱いが簡単であることと所要精度に応じた積分範囲の決定が可能である¹¹⁾ という理由から, ここでは一重層ポテンシャルによって表わされる BEM の間接法を用いている。

3. 結合解析の定式化

Fig. 1 に示すような境界 $B = B_1 \cup B_2$ をもつ領域 $R = D \cup A$ において, 二次元定常波動場の汎関数は, Hu-Washizu の定理⁹⁾ より次のように表わされる。なお, 下指標のローマン文字は 1, 2, 3 をとり, またギリシャ文字は 1, 2 をとるものとする。

$$\begin{aligned} \text{面内: } \pi = & \frac{1}{2} \int_R (m u_{\alpha,\alpha} u_{\beta,\beta} + u_{\alpha,\beta} u_{\alpha,\beta} + u_{\alpha,\beta} u_{\beta,\alpha} \\ & - k_s^2 u_\alpha u_\alpha) dS - \int_{B_2} u_\alpha \bar{t}_\alpha dC \\ & - \int_{B_1} g_\alpha (u_\alpha - \bar{u}_\alpha) dC \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{面外: } \pi = & \frac{1}{2} \int_R (u_{3,\alpha} u_{3,\alpha} - k_s^2 u_3^2) dS - \int_{B_2} u_3 \bar{t}_3 dC - \\ & \int_{B_1} \bar{t}_3 (u_3 - \bar{u}_3) dC \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ただし,

$$m = \frac{2\nu}{1-2\nu}$$

$$g_\alpha = \frac{1}{\mu} \bar{t}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

であり, 境界条件として以下のように与えられているものとする。

$$\begin{aligned} u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad B_1 = B_{11} \cup B_{b1}, \quad i = 1, 2, 3 \\ \bar{t}_i = \bar{t}_i \quad \text{on} \quad B_2 = B_{22} \cup B_{b2} \end{aligned}$$

ここに, 積分記号の添字 R は領域積分を意味し, また, B_1 は境界条件として変位が既知である変位境界であり, B_2 は境界条件として応力が与えられている応力境界である。なお, B_{11} , B_{22} と B_{b1} , B_{b2} は, それぞれ有限要素領域 A と境界要素領域 D における変位および応力境界を表わしている。

まず, 境界 $C = B_{11} \cup B_{22} \cup \Gamma$ によって囲まれる FEM 領域 A について考えると, その汎関数 π_A は, 式 (9), (10) より次のようになる。

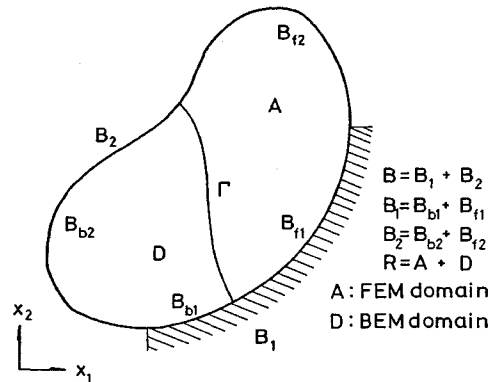


Fig. 1 Domain R and its boundary B .

$$\text{面内: } \pi_f = \frac{1}{2} \int_A (m u_{\alpha, \alpha} u_{\beta, \beta} + u_{\alpha, \beta} u_{\alpha, \beta} + u_{\alpha, \beta} u_{\beta, \alpha} - k_s^2 u_{\alpha} u_{\alpha}) dS - \int_{C_2} u_{\alpha} \bar{g}_{\alpha} dC \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{面外: } \pi_f = \frac{1}{2} \int_A (u_{3, \alpha} u_{3, \alpha} - k_s^2 u_3^2) dS - \int_{C_2} u_3 \bar{t}_3 dC \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $C_2 = B_{r_2}$ は応力境界である。

領域内を三角形一定要素によって分割し、その各要素における節点での値を u_{ik} 、内挿関数を N_k とし、要素内の値が $u_i = \sum_{k=1}^3 N_k u_{ik}$ で表わされるものとして式 (11)、(12) の変分をとり停留化すると次式を得る。

$$\text{面内: } \int_A (m N_{k, \alpha} u_{\gamma, \gamma} + N_{k, \gamma} u_{\gamma, \alpha} + N_{k, \gamma} u_{\alpha, \gamma} - k_s^2 N_k u_{\alpha}) dS - \int_{C_2} N_k \bar{g}_{\alpha} dC = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{面外: } \int_A (N_{k, \beta} u_{3, \beta} - k_s^2 N_k u_3) dS - \int_{C_2} N_k \bar{t}_3 dC = 0 \dots\dots\dots (14)$$

マトリックス表示して、

$$\text{面内: } K_f u_{\alpha} = F_f, \quad F_f = \int_{C_2} N_k \bar{g}_{\alpha} dC \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{面外: } K_f u_3 = F_f, \quad F_f = \int_{C_2} N_k \bar{t}_3 dC \dots\dots\dots (16)$$

となる。

次に、境界 $S = B_{b1} \cup B_{b2} \cup \Gamma$ によって囲まれた BEM 領域 D についても同様に、その汎関数 π_b は、式 (9) および (10) の右辺第 1 項目の領域積分の項に Gauss の発散定理を用いることにより次のように得られる。

$$\text{面内: } \pi_b = \frac{1}{2} \int_S u_{\alpha} g_{\alpha} dC - \int_{S_1} g_{\alpha} (u_{\alpha} - \bar{u}_{\alpha}) dC - \int_{S_2} u_{\alpha} \bar{g}_{\alpha} dC \dots\dots\dots (17)$$

$$\text{面外: } \pi_b = \frac{1}{2} \int_{S_2} u_3 \bar{t}_3 dC - \int_{S_1} \bar{t}_3 (u_3 - \bar{u}_3) dC - \int_{S_2} u_3 \bar{t}_3 dC \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 $S_1 = \Gamma \cup B_{b1}$ 、 $S_2 = B_{b2}$ は、それぞれ変位境界および応力境界である。

ここで、境界 $S = S_1 \cup S_2$ を一定要素分割し、各区間上の積分密度 $f(y)$ を一定として式 (3)、(4) および式 (7)、(8) を離散化すると次式を得る。

$$\text{面内: } u_{\alpha p} = C_{\alpha \beta p q} f_{\beta q} \dots\dots\dots (19)$$

$$t_{\alpha p} = D_{\alpha \beta p q} f_{\beta q}$$

$$\text{面外: } u_{3p} = C_{pq} f_{3q} \dots\dots\dots (20)$$

$$t_{3p} = D_{pq} f_{3q}$$

ただし、

$$C_{\alpha \beta p q} = \int_{\Delta S q} G_{\alpha \beta}(x, y) dC_q$$

$$D_{\alpha \beta p q} = \int_{\Delta S q} T_{\alpha \beta}(x, y) dC_q$$

$$C_{pq} = \int_{\Delta S q} G_{33}(x, y) dC_q$$

$$D_{pq} = \int_{\Delta S q} T_{33}(x, y) dC_q$$

である。ここでは、FEM 領域との結合が容易なように各分割区間の端点での値を u_{ip} とし、法線導関数は区間の midpoint で評価して区間一定であるとした。式 (17)、(18) に式 (19)、(20) を代入して u_{ip} を線形補間することにより式 (17)、(18) の積分を実行し、その変分をとって停留化すると次式が得られる。

$$\text{面内: } A_{\alpha \beta p q} f_{\beta q} + B_{\alpha \beta p q} \bar{u}_{\alpha q} - R_{\beta p} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

$$B_{\alpha \beta p q} f_{\beta q} = 0$$

$$\text{面外: } A_{pq} f_{3q} + B_{pq} \bar{u}_{3q} - R_{3p} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$B_{pq} f_{3q} = 0$$

ただし、

$$A_{\alpha \beta p q} = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^L [(C_{\alpha \beta ip} + C_{\alpha \beta (i+1)p}) D_{\alpha \beta iq} + (C_{\alpha \beta iq} + C_{\alpha \beta (i+1)q}) D_{\alpha \beta ip}] \Delta S_i + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M [(C_{\alpha \beta np} + C_{\alpha \beta (n+1)p}) D_{\alpha \beta nq} + (C_{\alpha \beta nq} + C_{\alpha \beta (n+1)q}) D_{\alpha \beta np}] \Delta S_n$$

$$B_{\alpha \beta p q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L (D_{\alpha \beta ip} \Delta S_i + D_{\alpha \beta (i-1)p} \Delta S_{i-1})$$

$$R_{\beta p} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M (C_{\alpha \beta np} + C_{\alpha \beta (n+1)p}) \bar{g}_{\alpha n} \Delta S_n$$

$$A_{pq} = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^L [(C_{ip} + C_{(i+1)p}) D_{iq} + (C_{iq} + C_{(i+1)q}) D_{ip}] \Delta S_i + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M [(C_{np} + C_{(n+1)p}) D_{nq} + (C_{nq} + C_{(n+1)q}) D_{np}] \Delta S_n$$

$$B_{pq} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L (D_{ip} \Delta S_i + D_{(i-1)p} \Delta S_{i-1})$$

$$R_p = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M (C_{np} + C_{(n+1)p}) \bar{t}_{3n} \Delta S_n$$

である。上式中、 ΔS は分割積分区間、 B^t は B の転置を意味し、また、 L 、 M は、それぞれ境界 S_1 および S_2 上の要素分割数である。

式 (21) および式 (22) において積分密度 f を消去することにより、次のマトリックス表示式を得る。

$$\text{面内: } K_b u_{\alpha} = F_b \dots\dots\dots (23)$$

$$\text{面外: } K_b u_3 = F_b \dots\dots\dots (24)$$

ただし、

$$K_b = -B^t A^{-1} B$$

$$F_b = B^t A^{-1} R$$

である。

結合境界 Γ 上では、BEM 領域での値に f 、FEM 領域での値に b の添字を付けるものとする、次の連続条件が成り立たなければならない。

$$u_r = u_b = u_f \dots\dots\dots(25)$$

$$t_r + t_b = 0 \dots\dots\dots(26)$$

式 (23), (24) において K_b は対称であり, かつ, FEM 領域における式 (15), (16) とまったく同形となることからわかる。周波数領域における定常問題については, すでに FEM, BEM とともに解が安定であることが知られているので, 条件 (25), (26) のもとで BEM 領域を一要素として重ね合わせることににより,

$$\begin{bmatrix} K_f \\ K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_f \\ F_f + F_b \end{bmatrix} \dots\dots\dots(27)$$

となり, これを解くことによって結合解析が実行される。ただし, u_r は結合境界上の変位を意味する。

4. 数値解析結果および考察

定常状態における線形波動場の変位は, 一般に次のように表わすことができる。

$$u_i = u_i^o + u_i^s, \quad i=1, 2, 3 \dots\dots\dots(28)$$

ここに, u_i は全体場, u_i^o は自由場, そして u_i^s は散乱場の変位である。また, 半無限境界上において応力自由の条件を満足するような反射波 u_i^r を考えると, 自由場は反射波と入射波 u_i^i の和として次のように与えられる。

$$u_i^o = u_i^i + u_i^r, \quad i=1, 2, 3 \dots\dots\dots(29)$$

ここで, 平面入射波を仮定し, 入射場および反射場として次のようなものを考える。

$$\text{面内: } u_a^i = \phi_a^i + e_{\alpha\beta} \Psi_a^i \dots\dots\dots(30)$$

$$u_a^r = \phi_a^r + e_{\alpha\beta} \Psi_a^r \dots\dots\dots(31)$$

$$\phi^i = \exp\{i(x_1 k_p \sin \gamma + x_2 k_p \cos \gamma)\}$$

$$\Psi^i = \exp\{i(x_1 k_s \sin \gamma + x_2 k_s \cos \gamma)\}$$

$$\phi^r = K_p \exp\{i(x_1 k_p \sin \gamma - x_2 k_p \cos \gamma)\}$$

$$\Psi^r = K_s \exp\{i(x_1 k_s \sin \gamma - x_2 k_s \cos \gamma)\}$$

$$\text{面外: } u_i^i = \exp\{i(x_1 k_s \sin \gamma + x_2 k_s \cos \gamma)\} \dots\dots\dots(32)$$

$$u_i^r = \exp\{i(x_1 k_s \sin \gamma - x_2 k_s \cos \gamma)\} \dots\dots\dots(33)$$

ここに, ϕ および Ψ は Lamé のポテンシャルとよばれ, それぞれ P 波に関する変位を表わすスカラーポテンシャルおよび S 波に関する変位を示すベクトルポテンシャルである。また, γ は入射角, $e_{\alpha\beta}$ は交代記号であり, K_p, K_s は P および S 波の反射係数である¹⁰⁾。

境界条件としては, 応力自由境界上で,

$$t_i = t_i^o + t_i^s = 0, \quad i=1, 2, 3 \dots\dots\dots(34)$$

が与えられるので, この条件を式 (27) に用いることによって散乱場を決定することができる。

(1) 面外波動問題

ここでは, SH 波による定常応答の解析精度について検討したのちに, いくつかの適用例を示す。まず, Fig. 2 は三角形断面の溪谷に SH 波が入射したときの溪谷表面の応答変位を波が鉛直に入射した場合について求めたものである。計算においては, 溪谷表面を FEM で, そしてこれを囲む周辺領域を BEM でモデル化し, FEM 領域を 42 要素に分割した。また, 半無限境界を近似する有限長さ (EL) は, これまで著者らが検討を行ったいくつかの結果¹¹⁾より, ここでは構造物の代表長さ a の 6 倍にとつてある。 $ka=0.785$ の場合について Sanchez-sesma らの結果⁷⁾と比較してあるが, 十分な精度で解が求められていることがわかる。

同じモデルについて, 溪谷表面が風化などにより周辺地盤より弱くなっている場合 ($k_1 a=1.57, k_2 a=0.785$) と溪谷表面がコンクリートなどで補強されている場合 ($k_1 a=0.16, k_2 a=0.785$) の 2 つのケースを想定して検討してみた。溪谷表面が緩くなっている場合 (破線) には応答変位が大きくなっており, 逆に, 表面がコンクリート等で補強されている場合 (鎖線) には応答が減じられていることがわかる。

Fig. 3 には, コンクリートライニングを施されたトンネルに入射角 $\gamma=60^\circ$ で SH 波が入射した場合 ($k_1 a=0.906, k_2 a=1.57$) の応答変位を求め, それを小林らの結果¹³⁾と比較してある。計算においては, トンネル表面を有限要素で 48 要素に分割し, 周辺地盤を境界要素でモデル化した。比較に用いた数値解析結果に比べて粗い分割を用いたが, 結果はよく一致している。均質 ($k_1 a=1.57, k_2 a=1.57$) および表面が緩んでいる場合 ($k_1 a=2.09, k_2 a=1.57$) に比べ, コンクリートライニングの影響が顕著に現われていることがよくわかる。

次に, 近傍に円孔が存在する三角形断面の溪谷に, 任意の方向から SH 波が入射したときの溪谷表面の応答変

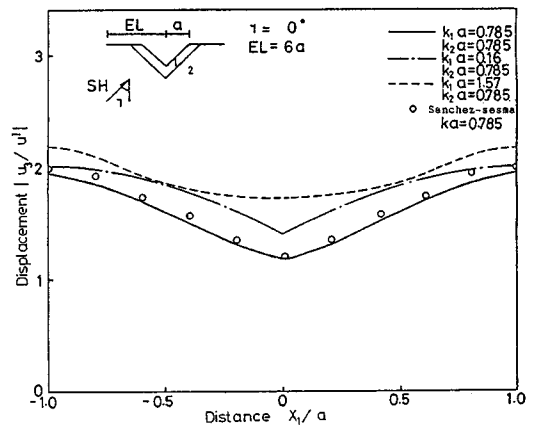


Fig. 2 Seismic responses of a triangular canyon consisting of two different materials for incident SH waves.

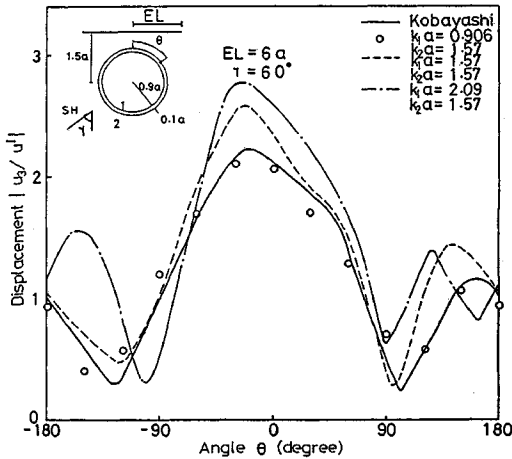


Fig. 3 Displacement at the outer surface of lining for incident SH waves.

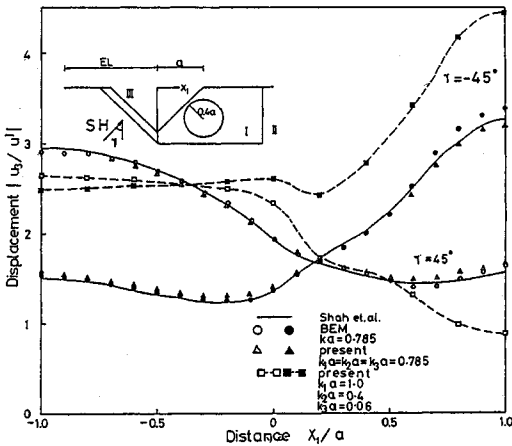


Fig. 4 Displacement at the surface of a triangular canyon with a cylindrical cavity for incident SH waves.

位を計算したものを Fig. 4 に示す。この際、円孔周辺および溪谷表面 (図中の領域 I および III) を FEM でモデル化して 108 要素に分割し、そして、他の領域 (図中の領域 II) は BEM でモデル化している。まず、均質の場合 ($ka=0.785$) について解析結果¹²⁾と比較すると、非常によい一致がみられる。さらに、円孔周辺 (領域 I) に緩み域が存在し、これと反対面の溪谷表面 (領域 III) がコンクリートなどでライニングされている場合 (□, ■) について計算してみた。この場合、ライニング側から波が入射する場合 ($\gamma=45^\circ$) よりも緩み域の方から入射した場合 ($\gamma=-45^\circ$) の方が円孔側の応答変位は大きくなっており、また、ライニング側から入射した場合は、むしろ応答変位が抑えられる傾向にある。このことから、緩み域が耐震性を低下させるのに対して、コンクリートライニングはそれを防ぐ働きのあることがよく

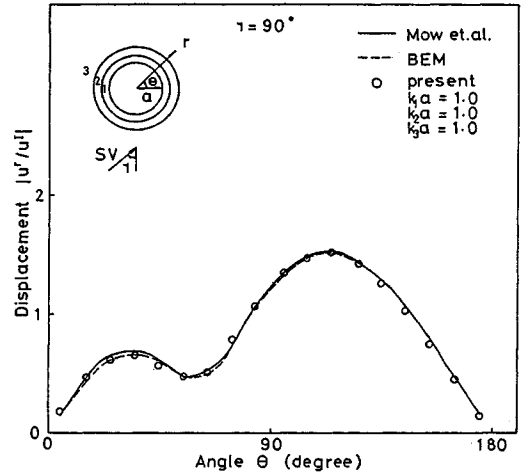


Fig. 5 A comparison between results of the coupling analysis and the analytical results. (Seismic responses of a cylindrical cavity for incident SV waves.)

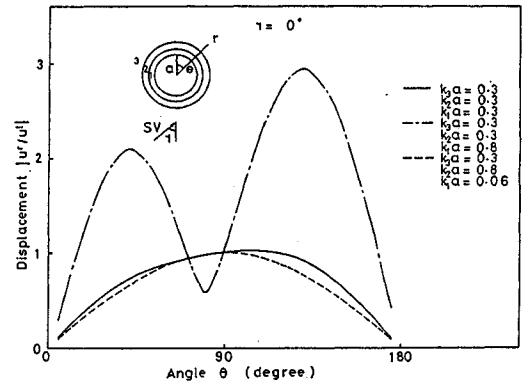


Fig. 6 Seismic responses of a tunnel consisting of three different strata in a infinite space for incident SV waves.

わかる。

(2) 面内波動問題

精度を検討するために、均質な場合 ($ka=1.0$) について本解法の結果と Mow らの結果¹⁴⁾ならびに BEM のみを用いて解析した結果とを比較した例を Fig. 5 に示す。計算においては、トンネルの周囲 (領域 1, 2) を FEM でモデル化し、144 要素に分割している。次に、不均質な場合の例として、無限領域内のトンネル周辺に開削の際に生じた緩み域 ($k_2a=0.8$) があり、その表面にコンクリートライニング ($k_1a=0.06$) が施されている場合について考えた。その結果を Fig. 6 に示す。緩み域のみの場合 (一点鎖線) には均質場 (実線) に比べてトンネル壁面の応答変位が増大しているが、逆に、コンクリートライニングがある場合 (破線) は均質場とほぼ同程度の値にまで応答が抑えられている。これより、

緩み域はトンネル壁面の地震応答を増幅し、コンクリートライニングはそれを抑制する効果のあることがわか

る。

最後に、半無限領域内にある半径 a の円形トンネルに真下より P および SV 波が入射したときのトンネルの応答について検討した。トンネル周辺を FEM で、その外側の領域を BEM でモデル化し、FEM 領域を 174 要素に分割した。また計算においては、トンネル壁面が周辺地盤より弱くなっている場合 ($k_1 a = 0.8$)、緩み域の表面がコンクリートなどによって補強されている場合 ($k_1 a = 0.06$, $k_2 a = 0.8$)、そして均質の場合 ($k_1 a = k_2 a = 0.3$) を想定した。Fig. 7 (a), (b) は、それぞれ SV および P 波の入射に対する結果を示したものである。両者ともに、壁面が緩んでいる場合（一点鎖線）には実線で示された均質場に比べて壁面の応答変位が増大しており、特に、地表面側のトンネル頂部では増幅が著しい。これに対して、緩み域の表面がコンクリート等で補強されているもの（破線）では、壁面の応答が均質場とほとんど同じ値を示しており、ここでもコンクリートライニングの地震動の抑制効果が確認されたと考えられる。

5. 結 論

本論文は、領域の一部に不均質性や非線形性を含む問題を解析するための BEM と FEM 結合法の一定式化を提案し、その二次元弾性波動問題への適用例について述べたものである。ここでは、変分原理に基づいて BEM と FEM の結合のための定式化を行った。この定式化によれば、BEM 領域が対称性を有する剛性マトリックスで表わされるので、FEM 領域との結合が従来使用されている通常の FEM プログラムを用いて行うことができ、合理的かつ経済的であると考えられる。

数値解析例として、結合解法を面外 SH 波動場と面内 P, SV 波動場に適用し、溪谷、空洞およびトンネルにおける緩み域とコンクリートライニングの影響について考察したが、最も簡単な一定要素を用いたにもかかわらずよい精度が得られており、本解法が不均質場を含んだ問題の解析に有効であることが確認された。境界条件として応力が与えられるタイプの定常問題では、直接法に基づいて定式化する手法よりも取り扱いが簡単であることから、今後、広い応用が期待できる。

参 考 文 献

- 1) Zienkiewicz, O.C. : The finite element method, 3rd ed., McGraw-Hill, Ch. 23, 1977.
- 2) Kell, D.W., Mustoe, G.G.W. and Zienkiewicz, O.C. : Coupling boundary element methods with other numerical methods, Developments in Boundary Element Methods-1, Appl. Sci. Pub., Ch.10, 1979.
- 3) Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C. :

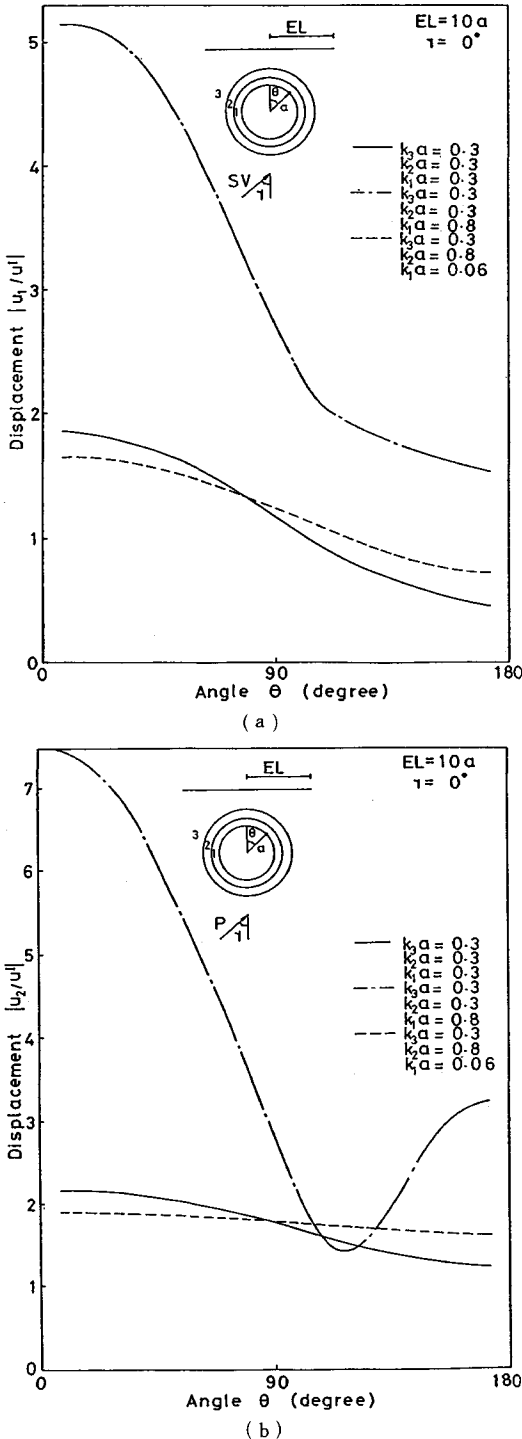


Fig. 7 Seismic responses of a tunnel consisting of three different strata in a half space : (a) the case of incident SV waves and (b) the case of incident P waves.

- Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Ch. 13, 1984.
- 4) 小林昭一・森 勝彦：BIEM-FEM 結合による地盤-基礎系の三次元動的解析，境界要素法論文集，第 2 巻，pp. 173~178, 1985.
 - 5) Kobayashi, S. and Kawakami, T. : Application of BE-FE combined method to analysis of dynamic interactions between structures and visco-elastic soil, Proc. 7th Int. Conf. of BEM in Eng., pp. 6-3~6-12, 1985.
 - 6) Fukui, T. and Ishida, Y. : Time marching BE-FE method in wave problem, Proc. 1st. Japan-China Symp. on BEM, pp. 96~106, 1987.
 - 7) Sanchez-sesma, F.J. and Rousenblueth, E. : Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves, Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 7, pp. 441~450, 1979.
 - 8) Ohtsu, M. : BEM formulation based on the variational principle and coupling analysis with FEM, Boundary Elements VII, Springer-Verlag, pp. 11-13~11-22, 1985.
 - 9) Washizu, K. : Variational method in elasticity and plasticity, Pergamon Press, 1975.
 - 10) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S. : Elasto-dynamics-II, Academic Press, Ch. 7, 1975.
 - 11) 上杉真平・大津政康：境界要素法による半無限弾性体における 2 次元波動場の解析，土木学会論文集-I, No. 374, pp. 457~465, 1986.
 - 12) Shah, A. H., Wong, K. C. and Datta, S. K. : Diffraction of plane SH waves in a half-space, Earthq. Eng. Struc. Dyn., Vol. 10, pp. 519~528, 1982.
 - 13) Kobayashi, S. : Fundamentals of Boundary Integral Equation Method in elasto-dynamics, Topics in Boundary Element Research-2, Springer-Verlag, pp. 1~54, 1985.
 - 14) Mow, C. C. and Mente, L. J. : Dynamic stress and displacements around cylindrical discontinuities due to plane harmonis shear waves, Jour. Appl. Mech., No. 30, pp. 598~604, 1963.
 - 15) Nishimura, N. and Kobayashi, S. : Elasto-plastic analysis by indirect methods, Development in Boundary Element Method-3, Elsevier Appl. Sci. Pub., Ch. 3, 1984.
 - 16) 岸本喜久雄・山口以昌・立原昌義・青木 繁・坂田 勝：境界要素・有限要素結合法による弾塑性破壊力学解析，日本機械論文集(A 編)，第 50 巻，460 号，pp. 1963~1971, 1984.

(1988. 1. 27・受付)