

コンプリメンタリーエネルギー最小化による はり構造物の材料非線形解析法

ANALYSIS OF BEAM STRUCTURES WITH NONLINEAR MATERIALS BY TOTAL COMPLEMENTARY ENERGY MINIMIZATION

大久保禎二*・藤脇敏夫**

By Sadaji OHKUBO and Toshio FUJIWAKI

A new analysis method for straight and continuous beam structures with nonlinear materials is proposed on the basis of the principle of minimum complementary energy and mathematical programming algorithm.

The bending moment distribution of a continuous beam structure is expressed in terms of the unknown redundant bending moments acting at the supports and the analysis problem is formulated as an unconstrained total complementary energy minimization problem. Then the redundant bending moments are determined by solving the energy minimization problem with the aid of a sequential quadratic approximation algorithm. In the process of the energy minimization, pre-arranged bending moment-complementary energy relations for the cross-sections of beam elements made of given nonlinear materials are used very effectively for calculations of the total complementary energy and the sensitivities of beam structure.

The problem formulation and analysis algorithm of the proposed method are quite simple and applicable for any types of linear and nonlinear material beam problems. The reliability and efficiency of the method are confirmed by comparing the results obtained with those by the finite element method for several statically indeterminate continuous beams with linear and three types of nonlinear materials.

Keywords: nonlinear analysis, beam structures, material nonlinearity, complementary energy principle, sequential quadratic approximation

1. 緒 言

従来、静荷重を受けるはり構造物の材料の非線形性を考慮した解析法としては、主として有限要素法の二次元あるいは三次元問題として荷重増分過程を用いて解く方法が研究されており、これらの研究成果については文献1)~3)などにおいてまとめられている。また、はり構造物の Shakedown Analysis に関しては、たとえば文献4)にまとめられている。その他古典的な解法として、山崎らはコンプリメンタリーエネルギーの停留条件を用いて導入した弾塑性たわみ角式により、曲げを受けるはり部材よりなる構造物の弾塑性解析法に関する研究を行っている⁵⁾。

ところで構造物の非線形解析法に関して、著者および和多田は、これまでにエネルギー原理および数値計画法の手法を用いたトラス構造物の非線形解析法に関する研究を行い、その成果を文献6)および7)に発表している。これらの論文において、著者らは固定荷重を受けるトラス構造物の材料の非線形性を考慮した解析問題は、各部

材の材料の応力度-ひずみ関係式をそのまま用いてエネルギー最小化問題として統一的、かつ非常に単純な形式で定式化できること、解析アルゴリズムもきわめて汎用性を有すること、増分法や反復法などのように荷重を分割したり、仮想荷重を想定する必要がないこと、トラスの全コンプリメンタリーエネルギーを、各可動節点における力のつり合い条件のもとで逐次二次計画法(SQP)により最小化する方法は解の収束性が非常に良好であり、能率的に正確な解が得られることなどを明らかにした。さらに文献7)においては、ポテンシャルエネルギーおよびコンプリメンタリーエネルギーの最小化過程を組み合わせることで、材料の非線形性のみならず幾何学的非線形性をも考慮したトラス構造物の複合非線形解析を容易に行うことができることを示している。

本研究では、著者らの上記の研究を基礎として、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理および数値計画法の手法を用いて、固定荷重を受ける直線はり構造物の材料の非線形性を考慮した解析法を提案するものである。

解析方法は、まず、はりを各支点ごとに切断して静定基本系を仮定し、はりの各支点到に作用する不静定曲げモーメントを未知量として、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを不静定曲げモーメントの関数として表現する。また、制約条件が、支点的の左右における不

* 正会員 工博 愛媛大学教授 工学部土木工学科
(〒790 松山市文京町3番)

** 正会員 工修 フジタ工業(株) 関東支店
(〒151 渋谷区千駄ヶ谷3-13-18)

静定曲げモーメントのつり合い方程式で表わされることを利用して、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題を無制約非線形最小化問題に変換し、これを逐次、二次形式に近似しながら反復して改良解を求めることにより、真の不定定曲げモーメントを決定するものである。

なお解析にあたっては、前もってはり断面の曲げモーメントとコンプリメンタリーエネルギーの関係を導入し、これを利用することによりはり構造物の全コンプリメンタリーエネルギーおよびその偏微係数の計算を能率的に行っている。また、はりに作用するせん断力の影響は考慮しないものと仮定している。

数値計算例として、3種類の非線形材料の2~4径間変断面連続ばりの解析例を示し、変位法による解と比較し、本研究で提案している解析法の汎用性、信頼性および有効性を明らかにしている。

2. はり断面の曲げモーメントとコンプリメンタリーエネルギーの関係の導入

(1) 曲げモーメントを受けるはり断面のコンプリメンタリーエネルギー

いま、はり構造物の任意の点における断面(図-1)に曲げモーメント M が作用し、中立軸から y の距離にある微小断面 dA に曲げ応力度 σ_y が生ずるものとする。この σ_y によるはり断面の単位体積当たりのコンプリメンタリーエネルギー β_y は、図-2に示す材料の応力度-ひずみ曲線の斜線の部分、すなわち、

$$\beta_y = \int_0^{\sigma_y} \epsilon(\sigma) d\sigma \dots\dots\dots (1)$$

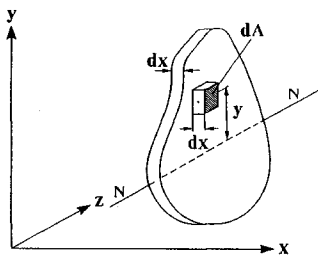


図-1 微小はり要素の断面

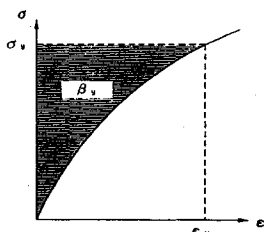


図-2 非線形応力度-ひずみ関係

で表わされる。したがって、図-1に示す厚さ dx の微小はり要素のコンプリメンタリーエネルギー $\pi_c dx$ は次式により求められる。

$$\pi_c dx = \int_A \beta_y dA dx \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 A ：はりの断面積

また、このはり断面の曲げモーメント M は次式より求められる。

$$M = \int_A \sigma_y \cdot y dA \dots\dots\dots (3)$$

(2) 曲げモーメントとコンプリメンタリーエネルギーの関係の導入

曲げモーメントを受けるはり断面が、作用する応力の大きさに関係なく常に Bernoulli-Euler の仮定を満足するものとする。図-3に示すはり断面の最外縁のひずみ量 ϵ_e を仮定することにより、図-2に示す材料の応力度-ひずみ関係より断面内の応力度分布が求められ、式(3)より断面に作用する曲げモーメント、式(1)および式(2)より断面のコンプリメンタリーエネルギーを計算することができる。はり断面の材料の応力度-ひずみ関係が線形である場合には、曲げモーメントと ϵ_e の関係は簡単に求められ、作用曲げモーメント M と単位長さ当たりのはり断面のコンプリメンタリーエネルギー π_c の関係は、次式により簡単に求められる。

$$\pi_c = \frac{M^2}{2EI} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 E ：材料の弾性係数、 I ：断面二次モーメント

しかし、材料の応力度-ひずみ関係が図-2に示すような非線形である場合には、特定の曲げモーメント M に対する ϵ_e は解析式により一意的に決定することができず、 ϵ_e の仮定値を種々変化させながらそれに対応する応力分布を求め、式(3)により M を計算し、仮定した曲げモーメントと一致するか否かを確かめる試行錯誤を繰り返すことによりはじめて決定することができる。したがって、材料の応力度-ひずみ関係が非線形であるはり構造物の各断面に作用する曲げモーメントに対応するコンプリメンタリーエネルギーを式(3)および式(1)、(2)より求めることは一般に多くの計算時間を必要とすることとなる。そこで本研究では、このよう

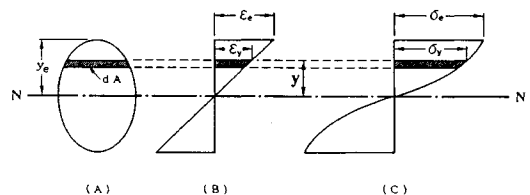


図-3 はり断面におけるひずみおよび応力度分布

な煩雑な計算の繰り返しを避け、特定の曲げモーメントに対するはり断面のコンプリメンタリーエネルギーの値を能率的に求めるため、以下に示す方法によりはり断面に作用する曲げモーメント M とコンプリメンタリーエネルギー π_c の関係を導入した。

a) ϵ_e の仮定 解析の対象としているはり断面(図-3(A))の最外縁のひずみ量 ϵ_e を図-3(B)のように仮定すると、Bernoulli-Eulerの仮定より中立軸から y の距離におけるひずみ ϵ_y は次式で求められる。

$$\epsilon_y = \frac{y}{y_e} \cdot \epsilon_e \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 y_e : 対象としているはり断面の中立軸から最外縁までの距離

この ϵ_y に対応する応力度 σ_y は、図-2の応力度-ひずみ曲線を用いて次式より求められる(図-3(C))。

$$\sigma_y = \sigma(\epsilon_y) \dots\dots\dots (6)$$

b) 曲げモーメントの算定 式(6)の応力度分布をなすはり断面の曲げモーメント M は次式より求められる。

$$M = \int_A \sigma_y \cdot y dA \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 A : はりの断面積

c) コンプリメンタリーエネルギーの算定 また図-3の応力度およびひずみ分布をなすはり断面の単位長さ当たりのコンプリメンタリーエネルギー π_c は、式(1)および式(2)より次式により計算することができる。

$$\pi_c = \int_A \beta_y dA \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $\beta_y = \int_0^{\epsilon_y} \epsilon(\sigma) d\sigma$

このようにして、任意に仮定した最外縁ひずみ ϵ_e に対して一組の曲げモーメント M とコンプリメンタリーエネルギー π_c の関係が得られ、 ϵ_e の値を種々変化させることにより対象としているはり断面および材料に対する M - π_c 関係を得ることができる。

なお本研究では、各はり断面における式(7)の M および式(8)の π_c を数値積分により求めている。この数値積分を行うにあたっては、桁高の分割数と M および π_c の精度との関係について検討を行い、十分な精度を確保するため、桁高を500等分してそれぞれの断面要素の ΔM および $\Delta \pi_c$ を台形則などを用いて求め、これらを加え合わせるにより M および π_c の計算を行った。また各断面要素の β_y の積分は解析的に行っている。

このようにして求めた 20 cm × 50 cm の長方形断面の図-4に示す3種類の非線形の応力度-ひずみ関係を有する材料に対する M - π_c 関係を図-5に示す。

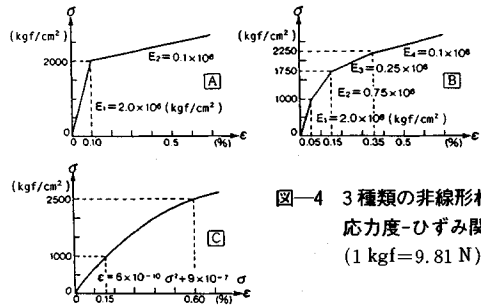


図-4 3種類の非線形材料の応力度-ひずみ関係 (1 kgf=9.81 N)

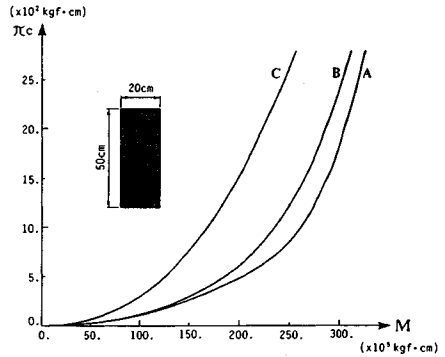


図-5 長方形断面 (20 cm × 50 cm) の3種類の非線形材料の応力度-ひずみ関係に対する M - π_c 関係 (1 kgf=9.81 N)

3. はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギーの算定

はり構造物を構成する各はり要素の断面について、2.で述べた方法により M - π_c 関係を作成することにより、任意の荷重を受ける、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c は、はり全体の曲げモーメントの分布 $M(x)$ を求め、各断面におけるコンプリメンタリーエネルギーを加え合わせるにより算定することができる。

$$\Pi_c = \int_L \pi_c(M(x)) dx \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $M(x)$: はり構造物の x 点における曲げモーメント

$\pi_c(M(x))$: 単位長さ当たりのはり断面における $M(x)$ によるコンプリメンタリーエネルギー

L : はり構造物の全長

本研究では、この全コンプリメンタリーエネルギー Π_c を算定するにあたって、はりの全長を微小長さ Δx で均等に分割し、各分割要素の両端に作用する曲げモーメント $M(x)$ および $M(x+\Delta x)$ (図-6参照)によるコンプリメンタリーエネルギーの平均値を用いて分割要素におけるコンプリメンタリーエネルギーを求め、こ

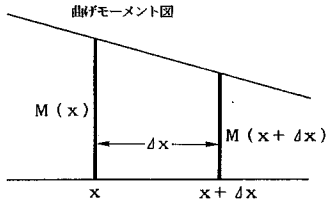


図-6 はりのx点およびx+Δx点における曲げモーメント

れを全分割要素について加え合わせることににより Π_c を計算した。

$$\Pi_c = \sum_{c=1}^p \frac{\pi_c (M(x)) + \pi_c (M(x + \Delta x))}{2} \cdot \Delta x \dots \dots (10)$$

ここに、 Δx ：はりの微小要素長（はりの全長にわたって一定とする）

p ：はりの微小要素数

実際に式(10)により Π_c を計算する場合には、はりの微小要素長 Δx の大きさが Π_c の精度および解を求めるために必要な計算時間に影響を与えることが考えられる。そこで本研究では、この Δx の大きさにより解の精度および計算時間がどの程度影響されるかについて検討を行い、本研究の数値計算例のような dimension および荷重状態のはり構造物では Δx の値として 2.0 cm 程度が適当であるとの結論に達した。なお、この検討の詳細については 6. の解析例において述べることにする。

4. コンプリメンタリーエネルギー最小化によるはり構造物の材料非線形解析法の定式化

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、はり構造物の真の曲げモーメント分布は、各断面における曲げモーメントのつり合い条件の下で、はり構造物全体のコンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより決定することができる^{たとえ(8),9)}。

そこで本研究では、はり構造物を図-7に示すごとく各支点で切断して静定基本系とし、各支点に作用する曲げモーメントを不静定曲げモーメント M_i とすると、支点 i と $i+1$ 間の任意の点 x における曲げモーメント $M_i(x)$ は、図-8に示すように外力による i 番目の静定基本ばりの曲げモーメント $M_{si}(x)$ 、および不静定曲げモーメント M_{iR} および M_{i+1L} による曲げモーメントの和として次式より求められる。すなわち、

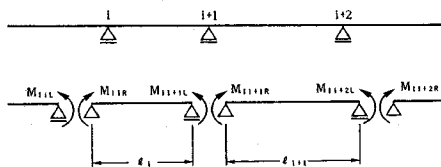


図-7 はり構造物の静定基本系および不静定曲げモーメント

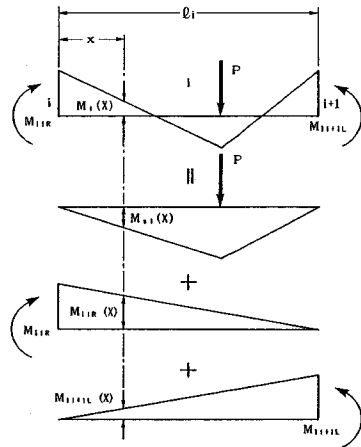


図-8 支間 i の点 x における曲げモーメント $M_i(x)$

$$M_i(x) = M_{si}(x) + M_{iR}(x) + M_{i+1L}(x)$$

$$= M_{si}(x) + \frac{(l_i - x)}{l_i} M_{iR} + \frac{x}{l_i} M_{i+1L} \dots \dots (11)$$

$(i=1, \dots, m)$

ここに、 $m = n - 1$ ：静定基本ばりの数

n ：全支点数

M_{iR} ： i 番目の静定基本ばりの支点 i に作用する不静定曲げモーメント

M_{i+1L} ： i 番目の静定基本ばりの支点 $i+1$ に作用する不静定曲げモーメント

ところで、各支点における曲げモーメントのつり合い条件より、各支点における左右の不静定曲げモーメント M_{iL} と M_{iR} は等しくなり、次式のように表現することができる。

$$M_{iL} = M_{iR} = M_{iI} \quad (i=1, \dots, n) \dots \dots (12)$$

式(10)、(11)および(12)を用いることにより、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題は、不静定曲げモーメント M_i を変数とする次のような無制約非線形最小化問題として定式化することができる。

$$\left. \begin{aligned} &\text{find } M_i, \text{ such that} \\ &\text{minimize } \Pi_c(M_i) = \sum_{i=1}^m \Pi_{ci}(M_{iI}, M_{i+1I}) \\ &\Pi_{ci}(M_{iI}, M_{i+1I}) = \int_{l_i} \pi_c(M_{iI}, M_{i+1I}) dx_i \\ &M_i = [M_{iI}, \dots, M_{iI}]^T \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

ここに、 Π_{ci} ：各支点で切断した i 番目の静定基本ばりの全コンプリメンタリーエネルギー

5. コンプリメンタリーエネルギー最小化問題の解法

(1) 解法の概要

前節の式 (13) で定式化したはり構造の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題を解く方法として、準ニュートン法、共役方向法、最急降下法、ニュートン法など種々の無制約最小化法の適用が考えられるが、本研究では文献6)で大久保・和多田がトラス構造の全ポテンシャルエネルギー最小化問題を解くために提案した逐次二次近似法を用いて次のような方法により最小化することとした。

すなわち、まず $\Pi_c(M_i)$ を M_i の初期値のまわりで二次形式に近似し、この近似した二次形式の最小点までの改良幅を解析式により求め M_i を改良する。また近似した目的関数の二次の項の係数マトリックスは M_i の改良幅を用いて BFGS 公式により修正し、改良された M_i に対して $\Pi_c(M_i)$ の新たな二次形式近似を行う。このようにして $\Pi_c(M_i)$ を逐次二次形式に近似しながら M_i の改良を繰り返すことにより $\Pi_c(M_i)$ を最小にする真の M_i を決定するものである。

(2) $\Pi_c(M_i)$ の二次形式近似

式 (13) の目的関数 $\Pi_c(M_i)$ を M_i に関して Taylor 展開し二次形式近似すると、 k th stage における M_i^k の改良のための変化量 ΔM_i^k に関する次の無制約最小化問題を導入することができる。

find ΔM_i , such that

$$\text{minimize } Q_c^k = \nabla \Pi_c^{kT} \Delta M_i^k + \frac{1}{2} \Delta M_i^{kT} H^k \Delta M_i^k \quad (14)$$

ここに、 $\Delta M_i^k = [\Delta M_{i1}^k, \dots, \Delta M_{in}^k]^T$

$$\nabla \Pi_c^k = \left[\frac{\partial \Pi_c^k}{\partial M_{i1}^k}, \dots, \frac{\partial \Pi_c^k}{\partial M_{in}^k} \right]^T$$

H^k : 正定値係数行列であり、BFGS 公式により改良する。

ここで、 $\nabla \Pi_c^k$ の各要素 $\partial \Pi_c / \partial M_{in}^k$ は次式により差分によって求めることができる (図-9 参照)。

$$\frac{\partial \Pi_c^k}{\partial M_{in}^k} = \frac{\Pi_c(M_{i1}^k, \dots, M_{in}^k + \Delta M_{in}^k, \dots, M_{in}^k) - \Pi_c(M_i^k)}{\Delta M_{in}^k} \quad (15)$$

(3) 改良のための変化量 ΔM_i^k の決定

式 (14) の無制約最小化問題において、不静定曲げモーメント M_i の改良のための変化量 ΔM_i^k は、 Q_c^k の最小点までの変化量として次式により解析的に求めることができる。

$$\Delta M_i^k = - \frac{\nabla \Pi_c^{kT} d^k}{d^{kT} H^k d^k} \cdot d^k \quad (16)$$

ここに、

$$d^k = - \nabla \Pi_c^k \quad (17)$$

上式の M_i^k の改良幅 ΔM_i^k を求める式は、 $\Delta M_i^k = \alpha^k d^k$ として式 (14) に代入し、 $\partial Q_c^k / \partial \alpha^k = 0$ を解くことによ

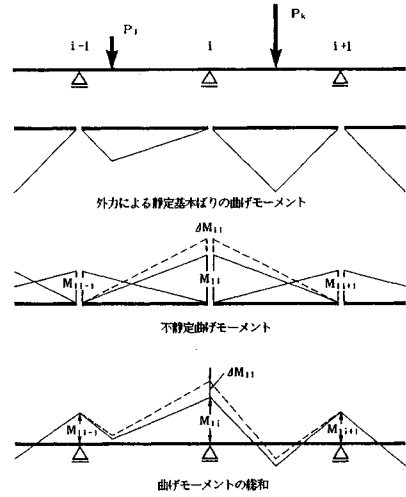


図-9 ΔM_{i1} による曲げモーメントの変化

り導くことができる。

(4) 無制約最小化問題の修正

(3) で求めた M_i^k の改良値 ΔM_i^k を用いて不静定曲げモーメント M_i^k を次式により改良する。

$$M_i^{k+1} = M_i^k + \Delta M_i^k \quad (18)$$

改良された M_i^{k+1} を新たな初期値として $\nabla \Pi_c^{k+1}$ を計算し、新しい近似の無制約最小化問題 (式 (14)) を作成する。この場合、式 (14) における ΔM_i^k に関する二次の係数行列 H^{k+1} は次の BFGS 公式により修正する¹⁰⁾。

$$H^{k+1} = H^k - \frac{H^k \Delta M_i^k \Delta M_i^{kT} H^k}{\Delta M_i^{kT} H^k \Delta M_i^k} + \frac{\eta^k \eta^{kT}}{\Delta M_i^{kT} \eta^k} \quad (19)$$

ここに、 $\Delta M_i^k = M_i^{k+1} - M_i^k$
 $\eta^k = \nabla \Pi_c^{k+1} - \nabla \Pi_c^k$

このようにして、 Q_c^k および M_i^k が一定値に収束するまで、逐次、式 (14) の近似の無制約最小化問題を作成し M_i の改良を繰り返すことにより、最終的な真の曲げモーメント M_i^* を決定することができる。

上記の方法により、はり構造の材料非線形解析を行う方法の概略的な流れ図を図-10 に示す。

6. 解析例

これまで 2.~5. で述べたはり構造の全コンプリメンタリーエネルギー最小化による材料非線形解析法の汎用性・信頼性・収束性・計算効率などを検討するため多くの例題を解析したが、ここでは不静定曲げモーメントの数がそれぞれ 1, 2, 3, 4 個である図-11 に示す 2, 3, 4 径間連続ばりについて、使用材料が弾性係数 $E = 2.0 \times 10^6$ kgf/cm² である線形材料および図-4 に示す A, B, C 3 種類の非線形材料である場合の解析結果、変位法

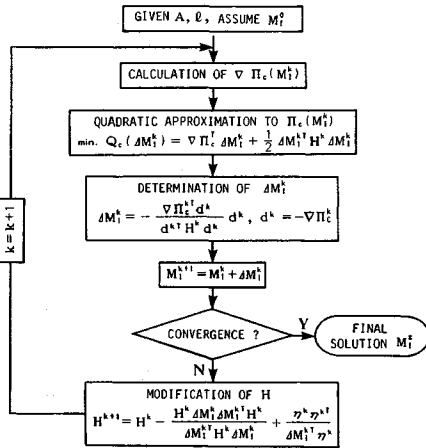


図-10 全コンプリメンタリーエネルギー最小化によるはり構造の材料非線形解析法の流れ図

$$\overline{EI} = \frac{My_e}{\epsilon_e} \dots \dots \dots (20)$$

②材料の非線形性のため、各断面における M と ϵ_e の関係が異なることより、各はり要素の長さ Δl をできるだけ短くして変位法により M を求める。③この M を新たな仮定値として、 M および \overline{EI} が一定値に収束するまで①および②の計算を繰り返すことにより最終解を決定した。なお、変位法では各はりの要素長 Δl が小さければ小さいほどより正確な解が得られるが、 Δl を 2.0 cm 以下とすることにより確実に 0.01 % 以下の精度で解が得られることを確認し、本研究では Δl を 2.0 cm とした。図-11 に示す各解析モデルの変位法により求めた不静定曲げモーメント M 、 M および \overline{EI} が一定値に収束するために必要とした反復計算回数、計算時間等を表-2 に示す。なお、変位法の連立一次方程式は剛性マトリックスのバンド行列としての特性を利用した最も効率的なガウス消去法により解いている。

(1) Δx の大きさが解析精度および計算時間に与える影響の検討

3. で述べたように、本研究では Π_c を式 (10) により計算しているので、はりの微小要素長 Δx の大きさが解の精度および解を求めるために必要な計算時間に影響を与えることが考えられる。そこで本節では、図-11 に示す 4 種類の連続ばりの材料が $E=2.0 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ の線形材料である場合について、 Δx の大きさを種々変化させて得られた解と変位法により得られた不静定曲げモーメントとの比較を行い、 Δx の適当な値について検討した結果について述べる。

$\Delta x=0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 25.0 \text{ cm}$ として得られた各連続ばりの不静定曲げモーメント M_i および変位法により得られた厳密解との誤差、最終解を得るまでに要した計算時間、反復改良回数等をまとめると表-1 のようになる。

この表から明らかなように、解の精度は Δx が 0.5~5.0 cm の範囲では相互間にほとんど差がみられず、いずれの連続ばりにおいても変位法による解との誤差は、ほぼ 0.05 % 以下となっている。ただし、4 径間連続一端固定ばりにおいて、ただ 1 つ 0.151 % の誤差を有する解が存在する。 Δx が 10.0 cm 以上になると各連続ばりとも厳密解との誤差は多少増加し、 $\Delta x=10.0 \text{ cm}$ で最大 0.090 %、 $\Delta x=25.0 \text{ cm}$ では最大 0.256 % の誤差を生じている。

一方、最終解を決定するために必要とする計算時間は、当然のことながら Δx が大きくなるに従い減少している。各 Δx における計算時間の相対的な比は、すべての解析モデルにおいて同程度の比率となっており、 $\Delta x=0.5 \text{ cm}$ における計算時間を 1.0 とした場合、 $\Delta x=1.0,$

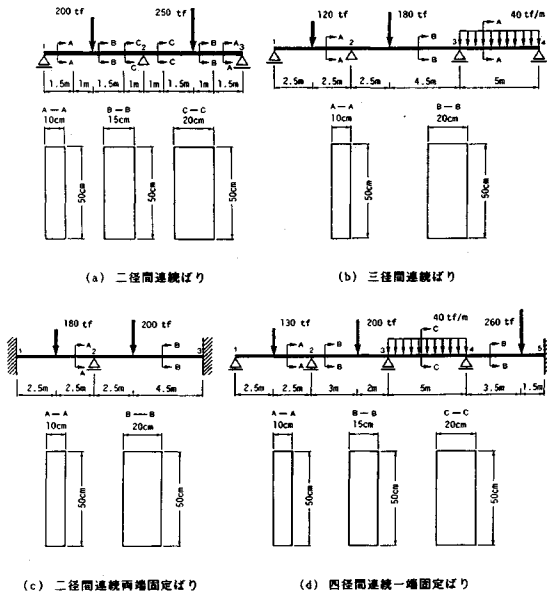


図-11 はり構造の解析モデル (1 tf=9.81 kN)

による解との比較について述べる。

なお、各例題において、式 (14) の近似の無制約最小化問題を作成した回数を反復改良回数とし、解の収束判定基準としては目的関数、すなわちはり構造の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c の変化量が 1/1 000 000 以下となった時点で曲げモーメントの変化量も 1/10 000 程度となり、解が最終解に収束したものと判定した。

また、変位法による解析は次のようにして行った。すなわち、①まず各はり断面に作用する曲げモーメント M を仮定し、2.(2) で求めた M と ϵ_e の関係を用いて各はり要素の仮想曲げ剛性 \overline{EI} を次式により求める。

表一 Δx の大きさが解析精度および計算時間に与える影響の検討 (線形材料)

	実位法 ¹⁾	0.5cm ¹⁾	1.0cm	2.0cm	5.0cm	10.0cm	25.0cm
一径間連続ばり	M_{12} ²⁾	-236.924	-236.923	-236.923	-236.955	-236.921	-237.096
	誤差 ⁴⁾		0.000%	0.000%	0.013%	0.001%	0.073%
	Π_c ⁵⁾	179831.8	179830.5	179824.5	179784.3	179639.5	178629.7
	CPU(ITE) ⁶⁾	0.21 (4)	0.18 (4)	0.12 (4)	0.10 (4)	0.11 (5)	0.08 (4)
三径間連続ばり	M_{12} ²⁾	-138.097	-138.087	-138.089	-138.116	-138.087	-138.052
	誤差 ⁴⁾		0.007%	0.006%	0.014%	0.007%	0.033%
	Π_c ⁵⁾	138113.9	138110.9	138101.2	138031.2	137836.1	136394.3
	CPU(ITE) ⁶⁾	0.37 (5)	0.24 (5)	0.17 (5)	0.13 (5)	0.13 (6)	0.12 (7)
二径間連続両端固定ばり	M_{12} ²⁾	-93.120	-93.089	-93.122	-93.072	-93.114	-93.154
	誤差 ⁴⁾		0.033%	0.002%	0.052%	0.006%	0.037%
	Π_c ⁵⁾	127987.2	127984.0	127973.4	127895.3	127684.5	126115.6
	CPU(ITE) ⁶⁾	0.46(10)	0.33(11)	0.24(10)	0.18(10)	0.18(11)	0.14(10)
四径間連続一端固定ばり	M_{12} ²⁾	-117.604	-117.626	-117.620	-117.611	-117.599	-117.672
	誤差 ⁴⁾		0.019%	0.014%	0.006%	0.004%	0.090%
	Π_c ⁵⁾	136735.9	136734.2	136728.0	136681.2	136514.3	135344.1
	CPU(ITE) ⁶⁾	0.99(13)	0.63(13)	0.41(12)	0.30(12)	0.28(13)	0.22(12)

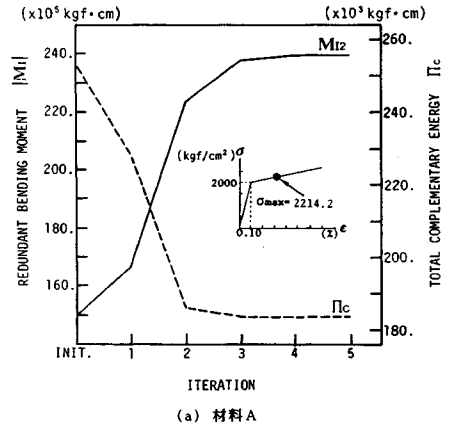
1) 変位法による不静定曲げモーメント (tf-m) 2) Δx の幅 (cm) 3) 不静定曲げモーメント (tf-m)
 4) 変位法による解との誤差 5) 全コンプリメンタリーエネルギー (kgf-cm)
 6) FACOM M780による計算時間(sec) (ただし、() 内の数値は反復改良回数を表す)
 (1 kgf=9.81 N, 1 tf=9.81 kN)

2.0, 5.0, 10.0, 25.0 cm における計算時間の比は、それぞれ 0.86~0.64, 0.57~0.41, 0.48~0.30, 0.52~0.28, 0.38~0.22 となっている。 $\Delta x=2.0$ cm とすると $\Delta x=0.5$ cm の場合の約 1/2 の計算時間で最終解を決定することができるが、 Δx をそれ以上に大きくしても計算時間の減少はあまり期待できず、逆に先に述べたように解の精度がわずかではあるが悪くなる傾向にある。そこで、本研究では材料の非線形性のことをも考慮して本研究の解析例のような dimension および荷重状態のはり構造物では、 Δx の値として 2.0 cm 程度、すなわち Δx と支間長の比が 1/250~1/350 程度が適当であると判断し、以下の解析例においては $\Delta x=2.0$ cm とした。

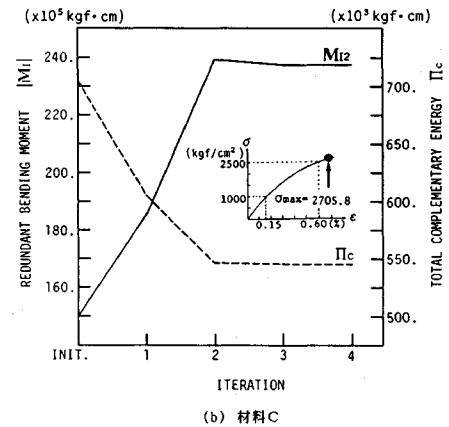
(2) 2径間連続ばり

図-11(a) に示す 2 個の集中荷重を受ける 2 径間変断面連続ばりの非線形材料 A および C における不静定曲げモーメント M_{12} の収束過程を図-12(a) および (b) に、また、3 種類の非線形材料における最終結果を表-2 に示す。はり全体のコンプリメンタリーエネルギー Π_c およびその偏微係数 $\nabla \Pi_c$ の計算は、各変断面ごとの $M-\pi_c$ 関係を用いて式 (10) および式 (15) より容易に計算することができる。なお各静定基本ばりにおける断面変化の状態により解を決定するアルゴリズムが変化することは全くない。

M_{12} の初期値として最終解と大きく異なる任意の値を



(a) 材料 A



(b) 材料 C

図-12 2径間連続ばりの収束状況 (1 kgf=9.81 N)

表-2 はり構造物の解析結果および変位法による解との比較

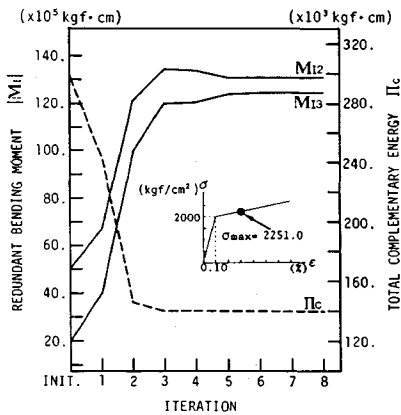
材種	材料 A			材料 B			材料 C			
	本解法	変位法	誤差 ¹⁾	本解法	変位法	誤差 ¹⁾	本解法	変位法	誤差 ¹⁾	
一径間連続ばり	M_{12} ²⁾	-239.960	-239.960	0.000%	-239.046	-239.042	0.002%	-237.810	-237.808	0.001%
	ITE ³⁾	5	8		5	9		4	6	
	CPU ⁴⁾	0.15	0.24	0.625	0.16	0.27	0.593	0.13	0.21	0.619
	σ_{max} ⁵⁾	2214.2 kgf/cm ²			2339.4 kgf/cm ²			2705.8 kgf/cm ²		
三径間連続ばり	M_{12}	-131.032	-131.035	0.002%	-127.200	-127.199	0.001%	-132.288	-132.288	0.000%
	ITE ³⁾	8	9		7	10		6	8	
	CPU ⁴⁾	0.17	0.42	0.405	0.17	0.47	0.362	0.17	0.41	0.415
	σ_{max} ⁵⁾	2251.0 kgf/cm ²			2318.4 kgf/cm ²			2763.9 kgf/cm ²		
二径間連続両端固定ばり	M_{12}	-100.272	-100.280	0.008%	-101.878	-101.913	0.034%	-97.586	-97.595	0.009%
	ITE ³⁾	12	11		13	10		10	8	
	CPU ⁴⁾	0.18	0.35	0.514	0.22	0.34	0.647	0.21	0.30	0.700
	σ_{max} ⁵⁾	2359.8 kgf/cm ²			2420.4 kgf/cm ²			2983.3 kgf/cm ²		
四径間連続一端固定ばり	M_{12}	-116.498	-116.514	0.014%	-115.740	-115.754	0.012%	-116.862	-116.865	0.003%
	ITE ³⁾	13	10		13	10		12	8	
	CPU ⁴⁾	0.31	0.52	0.596	0.34	0.54	0.630	0.37	0.47	0.787
	σ_{max} ⁵⁾	2155.8 kgf/cm ²			2205.0 kgf/cm ²			2577.9 kgf/cm ²		

1) 不静定曲げモーメント (tf-m) 2) 反復計算回数 3) FACOM M-780 による計算時間 (sec.)
 4) 最大応力 (kgf/cm²) 5) 最大ひずみ 6) 相対誤差 (%) ただし、計算時間については実位法との比
 (1 kgf=9.81 N, 1 tf=9.81 kN)

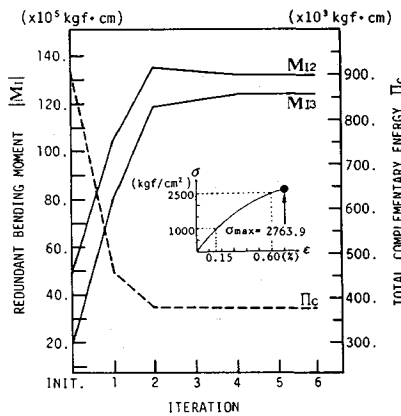
仮定しても、A, B, C の非線形材料すべてにおいて2~3回の反復改良でほぼ最終解の近傍に達した後、さらに、2回の改良で最終解に収束している。最終解と変位法による解との誤差は、0.000~0.002%であり、両解法による解はほぼ完全に一致している。また、最終解を決定するために要した計算時間は材料の種類により多少変化するが、九州大学大型計算機センターのFACOM-M780で0.13~0.16秒であり変位法のほぼ60%程度の計算時間で最終解を得ている。最終解においては構造物に作用している最大の曲げ応力 σ_{max} は、材料Aで2214.2 kgf/cm²、材料Bで2339.4 kgf/cm²、材料Cで2705.8 kgf/cm²であり、それぞれは断面の最縁端において0.314%、0.439%、0.683%と相当大きなひずみ量が発生していることがわかる。 M_{12} が求められれば、はりの任意の点 x における曲げモーメントは式(11)により簡単に計算することができる。

(3) 3径間連続ばり

図-11(b)に示す等分布および集中荷重を受ける3径間連続ばりの非線形材料AおよびCにおける収束過程



(a) 材料A



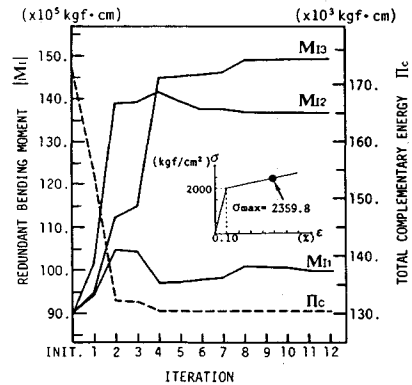
(b) 材料C

図-13 3径間連続ばりの収束状況 (1 kgf=9.81 N)

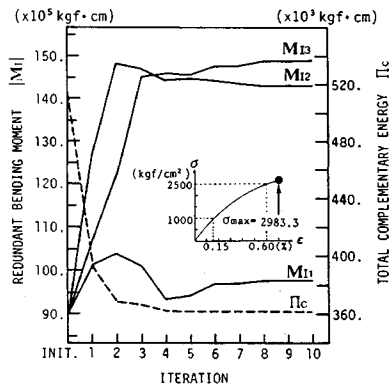
を図-13(a), (b)に、また、すべての材料における最終結果を表-2に示す。このはりの未知不静定曲げモーメントは M_{12} , M_{13} の2個であるが、2径間連続ばりの例と同様にいずれの材料においても2~3回の反復改良でほぼ最終解の近傍に達し、材料A, B, Cでそれぞれ8, 7, 6回の改良で最終解に収束している。最終解を決定するために要した計算時間は、いずれの材料においても0.17秒であった。変位法による解との誤差は0.000~0.003%であり、計算時間は変位法のほぼ40%程度であった。

(4) 2径間連続両端固定ばり

図-11(c)に示す2個の集中荷重を受ける2径間連続両端固定ばりの収束過程および最終結果をそれぞれ図-14(a), (b)および表-2に示す。このはりの未知不静定曲げモーメントは、 M_{11} , M_{12} , M_{13} の3個である。この例では、すべての材料においてほぼ3~4回の改良により最終解の近傍に達した後、ゆるやかな調整を経て材料Aで12回、材料Bで13回、材料Cで10回の改良で最終解に収束している。最終解を決定するために要した計算時間は、0.18~0.22秒であった。変位法による解と



(a) 材料A



(b) 材料C

図-14 2径間連続両端固定ばりの収束状況 (1 kgf=9.81 N)

の誤差は、0.002~0.065%であり、計算時間は変位法のほぼ50~70%程度であった。

(5) 4径間連続一端固定ばり

図-11(d)に示す集中荷重および等分布荷重を受ける4径間連続一端固定ばりの収束過程および最終結果をそれぞれ図-15(a), (b)および表-2に示す。このはりの未知不静定曲げモーメントは M_{12} , M_{13} , M_{14} , M_{15} の4個である。この例ではすべての材料においてほぼ6~8回の改良により最終解の近傍に達し、12~13回の改良で最終解に収束している。はりの全長が長くなり、反復改良回数も12~13回となっているため、最終解を決定するために必要とした計算時間も0.31~0.37秒と多少増加している。変位法による解との誤差は0.003~0.066%であり、変位法のほぼ60~80%の計算時間で最終解を得ている。

以上述べた解析例より、本論文で提案した方法により最終解を決定するために必要とする反復改良回数は、はり構造の不静定曲げモーメント M_i の数の増加に従い多少増加するが、未知不静定曲げモーメントの数が4個

と多くなくても、せいぜい12~13回の反復改良回数で能率的に正確な最終解を決定できることが明らかとなった。また、この反復改良回数は材料の応力度-ひずみ関係の特性にはほとんど影響されない。このことはエネルギー法に基礎を置く本論文の解法の大きな特徴の1つである。

7. 結 論

本研究において、非線形材料からなる直線はり構造物が固定荷重を受ける場合、各支点到に作用する不静定曲げモーメントを未知変数とし、全コンプリメンタリーエネルギーをその関数として表わすことにより無制約のエネルギー最小化問題を導入し、全コンプリメンタリーエネルギー関数を逐次二次形式に近似しながら最小化することにより、最終的な不静定曲げモーメントを決定する解析法を提案し、その汎用性、信頼性、有効性などについて検討を行った。

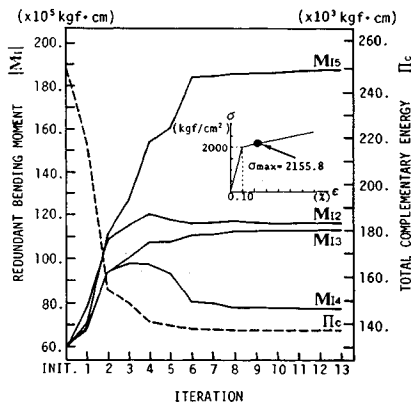
本研究により得られた結論は次のとおりである。

(1) はり構造の材料の非線形性を考慮した構造解析問題は、はりの各支点到に作用する不静定曲げモーメント M_i を未知変数とし、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき、式(13)に示すような非常に単純な無制約の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題として定式化することができる。この定式化においては、はり構造の各要素の材料の応力度-ひずみ関係の特性をそのまま用いており、いかなる応力度-ひずみ関係を有する材料の組合せからなる変断面はり構造物に対しても統一的に適用することができる。

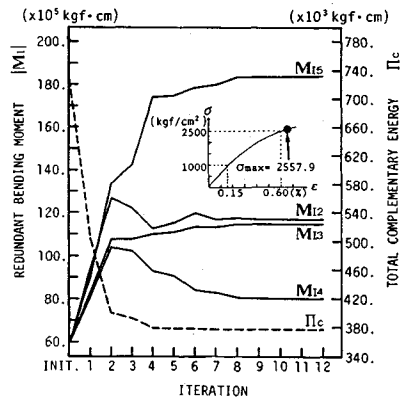
(2) 負荷履歴を考慮せず、一定荷重のもとで、はり構造の材料の非線形解析を行う問題に対して、本研究で提案している解析法では、従来の有限要素法における増分法や反復法などによる解析のように、荷重を分割したり仮想荷重を考慮したりする必要がない。さらに、はりの各有限要素の応力状態に合わせて各要素の剛性マトリックスを修正する必要もなく、作用荷重および各はり要素の材料の応力度-ひずみ関係をそのまま用いて解を直接求めることができる。

(3) 本論文で提案したはり構造の非線形解析法における未知変数は、支点上に作用する不静定曲げモーメント M_i のみであり、一般のはり構造物ではこの M_i の数は数個以内ときわめて少ない。したがって、本研究で用いている逐次二次形式近似により無制約最小化問題を反復して解く方法は、はり構造の材料非線形解析問題に対して非常に有効な解法となる。

解析例より明らかなごとく、最終解と大きく異なる任意の M_i の初期値から出発しても、 M_i が1~3個のはり構造物では2~4回、4個の場合には6~8回の反復改良



(a) 材料A



(b) 材料C

図-15 4径間連続一端固定ばりの収束状況 (1 kgf=9.81 N)

で最終解の近傍に達し、 Π_c の変化量が $1/1\,000\,000$ 以下となった時点で最終解に収束したと判定する厳しい収束判定基準のもとでも、最終解を決定するために必要な反復改良回数は、 M_i が 1 個のはり構造物で 4~5 回、2 個の構造物で 6~8 回、3 個の構造物で 10~13 回、4 個の構造物で 12~13 回と M_i の数の増加に従い多少増加するが、きわめて少ない反復改良回数で能率的に最終解を決定することができる。また、この反復改良回数は材料の応力度-ひずみ関係の特性にはほとんど影響されない。

(4) 本論文の方法により得られる M_i の最終解の精度は、式 (10) の Δx の大きさによりきわめてわずかではあるが影響を受ける。しかし、本研究の解析例程度の dimension および荷重状態を有するはり構造物では、 $\Delta x=0.5\sim 5.0$ cm 程度の範囲では解の精度にほとんど差がない。また、表-2 より明らかなごとく変位法による解との誤差は、すべての解析例において 0.066% 以下であり、両解法による解はほぼ完全に一致している。このことより、本論文の方法により、きわめて精度の高い解が得られることが明らかとなった。

(5) 本論文の方法により最終解を決定するために必要な計算時間は、式 (10) より明らかなごとく Δx の大きさによりある程度影響を受ける。本研究の解析例で線形材料の場合、 $\Delta x=0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 25.0$ cm とした場合の所要計算時間の比は、それぞれ $1.0 : (0.86\sim 0.64) : (0.57\sim 0.41) : (0.48\sim 0.30) : (0.52\sim 0.28) : (0.38\sim 0.22)$ となっており、(4) で述べた解の精度および材料の非線形性などを考慮して、本研究の解析例のような dimension および荷重状態を有するはり構造物では Δx の値として 2.0 cm 程度、すなわち Δx と支間長の比が $1/250\sim 1/350$ 程度が適当であるといえることができる。

また、本解析法による計算時間と、はりの要素長を 2.0 cm とし計算した変位法による計算時間の比は連続ばりの形式により 0.4~0.8 と種々異なるが、いかなる形式のはり構造物においても本研究で提案した方法によりきわめて能率的に正確な解を決定できることが明らかとなった。

(6) 本研究で提案している方法では、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c の最小化の過程で、 Π_c およびその不静定曲げモーメント M_i に対する偏微係数 $\partial \Pi_c$ の計算が必要となるが、本研究で提案しているように、前もってはりの各断面の使用材料に対する曲げモーメント M とコンプリメンタリーエネルギー π_c の関係を導入することにより、これらの値をきわめ

て容易に計算することができる。

以上の結論より、本論文で提案している方法により、材料の非線形性を考慮した固定荷重を受けるはり構造物の解析が非常に高い精度で、統一的に、単純かつ能率的に行えることが明らかとなった。

最後に、本研究の計算は著者らの構造工学研究室に設置している MELCOM 70 MX-2000 スーパーミニコンピュータを使用して行ったものである。ただし、論文に示した計算結果は、一般的な比較等のことを考慮し九州大学大型計算機センターの FACOM-M 780 により求めた結果を示した。また、本研究の一部は昭和 62 年度文部省科学研究費 (重点領域研究 (2)) の補助を受けて行ったものであることを付記する。

参考文献

- 1) 鷲津・宮本・山田・山本・川井 共編：有限要素法ハンドブック II 応用編，培風館，pp.173~269, 1983.
- 2) Owen, D.R.J. and Hinton, E. : Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press Limited, pp.121~153, 1980.
- 3) 成岡・服部・加藤・後藤・上田：骨組構造解析，コンピュータによる構造工学講座 II-1-B, 日本鋼構造協会編，培風館，1971.
- 4) Maier, G. : Shakedown Analysis, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, edited by Cohn and Maier, Pergamon Press, pp.107~134, 1979.
- 5) 山崎徳也・太田俊昭・石川信隆：補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析，土木学会論文報告集，第 134 号，pp.14~32, 1966.10.
- 6) 大久保禎二・和多田康男：エネルギー原理および SQP によるトラス構造物の材料非線形解析法に関する研究，土木学会論文集，第 374 号 / I-6, pp.427~436, 1986.10.
- 7) Ohkubo, S., Watada, Y. and Fujiwaki, T. : Nonlinear Analysis of Truss by Energy Minimization, Computers & Structures, Pergamon Press, Vol. 27, No. 1, pp.129~145, 1987.
- 8) Washizu, K. : Variational Methods In Elasticity And Plasticity, Pergamon Press, 1975.
- 9) Richards, T.H. : Energy Methods in Stress Analysis, Ellis Horwood Limited, 1977.
- 10) Powell, M.J.D. : A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations, In Lecture Notes in Mathematics, No.630, (edited by G.A. Watson) Springer, New York, pp.144~157, 1978.
- 11) 大久保禎二・藤脇敏夫：エネルギー原理によるはり構造物の材料非線形解析法に関する考察，第 42 回土木学会年次学術講演会概要集，第 1 部，pp.88~89, 1987.9.

(1987.9.18・受付)