

## サブパラメトリック帯板要素による薄板の曲げ解析

## BENDING ANALYSIS OF THIN PLATES BY SUB-PARAMETRIC FINITE STRIPS

林 正\*・坂田 敦\*\*・西谷雅弘\*\*\*

By Masa HAYASHI, Atsushi SAKATA and Masahiro NISHITANI

Finite strip method has not been used for the analysis of structures having irregular geometry and its applications are considerably restricted. Then, sub-parametric strip elements are presented on the bending analysis of thin plates in arbitrary shape. In the formulation of the strips, the following techniques are adopted: the element shape is defined by nodal coordinates and the mapping procedure used in the ordinary finite element approach; the parent elements of the strips are thick strips having an internal nodal line and a bubble mode; the series used in the displacement functions are given by polynomials instead of the commonly used eigenfunctions; and the sub-parametric strips are formulated by the help of the discrete Kirchhoff constraint conditions and a procedure of condensation. Finally, the versatility and accuracy are illustrated through several numerical examples.

*Keywords*: finite strip method, sub-parametric strip, plate bending

## 1. ま え が き

有限帯板法<sup>1)</sup>は、箱形断面桁や回転シェルなどの形状が単純な薄肉構造物の解析には計算効率のよい構造解析法であり、薄板や円筒シェルの有限変位解析にも適用することができる<sup>2),3)</sup>。しかし、従来から用いられている帯板要素の形状は長方形、平行四辺形、または曲率が一定な扇形板や曲面板などの規則的なものであるため、有限帯板法の適用範囲は大幅に制約される。そこで、本報告では有限要素法で用いられている写像変換の手法により任意形状の平板曲げ帯板要素を開発する。

有限要素法 (FEM) で多用されているアインパラメトリック要素の定式化については多くの研究が行われているが<sup>4)~6)</sup>、有限帯板法 (FSM) では級数展開した変位関数に境界条件に応じたはりの固有関数を用いるために種々の問題が生じ、FEMにおける手法をそのまま用いることができない。すなわち、FEMでは親要素に厚板要素を用いて、これを薄板の曲げ解析に適用するために次数低減積分の手法が用いられることが多いが、

FSMでは級数展開された固有関数ごとに最適なガウスの数値積分次数を定めることは困難である。

FSMにおいても次数低減積分や選択積分の手法を用いて Mindlin 帯板要素<sup>7)</sup>を薄板や薄肉シェルの解析に適用した研究が報告されている<sup>8)~10)</sup>。

しかし、これらの研究では規則的な形状の要素を解析しているため、要素内の面積分は2つの直交座標軸に関して独立に行うことができる。そこで、級数展開した座標軸方向の積分は厳密に行い、多項式で近似した方向の積分に上述の低次積分を用いている。また、2辺単純支持の境界条件を扱っているため、変位関数に用いた三角級数を解析的に積分するのは容易である。

本研究では、写像変換された任意の曲線座標を使用するので、上述の分離した積分手法を用いることができない。また、固定支持板の FSM 解析で用いられる変位関数には双曲線関数が含まれるため<sup>1)</sup>、丸め誤差が大きくて数値積分の精度が著しく悪くなる。式を変形すれば積分精度を改善することもできるが<sup>11)</sup>、いずれにせよ初等関数を含む通常の FSM 解析で用いられている変位関数はガウスの求積法には適さない。

以上の観点から、本研究では Kirchhoff の拘束条件を厚板要素に課して任意形状の薄板の曲げ要素を求める。FEMでも同じ手法が用いられているが、FEMでは回

\* 正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部建設系 (〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

\*\* 正会員 工修 大阪府 (研究当時・長岡技術科学大学大学院) (〒571 門真市新橋町 14-14)

\*\*\* 学生会員 長岡技術科学大学大学院 建設工学専攻

転角に2成分を用いるのに対して、1成分しか用いない通常のFSM(前述の文献7)~10)では回転角に2成分を用いている)では拘束条件の適用方法を工夫する必要がある。なお、任意な四辺形帯板要素は大坪・北野<sup>12)</sup>によって求められたが、この要素は通常の正方形薄板帯要素を任意四辺形要素に変換し、節線自由度を節点自由度に変換したものであって、厚板要素を変換する本文の手法とは異なる。

本文中で用いた手法の要点は次のとおりである。

- 1) 写像変換にはFEMのセレンディピティ要素の形状関数を用いる。
- 2) 離散Kirchhoff帯板要素として定式化する。
- 3) Kirchhoffの拘束条件の適用方法を工夫する。
- 4) 拘束条件を課すのに縮約の手法を用いる。
- 5) 多項式で近似した級数を用いる。
- 6) 中間節線と内部節線を加えた変位関数を用いる。

以上の定式化で用いる変位関数は要素の形状を定める関数より高次であるので、本研究で開発する要素をサブパラメトリック帯板要素とよぶことにする。

## 2. 長方形厚板要素

### (1) 親要素

写像変換する前の親要素には、中央面上の相対する縁辺とその中間に合計3本の節線を有する長方形帯板要素(6自由度要素とよぶ)と、さらにたわみ $w$ のみに内部自由度を付加した要素(7自由度要素)を用いる。この要素を任意形状の曲線要素に変換するために8個の節点を設け、これらの節点と節線には図-1のように番号を付ける。また、正規化した要素座標 $\xi, \eta$ ( $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ )を図のように定める。

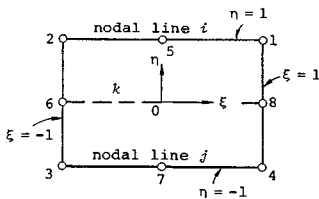


図-1 親要素

### (2) 変位関数

親要素は中央面のたわみ $w$ と $\xi$ 軸回りの回転角 $\theta$ を変位関数とする厚板要素とし、一般化変位は各節線での第 $m$ 項 $w_{im}, \theta_{im}$ , etc.とする。

7自由度要素ではこれらの一般化変位に節線に関係しない内部自由度(bubble mode) $w_{bm}$ を加えると、この要素の変位関数を次式で仮定することができる<sup>13)</sup>。

注1) 以下の式において、6自由度要素では $w_{bm}$ に関する項を省くものとする。

$$w = \sum_m X_m \{ f_i w_{im} + f_j w_{jm} + f_k w_{km} + f_b w_{bm} \}$$

$$\theta = \sum_m X_m \{ f_i \theta_{im} + f_j \theta_{jm} + f_k \theta_{km} \} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $X_m$ は(3)で説明する展開関数、 $f_i$ は次式で与えられる幅方向の形状関数である。

$$f_i(\eta) = \eta(\eta+1)/2, f_j(\eta) = \eta(\eta-1)/2$$

$$f_k(\eta) = 1-\eta^2, f_b(\eta) = \eta(1-\eta^2) \dots \dots \dots (2)$$

ここで、7自由度要素の第 $m$ 項の一般化変位をまとめて7次の列ベクトル $d_m$ で表わし、これに対応する形状関数ベクトル $f_i$ を定義する。

$$d_m = \{ w_{im}, \theta_{im}, w_{jm}, \theta_{jm}, w_{km}, \theta_{km}, w_{bm} \}^T \dots \dots \dots (3)$$

$$f_i = \{ f_i \ 0 \ f_j \ 0 \ f_k \ 0 \ f_b \}^T \dots \dots \dots (4)$$

$$f_i = \{ 0 \ f_i \ 0 \ f_j \ 0 \ f_k \ 0 \}^T \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 $T$ は転置記号である。

式(3)、(4)を式(1)に用いて次式を得る。

$$w = \sum_m X_m f_i^T d_m, \theta = \sum_m X_m f_i^T d_m \dots \dots \dots (5)$$

### (3) 展開関数

式(1)の展開関数 $X_m$ には、通常、両辺( $\xi = \pm 1$ )の境界条件に応じたはりの固有関数が用いられる<sup>1)</sup>。

- 2辺単純支持板：  
 $X_m(\xi) = \sin m\pi\xi \quad (m=1, 2, \dots) \dots \dots \dots (6)$

- 2辺固定支持板：  
 $X_m(\xi) = \sin \alpha_m \xi - \sinh \alpha_m \bar{\xi}$   
 $\quad - \mu_m (\cos \alpha_m \bar{\xi} - \cosh \alpha_m \bar{\xi}) \quad (m=1, 2, \dots) \dots \dots \dots (7)$

ここに、 $\alpha_m, \mu_m$ は両端固定ばりの振動数方程式から求められる定数である。また、 $\bar{\xi}$ は次の正規座標である。

$$\bar{\xi} = (1+\xi)/2 \quad (0 \leq \bar{\xi} \leq 1) \dots \dots \dots (8)$$

本研究では、式(6)、(7)の固有関数の代わりに次の多項式を用いる。

- 2辺単純支持板：  

$$X_m(\xi) = \begin{cases} (\xi^2-1)(\xi^2-\alpha_1) & (m=1) \\ (\xi^2-1)(\xi^2-\alpha_m) \prod_{i=1}^{m-1} \left( \xi + \frac{11}{10} \beta_{m,i} \right) & (m \geq 2) \end{cases} \dots \dots \dots (9)$$

ここに、

$$\beta_{m,i} = 1 - 2i/m \dots \dots \dots (10)$$

で、 $\alpha_m$ は境界条件 $d^2 X_m / d\xi^2 = 0$ (for  $\xi = \pm 1$ )から決定される定数である。

- 2辺固定支持板：  

$$X_m(\xi) = \begin{cases} (\xi^2-1)^2 & (m=1) \\ (\xi^2-1)^2 \prod_{i=1}^{m-1} (\xi + \beta_{m,i}) & (m \geq 2) \end{cases} \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 $\beta_{m,i}$ は式(10)で与えられる。

これらの関数を正規化した値を図-2, 3に示す。低次モードではよく一致しているが、高次モードでは形状に

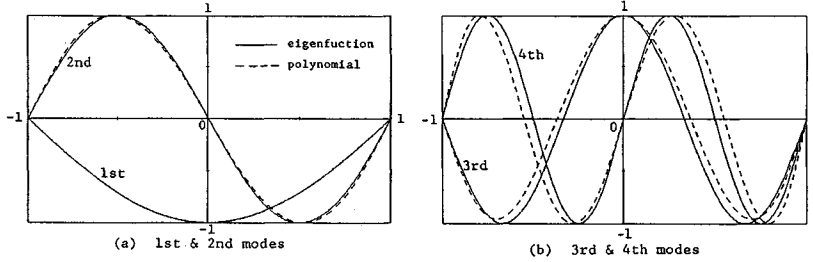


図-2 両端単純支持の展開関数

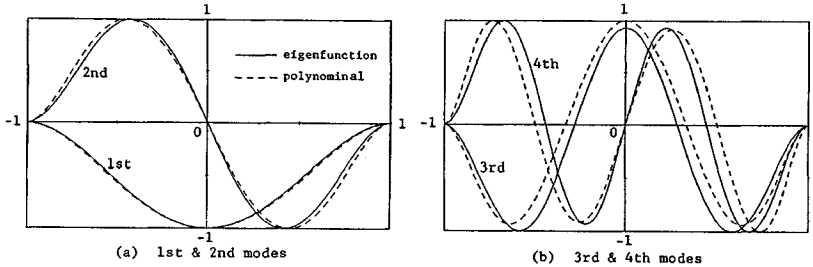


図-3 両端固定支持の展開関数

差がみられる。

### 3. サブパラメトリック帯板要素

7自由度要素についてサブパラメトリック帯板要素を定式化する。

#### (1) 写像変換

写像変換するための形状関数(写像関数)には、次式の8節点セレンディピティ要素の形状関数を用いる<sup>4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1) & (i=1-4) \\ N_i &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0) & (i=5, 7) \\ N_i &= \frac{1}{2}(1+\xi_0)(1-\eta^2) & (i=6, 8) \end{aligned} \right\} \dots(12)$$

ここに、親要素での節点  $i$  の座標値を  $(\xi_0, \eta_0)$  として  $\xi_0 = \xi_0 \xi, \eta_0 = \eta_0 \eta \quad (-1 \leq \xi, \eta \leq 1) \dots(13)$

写像変換には、FEMと同じ手法を用いることができる。すなわち、 $(x_i, y_i)$  を全体座標系  $(x, y)$  における節点  $i$  の座標値とすれば、要素上の任意点の座標  $(x, y)$  は次式で与えられる。

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \dots(14)$$

ここで、ヤコビ行列  $J$  およびその逆行列の要素を次式で表わす。

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \dots(15)$$

#### (2) ひずみ成分

薄板におけるひずみの3成分

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \dots(16)$$

を、付録の式(A・3)を用いて次のように表わす。

$$\epsilon = -z [C] \left\{ \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial \xi^2 \\ \partial^2 w / \partial \eta^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial \xi \partial \eta \end{Bmatrix} - [G] \begin{Bmatrix} \partial w / \partial \xi \\ \partial w / \partial \eta \end{Bmatrix} \right\} \dots(17)$$

薄板における Kirchhoff の仮定は次式で表わされる。

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \dots(18 \cdot a, b)$$

ここに、 $\theta_x, \theta_y$  はそれぞれ  $x, y$  軸回りの回転成分である。

FEMでは上記の2成分を一般化変位に用いているのに対して、本文では式(1)の  $\xi$  軸回りの成分  $\theta$  しか用いない。したがって、 $\theta$  に対する拘束条件には式(18・a)を用いればよいが<sup>13)</sup>、座標軸  $\xi$  と  $x$  が平行でない場合には解の精度が悪くなる。そこで、拘束条件式として  $\theta = \partial w / \partial \eta$  を用いて長さの次元を合わせるために線素  $dy = J_\eta d\eta$  を考慮して次式を用いる。

$$\theta = \frac{1}{J_\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad J_\eta = \sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2} \dots(19)$$

式(17)の右辺の曲率とねじれ率は式(19)より

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = J_\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} \theta$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = J_\eta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial J_\eta}{\partial \xi} \theta$$

と表わすことができるから、これと式(5)を式(17)に用いると次式が求められる。

$$\epsilon = -z[C] \sum_m [B_m] d_m \dots\dots\dots(20)$$

ここに、

$$B_m = \begin{bmatrix} X_m' f_1^T \\ X_m (J_n g_2^T + K_n f_2^T) \\ 2(J_n X_m' + K_n X_m) f_2^T \end{bmatrix} - [G] \begin{bmatrix} X_m' f_1^T \\ J_n X_m f_2^T \end{bmatrix} \dots\dots\dots(21)$$

$$g_i = df_i / d\eta \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots(22)$$

$$\left. \begin{aligned} K_\epsilon &= \frac{\partial J_n}{\partial \xi} = \frac{1}{J_n} \left( J_{21} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + J_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\ K_n &= \frac{\partial J_n}{\partial \eta} = \frac{1}{J_n} \left( J_{21} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + J_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

プライムは  $\xi$  に関する微分を表わす。

(3) 平衡方程式

帯板要素は厚さ一定で等方性材料とすると、仮想ひずみエネルギーはせん断変形による項を省略して次のように表わされる。

$$\delta U = \int_V \sigma^T \delta \epsilon dV = \sum_m \sum_n \delta d_m^T [k_{mn}] d_n \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $k_{mn}$  は級数項  $m, n$  に対する要素の剛性行列で、式(20)より次式のようになる。

$$k_{mn} = D \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_m^T C^T DCB_n |J| d\xi d\eta \dots\dots\dots(25)$$

ここに、

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \dots\dots\dots(26)$$

$D$  は板の曲げ剛性、 $t$  は板厚、 $E$  はヤング係数、 $\nu$  はポアソン比、 $|J|$  は式(15)のヤコビアンである。なお、 $k_{mn}$  は7自由度要素では7次の正方行列である。

次に、要素の中央面上の任意点  $a$  に作用する集中荷重を  $P$ 、表面力を  $q$  とすると、これらの荷重による等価節線荷重(荷重ベクトル)の第  $m$  項  $p_m$  は次のようにして求められる。

$$P \delta w_a + \int_A q \delta w dA \equiv \sum_m p_m^T \delta d_m$$

これに式(5)の  $w$  を代入して

$$p_m = P (X_m f_1)_a + \int_A q X_m f_1 |J| d\xi d\eta \dots\dots\dots(27)$$

ゆえに、一般化変位に対応する一般化力(節線力)を  $q_m$  とすると、仮想変位の原理により次式の要素の平衡方程式が得られる。

$$\sum_n [k_{mn}] d_n = q_m + p_m \quad (m=1, 2, \dots) \dots\dots\dots(28)$$

なお、式(25)の  $k_{mn}$  と式(27)の  $p_m$  はガウスの数値積分を用いて求める。

4. 離散 Kirchhoff 帯板要素

(1) 拘束条件

式(19)から Kirchhoff の拘束条件式として次式を用いる。

$$\Gamma(\xi, \eta) = \partial w / \partial \eta - J_n \theta = 0 \dots\dots\dots(29)$$

これに式(5)を代入すると

$$\sum_m X_m |g_1^T - J_n f_2^T| d_m = 0$$

となってすべての一般化変位が連成するので計算が困難になる。そこで、拘束条件を各級数ごとに分離して課すことにすれば次式が得られる。

$$\Gamma_m(\xi, \eta) = |g_1^T - J_n f_2^T| d_m = 0 \quad (m=1, 2, \dots) \dots\dots\dots(30)$$

$\Gamma_m$  を離散化して課す方法として線拘束と点拘束を考える。線拘束では式(30)を  $\eta = \eta_0$  上の線に沿って課し、点拘束では要素上の2点  $(-\xi_0, \eta_0)$ 、 $(\xi_0, \eta_0)$  で平均して課すことにすれば次式のようになる。

$$\Gamma_m(\xi_0, \eta_0) = |g_1^T - F_0 f_2^T| d_m = 0 \dots\dots\dots(31)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \text{線拘束: } F_0 &= \int_{-1}^1 J_{\eta_0} J_{\xi_0} d\xi / \int_{-1}^1 J_{\xi_0} d\xi \\ &\quad (\text{on } \eta = \eta_0) \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{点拘束: } F_0 &= (J_{\eta_0}^- + J_{\eta_0}^+) / 2 \\ &\quad \text{at } (\pm \xi_0, \eta_0) \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

$$J_\xi = \sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2} \dots\dots\dots(34)$$

上式中において添字  $0$  は  $\eta = \eta_0$  を、上付記号  $\pm$  は  $\xi = \pm \xi_0$  を代入した値を表わす。

なお、幅が一定な帯板要素で  $J_n = \text{const.}$  な場合には、2つの拘束条件式は同じ式になる。

(2) 縮 約

式(31)の一本の拘束条件式を用いると、式(28)の第  $m$  項に関する平衡方程式から1個の一般化変位を消去することができる。そこで、6自由度要素では  $\eta_0 = \pm 1/\sqrt{3}$  で2本の拘束条件式をたてて中間節線の自由度  $w_{km}$ 、 $\theta_{km}$  を消去する。7自由度要素ではさらに  $\eta_0 = \pm 1$  での式をたし合わせて1本の式にし、これを用いて内部自由度  $w_{bm}$  を消去する。

自由度の消去には縮約の手法を用いるが、その手順は有限要素法<sup>5)</sup>と同じであるので7自由度要素について簡単に説明する。

$\eta_0$  として上述の4つの座標値  $\eta_i (\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1)$  を式(31)に代入して3本の式を求める。この3元連立方程式を消去すべき3個の一般化変位  $d_{am}$  と残りの  $i, j$  節線の一般化変位  $d_{bm}$  に分けて次式のように表わす。

$$\Gamma_a d_{am} = \Gamma_b d_{bm} \dots\dots\dots(35)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{am} &= \{w_{km}, \theta_{km}, w_{bm}\}^T \\ \mathbf{d}_{bm} &= \{w_{lm}, \theta_{lm}, w_{jm}, \theta_{jm}\}^T \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\mathbf{\Gamma}_a = \begin{bmatrix} g_{k1} & -F_1 f_{k1} & g_{b1} \\ g_{k2} & -F_2 f_{k2} & g_{b2} \\ g_{k3} & -F_3 f_{k3} & g_{b3} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (37 \cdot a)$$

$$\mathbf{\Gamma}_b = \begin{bmatrix} -g_{i1} & F_1 f_{i1} & -g_{j1} & F_1 f_{j1} \\ -g_{i2} & F_2 f_{i2} & -g_{j2} & F_2 f_{j2} \\ -g_{i3} & F_3 f_{i3} & -g_{j3} & F_3 f_{j3} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (37 \cdot b)$$

$$g_i = df_i/d\eta \quad (i=i, j, k, b) \quad \dots\dots\dots (38)$$

$g_{in}, F_n f_{in}$  で  $n=1, 2$  は  $\eta_0 = \pm 1/\sqrt{3}$  を代入した値を,  $n=3$  は  $\eta_0 = \pm 1$  を代入した値の和を表す。点拘束の場合には  $F_n$  を求めるために適当な  $\xi_0$  の値を式 (33) に用いるものとする。

式 (35) を解いて,

$$\mathbf{d}_{am} = [\mathbf{\Gamma}] \mathbf{d}_{bm} \quad (\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_a^{-1} \mathbf{\Gamma}_b) \quad \dots\dots\dots (39)$$

と表わすと,  $\mathbf{\Gamma}$  は (3×4) の行列である。これに 4 次の単位行列  $\mathbf{E}$  を加えて次の縮約方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{am} \\ \mathbf{d}_{bm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{d}_{bm} \quad \dots\dots\dots (40)$$

次に, 式 (28) の第  $m$  項に関する平衡方程式を式 (36) に対応して次式のように表わす。

$$\sum_n \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix}_{mn} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{am} \\ \mathbf{d}_{bm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_{bm} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{am} \\ \mathbf{p}_{bm} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (41)$$

上式に式 (40) を代入し, 両辺の左から行列  $[\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{E}]$  を掛けて展開すると縮約された平衡方程式が得られる。この操作を全級数項について行くと, 次の一枚の帯板に対する離散 Kirchhoff 要素の式が求められる。

$$\sum_n [\bar{k}_{mn}] \mathbf{d}_{bm} = \mathbf{q}_{bm} + \bar{\mathbf{p}}_m \quad (m=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (42)$$

ここに,

$$\bar{k}_{mn} = [k_{bb}]_{mn} + \mathbf{\Gamma}^T [k_{ab}]_{mn} + [k_{ba}]_{mn} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^T [k_{aa}]_{mn} \mathbf{\Gamma} \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_m = \mathbf{p}_{bm} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{p}_{am} \quad \dots\dots\dots (44)$$

### 5. 数値計算例

サブパラメトリック帯板要素の定式化の妥当性と解の精度を調べるために, 薄板の曲げ解析について計算する。

以下の数値計算例では, 線拘束と点拘束による結果は同じになる。そこで, 拘束条件にはすべて式 (33) を使用し, 拘束点の  $\xi$  座標値は  $\xi_0 = 0$  とした。これらの計算例は文献 13) で用いたものであるが, 式 (29), (30) の拘束条件式が異なるために計算結果に差がある。

#### (1) 正方形板 (四辺形要素)

任意四辺形要素の適用例として, 図-4 に示すように, 正方形板を斜めに分割して 2 要素を用いて計算する。ポアソン比は 0.3 とし, 固有関数の積分にはガウスの 10 点公式を用いた。

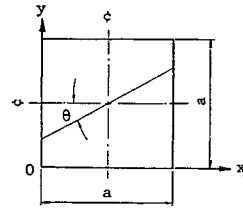


図-4 正方形板

境界条件, 荷重および分割角度を変えた場合に, 級数項数  $m$  と展開関数  $X_m$  による精度を 6 自由度要素と 7 自由度要素について調べた。表-1, 表-2 に中央点の最大たわみ  $w$  と応力  $\sigma_x$  を解析解<sup>14)</sup> に対する比で示す。なお, 表で Eigen は固有関数を用いた値, Poly. は多項式を用いた値である。

周辺単純支持板に満載等分布荷重  $q$  が作用する場合には比較的良好な値が得られており,  $\theta = 0^\circ$  と  $15^\circ$  の場合の誤差はたわみで 2% 以内, 応力で 3~6% 程度である。周辺固定支持の場合や中央点に作用する集中荷重  $P$  に対しては精度が悪化している。

これらの値から, 要素の自由度数と展開関数の違いによる精度の差についてどの要素がよいとはいえないが, 応力に関しては 6 自由度より 7 自由度要素の方が 1~6% 程度精度がよい。また, 級数項数はたわみで 3 項 ( $\theta = 0^\circ$  の場合は実質 2 項), 応力では 5 項 (同じく, 3 項) でほぼ収束している。しかし, 項数を多く採ると固定支持板では応力の精度が悪化しているが, この性状は要素数が少ないときに起きる現象で, FSM では平面応力解析でも同じ現象が認められる。要素数を多くした場合の例は, (2) で説明する。なお, 従来の有限帯板法では, 固定支持長方形板の半分を 5 要素に分割して正解が得られている<sup>1)</sup>。

$\theta = 30^\circ$  の場合の精度が悪いが, これは形状 (図-4 の形状) があまりにもいびつなためであって, さらに要素分割が必要である。

#### (2) 正方形板 (三角形要素)

写像変換を用いる場合には, FEM の場合<sup>6)</sup> と同様に, 四辺形要素において 2 つの隅角点の座標値を一致させることによって三角形要素が得られる。このようにして得られる三角形帯板要素を先の正方形板の例に用いて, その有効性を調べる。

図-5 のように, 正方形板の半分を分割方法を変えて計算する。A と C は三角形要素と台形要素を用いた場合であり, B は A において三角形要素の頂点における解析上の特異点を除くために, 2 つの節点間にわずかな隙間 ( $a/20$ ) を設けた。なお, 三角形の鋭角は約  $14^\circ$  である。

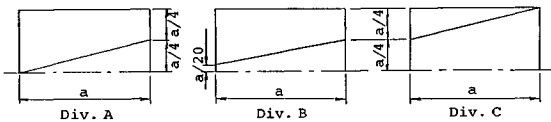
数値計算では図-4 の結果を考慮して, 多項式による

表一 正方形板の中央点のたわみ

Load	m	X <sub>m</sub>	Simply Supported Edges						Clamped Edges					
			θ = 0°		θ = 15°		θ = 30°		θ = 0°		θ = 15°		θ = 30°	
			6 DOF	7 DOF	6 DOF	7 DOF	6 DOF	7 DOF	6 DOF	7 DOF	6 DOF	7 DOF	6 DOF	7 DOF
q	3	Eigen Poly.	1.014	1.007	0.990	0.984	0.919	0.913	1.069	1.017	1.045	0.992	0.959	0.908
	5	Eigen Poly.	1.017	1.006	0.990	0.985	0.917	0.913	1.077	1.042	1.052	0.999	0.963	0.913
	Analytical	1.0 (4.0623 × 10 <sup>-3</sup> )						1.0 (1.2653 × 10 <sup>-3</sup> )						
P	3	Eigen Poly.	0.983	0.961	0.954	0.940	0.882	0.868	0.991	0.939	0.971	0.919	0.895	0.846
	5	Eigen Poly.	0.993	0.969	0.964	0.946	0.889	0.872	1.007	0.954	0.981	0.933	0.907	0.857
	Analytical	1.0 (1.1598 × 10 <sup>-2</sup> )						1.0 (5.6115 × 10 <sup>-3</sup> )						

表二 正方形板の中央点の応力

Load	m	X <sub>m</sub>	Simply Supported Edges						Clamped Edges					
			θ = 0°		θ = 15°		θ = 30°		θ = 0°		θ = 15°		θ = 30°	
			6 DOF	7 DOF	6 DOF	7 DOF	6 DOF	7 DOF	6 DOF	7 DOF	6 DOF	7 DOF	6 DOF	7 DOF
q	3	Eigen Poly.	1.040	1.033	1.033	1.022	1.017	0.998	1.144	1.100	1.111	1.073	1.029	1.006
	5	Eigen Poly.	1.056	1.049	1.053	1.036	1.021	1.004	1.215	1.165	1.181	1.137	1.097	1.067
	Analytical	1.0 (0.28733)						1.0 (0.13743)						



図一五 正方形板の要素分割

級数を3項用いた7自由度要素を使用する。中央線上の midpoint と 1/4 点 (ξ=0, ±0.5) のたわみと応力 σ<sub>x</sub> (固定支持の場合は ξ=0, ±1) を表一3, 4 に示す。

表一3, 4 より、三角形の頂点側の点 (ξ=-0.5, -1) と対称な反対側の点 (ξ=0.5, 1) での値が異なり、頂点側の方が精度が悪いことがわかる。これは非対称な要素分割による影響で当然のことであるが、図一1 に示した側边上の節点 6, 8 の位置を midpoint からずらすことによってある程度は改善できるものである。また、要素分割 A~C による相違は少ないといえる。しかし、どの分割においても応力は表一2 の θ=15° の値と比べると精度はよくて、特に固定支持板では要素数を多くしたことによる効果が著しい。

分割 B の場合について、中央線上の σ<sub>x</sub> の分布を図一6, 7 に示す。実線が解析解で、○印は計算値である。図一6 の単純支持板では要素の鋭角部付近で誤差が生じているが、固定支持板では良い値が得られている。

図一4, 5 の計算例から、まだ改善の余地はあるが、有限帯板法においても三角形要素や任意四辺形要素の適用が可能であると考えられる。

表三 正方形板の中央線上のたわみ

Load	Division	Simply Supp. Edges			Clamped Edges		
		ξ=-0.5	ξ=0.0	ξ=0.5	ξ=-0.5	ξ=0.0	ξ=0.5
q	A	0.933	0.980	1.001	0.973	0.989	0.995
	B	0.934	0.966	0.992	0.982	0.998	0.993
	C	0.946	0.964	0.975	1.022	0.999	0.985
P	A	0.959	0.948	1.007	1.025	0.936	1.014
	B	0.968	0.945	1.005	1.046	0.952	1.019
	C	0.992	0.935	0.977	1.001	0.932	1.089
Analytical		1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
		2.9382	4.0623	2.9382	0.7583	1.2653	0.7583
		0.7139	1.1598	0.7139	0.2468	0.5612	0.2468

表四 正方形板の中央線上の応力

Load	Division	Simply Supp. Edges			Clamped Edges		
		ξ=-0.5	ξ=0.0	ξ=0.5	ξ=-1.0	ξ=0.0	ξ=1.0
q	A	0.859	1.013	1.037	—	0.998	0.985
	B	0.953	0.997	1.007	0.992	1.007	1.001
	C	0.914	0.995	1.044	1.039	1.065	0.976
Analytical		1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
		2.3343	2.8733	2.3343	-3.0800	1.3743	-3.0800

(3) 斜板

図一8 に示す満載等分布荷重を受ける斜板 (斜角 = 26.5°) について計算する。この計算例は文献 14) に差分法により解かれているが、差分の精度が悪いので、12×16 要素に分割した FEM (日本電気 ISAP を使用) による値と比較する。

境界条件は 2 辺単純支持、残りの 2 辺は単純支持と自由の場合を考える。斜板全体を 4 要素に分割し、図一5 と同じく多項式を 3 項用いた 7 自由度要素で計算する。

表一5 に各節線 A~E 上の 4 点のたわみを FEM 解に

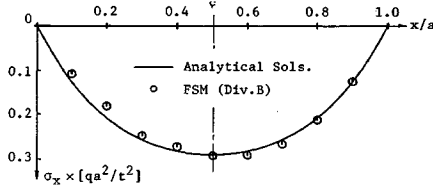


図-6 単純支持板の応力分布

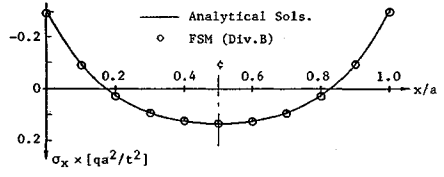


図-7 固定支持板の応力分布

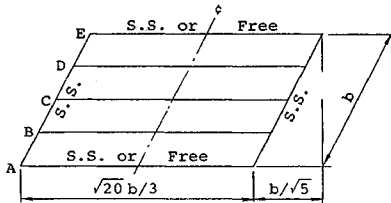


図-8 斜板

表-5 斜板のたわみ

B. C.	Line	$\xi$			
		-0.25	-0.5	-0.75	0.0
S. S. &	B	0.955	0.928	0.955	0.983
	C	0.923	0.940	0.975	0.991
S. S.	D	0.887	0.944	0.982	0.983
S. S. &	A	1.006	1.010	1.015	1.017
	C	1.024	1.020	1.016	1.015
Free	E	1.000	1.003	1.012	1.017

対する比で示す。4辺単純支持の場合にはやや精度は悪いが、2辺自由の場合には良い結果が得られている。

(4) 扇形板

曲線要素への適用例として、図-9に示す扇形板<sup>15)</sup>を

計算する。板の形状は中心角が30°で中央円弧長と幅が同一寸法である。境界条件は直線の2辺で単純支持、円弧で単純支持と自由の場合とする。また、ポアソン比は0とした。

表-6 扇形板の中心線上のたわみ (M=2)

B. C.	Sol.	Point No.								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
S. S. & S. S.	FSM	—	0.997	0.999	0.998	0.999	0.997	0.998	0.991	—
	FEM (8*10)	—	0.966	0.970	0.973	0.974	0.975	0.973	0.976	—
	Analytical (x 10 <sup>-3</sup> qb <sup>2</sup> /D)	—	1.0 (1.503)	1.0 (2.772)	1.0 (3.655)	1.0 (4.038)	1.0 (3.843)	1.0 (3.041)	1.0 (1.700)	—
S. S. & Free	FSM	0.998	0.999	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	1.000	1.002
	FEM (8*10)	0.992	0.990	0.991	0.991	0.992	0.992	0.993	0.995	0.996
	Analytical (x 10 <sup>-2</sup> qb <sup>2</sup> /D)	1.0 (0.748)	1.0 (0.903)	1.0 (1.075)	1.0 (1.266)	1.0 (1.473)	1.0 (1.691)	1.0 (1.912)	1.0 (2.131)	1.0 (2.343)

表-7 扇形板 (S. S. & S. S.) の曲げモーメント

Moment	Terms (M)	Point No.								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
M $\theta$	1	1.024	1.097	1.083	1.082	1.090	1.100	1.105	1.063	0.812
	2	1.013	0.967	0.983	0.982	0.985	0.979	0.967	0.931	0.792
	3	1.014	0.992	0.998	0.997	0.996	0.992	0.984	0.952	0.794
	Analytical x10 <sup>-2</sup> qb <sup>2</sup>	1.0 (-0.88)	1.0 (1.407)	1.0 (2.859)	1.0 (3.557)	1.0 (3.637)	1.0 (3.243)	1.0 (2.526)	1.0 (1.647)	1.0 (0.751)
M $r$	1	—	0.952	1.047	0.990	1.035	0.990	1.116	0.975	—
	2	—	0.838	1.045	0.990	1.033	0.977	1.081	0.923	—
	3	—	0.941	1.045	0.990	1.033	0.977	1.082	0.927	—
	Analytical x10 <sup>-2</sup> qb <sup>2</sup>	(0.0)	1.0 (1.543)	1.0 (2.492)	1.0 (3.211)	1.0 (3.732)	1.0 (3.921)	1.0 (3.543)	1.0 (2.315)	(0.0)

表-8 扇形板 (S. S. & Free) の曲げモーメント

Moment	Terms (M)	Point No.								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
M $\theta$	1	1.013	1.015	1.022	1.019	1.022	1.024	1.026	1.023	1.029
	2	0.993	0.993	0.993	0.992	0.991	0.991	0.989	0.983	0.989
	3	1.003	1.003	1.008	1.002	1.001	1.001	0.999	0.995	0.999
	Analytical x10 <sup>-2</sup> qb <sup>2</sup>	1.0 (11.45)	1.0 (12.71)	1.0 (12.82)	1.0 (13.10)	1.0 (13.31)	1.0 (13.47)	1.0 (13.55)	1.0 (13.59)	1.0 (13.44)
M $r$	1	—	0.883	1.140	0.987	1.008	1.047	2.543	1.140	—
	2	—	0.870	1.127	0.974	0.988	1.015	2.504	1.081	—
	3	—	0.871	1.128	0.974	0.989	1.019	2.496	1.095	—
	Analytical x10 <sup>-2</sup> qb <sup>2</sup>	(0.0)	1.0 (-1.11)	1.0 (-1.28)	1.0 (-1.05)	1.0 (-0.68)	1.0 (-0.25)	1.0 (0.065)	1.0 (0.146)	(0.0)

満載等分布荷重による中心線上の8等分点のたわみと曲げモーメントを、解析解<sup>15)</sup>に対する比で表—6~8に示す。本計算例では、対称モードの多項式を1~3項 ( $m=1\sim 5$ ) 採用して7自由度要素で4分割して計算した。比較のために、 $8\times 10$ 分割 (実質40要素を使用) したFEMによる値も示した。

本解析法では円弧を放物線で近似しているにもかかわらず、たわみは2項でほぼ完全に解析解に一致している。FEMでもよい値が得られているが、FSMの総自由度数はFEMの約1/4 (縮約後は1/8) で、計算効率のよいことがわかる。

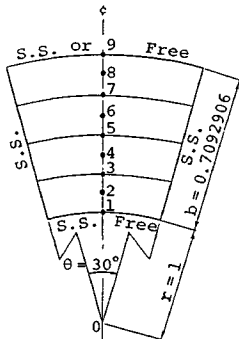
曲げモーメントは最大値で1~3%程度の誤差で、特に  $M_\theta$  の精度がよい。  $M_r$  は値の小さい端部や曲率の変化点で誤差が大きいが (表—8では、  $M_r$  は  $M_\theta$  の1/10~1/200)、要素数を増すことによって誤差を小さくすることができる。

6. 結 論

本文で開発したサブパラメトリック帯板要素について以下のことがいえる。

- (1) 三角形要素も含めた任意な形状に適用できる帯板法を初めて定式化することができた。
- (2) 従来の帯板法で用いられていた固有関数の級数の代わりに多項式による級数を提案し、同精度の解が得られることを示した。これによって、積分演算を容易に行うことができる。
- (3) 有限帯板法に適した離散化 Kirchhoff の拘束条件式を提案した。
- (4) 7自由度要素は6自由度要素に比べて、応力の精度が若干良いといえる。

有限帯板法は計算効率のよい解析法であるが、その汎用性で最も大きな障害であった形状に対する制約を本研究によって取り除くことができた。解の精度の改善とともに、さらに汎用化と効率化について検討したい。



図—9 扇形板

付録 パラメーター写像における微分

式 (15) の  $J$  を用いると

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (A.1)$$

これを展開して第1式を2回用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} &= \frac{\partial}{\partial\xi} \left( J_{11} \frac{\partial}{\partial x} + J_{12} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= J_{11}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 J_{11} J_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ &\quad + J_{12}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial J_{11}}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial J_{12}}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

同様に、第2式を用いて  $\partial^2/\partial\eta^2$ ,  $\partial^2/\partial\xi\partial\eta$  を求めることができる。これらを行列表示して次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \partial^2/\partial\xi^2 \\ \partial^2/\partial\eta^2 \\ 2\partial^2/\partial\xi\partial\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{11}J_{12} \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & J_{21}J_{22} \\ 2J_{11}J_{21} & 2J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial^2/\partial x^2 \\ \partial^2/\partial y^2 \\ 2\partial^2/\partial x \partial y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial J_{11}/\partial\xi & \partial J_{12}/\partial\xi \\ \partial J_{21}/\partial\eta & \partial J_{22}/\partial\eta \\ 2\partial J_{11}/\partial\eta & 2\partial J_{22}/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} \dots\dots (A.2)$$

上式の右辺第1項の逆行列  $C$  を両辺に乗じたものに式 (A.1) を用いると次式が求められる。

$$\begin{Bmatrix} \partial^2/\partial x^2 \\ \partial^2/\partial y^2 \\ 2\partial^2/\partial x \partial y \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \partial^2/\partial\xi^2 \\ \partial^2/\partial\eta^2 \\ 2\partial^2/\partial\xi\partial\eta \end{Bmatrix} - [G] \begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (A.3)$$

ここに、式 (15) の  $J^{-1}$  の要素  $I_{ij}$  を用いると、

$$C = \begin{bmatrix} I_{11}^2 & I_{12}^2 & I_{11}I_{12} \\ I_{21}^2 & I_{22}^2 & I_{21}I_{22} \\ 2I_{11}I_{21} & 2I_{12}I_{22} & I_{11}I_{22} + I_{12}I_{21} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.4)$$

$$G = \begin{bmatrix} \partial J_{11}/\partial\xi & \partial J_{12}/\partial\xi \\ \partial J_{21}/\partial\eta & \partial J_{22}/\partial\eta \\ 2\partial J_{11}/\partial\eta & 2\partial J_{22}/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \dots\dots (A.5)$$

これらの行列は式 (14) を用いて容易に求められる。また、式 (14) を極座標 ( $r, \theta$ ) の関係式で表わすと、式 (A.3) より極座標表示の式<sup>16)</sup>が得られる。

参 考 文 献

- 1) Cheung, Y. K. : Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, 1976.
- 2) 前田幸雄・林 正・森 寛司：有限帯板法による薄板の有限変位解析, 土木学会論文報告集, No. 316, 1981.
- 3) 笹戸松二・林 正・有限帯板法による薄肉円筒シェルの後座屈解析, JSSC 第17回, マトリックス解析法研究



- 発表論文集, 1983.
- 4) Zienkiewicz, O. C. (吉識雅夫・山田嘉昭監訳): マトリックス有限要素法, 三訂版, 培風館, pp.173~204, 263~298, 1984.
  - 5) Gallagher, R. H. (川井忠彦監訳): 有限要素法の基礎, 丸善, pp.41~43, 1976.
  - 6) Bathe, K. J. : Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, pp.194~300, 1982.
  - 7) Benson, P. R. and Hinton, E. : A thick finite strip solution for static, free vibration and stability problems, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.10, 1976.
  - 8) Hinton, E. and Zienkiewicz, O. C. : A note on a simple thick finite strip, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.11, 1977.
  - 9) Onate, E. and Suarez, B. : A comparison of the linear, quadratic and cubic Mindlin strip elements for the analysis of thick and thin plates, Comput. Structures, Vol.17, 1983.
  - 10) Onate, E. and Suarez, B. : A unified approach for the analysis of bridges, plates and axisymmetric shells using the linear Mindlin strip elements, Comput. Structures, Vol.17, 1983.
  - 11) 笹戸松二・林 正・持田淳一: 薄肉構造解析のための節点帯板法, JSSC 第 17 回, マトリックス解析法研究発表論文集, 1983.
  - 12) 大坪英臣・北野公夫: 固有関数を用いた平板の曲げおよび座屈解析, JSSC 第 7 回, マトリックス構造解析法研究発表論文集, 1973.
  - 13) 林 正・坂田 敦・西谷雅弘: 有限帯板法におけるサブパラメトリック要素, JSSC 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol.11, 1987.
  - 14) Timoshenko, S. P. and Woinowski-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, pp.105~228, 1959.
  - 15) 芳村 仁: 曲線直交異方性扇形平板の曲げについて, 土木学会論文集, No. 82, 1962.
  - 16) 前掲 14), pp.282~283.

(1987. 9. 14・受付)