【土木学会論文集 第398号／I-10 1988年10月】

二次元静弾性問題境界要素解の境界近傍における挙動について

BEHAVIOR OF BOUNDARY ELEMENT SOLUTIONS IN THE NEIGHBORHOOD OF THE BOUNDARY IN TWO DIMENSIONAL ELASTOSTATIC PROBLEMS

阿部和久*
By Kazuhisa ABE

The author consider the accuracy of boundary element solutions in the neighborhood of a boundary in two dimensional elastic problems. A solution of boundary element method requires integrations on the boundary. It is known that a solution which is evaluated by numerical integration reduces the accuracy in the neighborhood of the boundary. This is by the reason that the integrand shows singurality on the boundary near the internal observation point. A method is presented for the estimation of the error on Gauss quatrature. By this method it is made sure that errors with displacements and stresses are to be expressed in simple forms. And it is possible to prognosticate the range in which the solution be incorrect. Application is made to evaluate stresses on the surface.

Keywords : *boundary element method, numerical integration, accuracy*

1. はじめに

境界要素法は，境界値問題を境界積分方程式に変換し，これを離散化し，数値的に解くという解法である．積分方程式法は古くから用いられている手法であるが，密度に物理的性質の明確な境界値を用いた，いわゆる直接法に基づき[1]，さらに境界形状や境界値を有限要素で離散化して解くという手法が採られるようになってからは，特に広く応用されるようになってきた．

この手法により近似解を求めることの利点としては，まず，離散化の対象となる部分が領域の境界のみであるため，未知量を求めるために必要となる代数方程式の元数が有限要素法などの，いわゆる領域型の解法に比べて少なくてすむこと，および，領域内で与えられる近似解は支配微分方程式を恒等的に満たすものであるため，比較的精度の良いものとなること，などが挙げられる．

一方，代数方程式の係数マトリックスは密であり，一般に非対称なものであるため，連立方程式の有効な解法がないこと，および，境界に沿う積分を精度良く求めることが困難であること，などが本解法の短所として挙げられる．

* 正会員 工修 新潟大学助手 工学部土木工学科
（〒950-21 新潟市五十嵐二の町8050番地）

上に述べた問題点のうち，境界積分の有効な評価に関するものは，境界積分方程式の離散化に伴うマトリックス係数の計算の際に生ずるものと，境界近傍に位置する領域内部の点での近似解を求める際に必要な境界積分の段階で生ずるものの2つに分けられる．いずれの場合においても，境界積分での被積分関数の有する特異性が境界積分の数値積分法による正しい評価を困難なものとしているのである．マトリックス係数の計算の段階において生ずる特異積分を数値積分法により精度良く処理するための研究としては，たとえばM.H. Lean, A. Wexler[2], J.C. Lachat, J.O. Watson[3], J.C.F. Telles[4], 福井[5]などが挙げられる．文献2）においては境界積分方程式をガラーキンの重み付き残差法により解く際に生ずる二重の境界積分を効率良く処理するための方法が提案されており，一方，文献3), 4), 5）においては境界積分方程式を選点法により解く場合に生じる特異積分の数値処理法が示されている．また，領域内での解を求める際に生ずる積分誤差の処理に関しては小松，長井，坂本[6]，榎園，戸高[7]らにより示された手法が挙げられる．文献6）では二次元静弾性問題を，また，文献7）では二次元ポテンシャル問題を対象に同様の手法が提案されている．さらに東町，江沢，岡本，相沢[8]らは二重指数関数形積分公式の適用によって被積分関数の

特異性を避けることで，積分の精度向上を図っている.

これらの研究において述べられているものは主に近似解の精度向上についてであるが，近似解の誤差の挙動についてはあまり述べられていない.

しかし，従来の方法により近似解を求める場合に境界積分を数値的に求める限り，境界近傍で生ずる誤差は不可避である．特に境界要素にアイソパラメトリック要素を用いる場合，境界上の積分を解析的に求めることは難しく，数値積分によるしかないであろう．したがって，あらかじめその性質を把握しておくことは重要なことと思われる.

そこで，本研究では境界近傍において生ずる誤差の挙動を調べ，これを定性的，かつ定量的に評価することを目的とし，数値積分法等による誤差が著しく増大し出す点の境界からの距離を見積り，領域内から境界への極限で生ずる誤差の値を予測することを試みた.

その結果，境界積分を特に Gauss の数値積分法により求める際に生ずる誤差は，主に領域内部の点から最も近くに位置する積分点で代表される積分区間に対して生じているものであることがわかった．また，このことより境界近傍における変位，応力などの誤差を比較的簡単な形で定式化することが可能であることが確認された.

2. 考察の対象および仮定

今回は二次元静弾性問題を考察の対象とし，特に物体力が作用しない場合について議論をする．その他特に設けた仮定を示すと以下のとおりである.

① 対象領域 Ω 内部の点（内点）は境界近傍に置かれているものとし，内点より最も近くに位置する要素境界を $\partial\Omega_1$，全境界 $\partial\Omega$ より $\partial\Omega_1$ を除いた他の境界部分を $\overline{\partial\Omega_1}$ とする.

② 考察の対象とする要素はゼロ次（一定）および一次（線形）要素の二種類とする.

③ 内点 x は $\partial\Omega_1$ の中央より境界線に対し垂直な直線上に位置するものとする.

④ 境界の形状は本来多角形であり，境界形状を近似することによる誤差は生じないものとする.

⑤ 境界積分の計算に用いる数値積分法は Gauss の偶数点積分法とする.

以上において述べた仮定の概略を **Fig. 1** に示す．**Fig. 1** において y は境界上の点，l は $\partial\Omega_1$ の境界要素長，ρ は境界 $\partial\Omega_1$ より内点 x までの距離，ξ_1^N は Gauss の 2 N 点積分の積分点のうち，最も内側に位置する点の局所座標値であり，座標方向 1, 2 とは $\partial\Omega_1$ 上において **Fig. 1** のように定義された接線および法線方向である．なお，仮定③のように内点をとることにより，境界隅角部で生ずる応力の乱れの影響は無視し得るものとする.

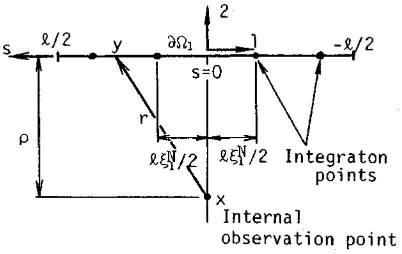

Fig. 1 Relations between boundary element $\partial\Omega_1$ and internal observation point x.

また，変位および表面力の境界値の近似関数をそれぞれ $\hat{v}_i$, $\hat{p}_i$ $(i=1,\ 2)$ とすると，特に $\partial\Omega_1$ 上において $\hat{v}_i$, $\hat{p}_i$ は次式のように与えられる.

$$\hat{v}_i=\hat{v}_i^1+\left.\frac{d\hat{v}_i}{ds}\right|_1\cdot s,\quad \hat{p}_i=\hat{p}_i^1+\left.\frac{d\hat{p}_i}{ds}\right|_1\cdot s \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで，s は境界要素 $\partial\Omega_1$ 上において定義された境界線方向の局所座標であり，$\hat{v}_i^1$, $\left.\frac{d\hat{v}_i}{ds}\right|_1$, $\hat{p}_i^1$, $\left.\frac{d\hat{p}_i}{ds}\right|_1$ は $\partial\Omega_1$ の中央（$s=0$）における各境界値，およびその境界線方向微分の値である.

3. 境界近傍での積分誤差の定式化

（1） 変位における誤差

著者はすでに文献9）において，変位における誤差の算定式を示したが，ここでは応力の誤差と合わせ，その導出過程を示すことにする.

表面力および変位の境界値，またはその近似関数をそれぞれ $\hat{p}_i$, $\hat{v}_i$ とすると，領域 Ω 内の点 x における変位 v_i は，Somigliana 恒等式により次のように与えられる.

$$v_i(x)=-\int_{\partial\Omega}p_{ij}^*\cdot\hat{v}_j d\Gamma+\int_{\partial\Omega}u_{ij}^*\cdot\hat{p}_j d\Gamma\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここで，u_{ij}^*, p_{ij}^* は二次元弾性問題に対する Kelvin 解である．なお，繰返し指標は総和規約に従うものとする.

境界上の各積分を $\partial\Omega_1$ での積分と $\overline{\partial\Omega_1}$ での積分との 2 つに分けて表現し，さらに，境界要素 $\partial\Omega_1$ 上において各境界値関数が前章で定義したように要素上に設けられた局所座標 s の下で線形関数に展開されるものとすると，式（2）は次のように展開されることとなる.

$$\begin{aligned}v_i(x)=&-\hat{v}_j^1\cdot\int_{\partial\Omega_1}p_{ij}^*d\Gamma-\left.\frac{d\hat{v}_j}{ds}\right|_1\cdot\int_{\partial\Omega_1}p_{ij}^*\cdot s d\Gamma\\&+\hat{p}_j^1\cdot\int_{\partial\Omega_1}u_{ij}^*d\Gamma+\left.\frac{d\hat{p}_j}{ds}\right|_1\cdot\int_{\partial\Omega_1}u_{ij}^*\cdot s d\Gamma\\&-\int_{\overline{\partial\Omega_1}}p_{ij}^*\cdot\hat{v}_j d\Gamma+\int_{\overline{\partial\Omega_1}}u_{ij}^*\cdot\hat{p}_j d\Gamma\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}$$

内点 x における変位の値を式（3）により求めるためには境界上での積分が必要である．この境界積分を数値積分法により求めたならば，内点での変位（または同様に応力）の値は誤差を非常に多く含んだものとなる．これは被積分関数が有する特異性によるものであり，解

決すべき重要な問題の1つである．そこで，特に Gauss の数値積分法により生ずる誤差の特徴について考察を与えることにする．なお，本研究で Gauss の数値積分法を考察の対象としたのは，この積分法が一般に広く用いられているものであるからである．

まず，数値積分により生ずる誤差が被積分関数の有する特異性によるものとするならば，それは式（3）のうち，境界要素 $\partial\Omega_1$ 上の積分項より生ずるものであろう．特に，積分核として p_{ij}^* を含む項は u_{ij}^* を含む項よりも強い特異性を示す．さらに，右辺第2項目は核関数に p_{ij}^* を含んではいるが，被積分関数はそれと境界線方向にとった局所座標 s との積であるから，基本解が特異性を示す点，$s=0$ において特異性は弱くなる．よって，数値積分による誤差は主に第1項から生ずるものとみなし，議論をすすめることにする．この妥当性については後の数値解析の結果で示す．すると，式（3）で境界積分を解析的に求めて得られた解 v_i と，数値的に求めたもの $\tilde{v}_i$ との差を $\Delta v_i=v_i-\tilde{v}_i$ とすれば，これは平面ひずみ問題に対して近似的に次式で与えられることになる．

$$\Delta v_1(x)=\frac{1}{4\pi(1-\nu)}[(3-2\nu)\rho\hat{I}_1-2\rho^3\hat{I}_2]\cdot\hat{v}_1^1 \cdots\cdots (4\cdot a)$$

$$\Delta v_2(x)=\frac{1}{4\pi(1-\nu)}[(1-2\nu)\rho\hat{I}_1+2\rho^3\hat{I}_2]\cdot\hat{v}_2^1 \cdots\cdots (4\cdot b)$$

ここで，ν はポアソン比であり，$\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$ とは以下に示す各積分を Gauss の $2N$ 点積分で評価したときの誤差である．

$$\hat{I}_i=I_i-\tilde{I}_i \quad (i=1,2),\quad I_1=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{ds}{r^2},\quad I_2=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{ds}{r^4},$$

$$\tilde{I}_1=l\cdot\sum_{k=1}^{N}w_k^N/r_k^2,\quad \tilde{I}_2=l\cdot\sum_{k=1}^{N}w_k^N/r_k^4 \cdots\cdots (5)$$

式（5）において l, s, r は前章の仮定で示した諸変数であり，$\tilde{I}_i$ とは I_i を Gauss の $2N$ 点積分で評価した値である．また，r_k, w_k^N とは第 k 番積分点での r と重み係数である．ところで式（4）よりわかるように，誤差の評価を行うには $\hat{I}_i$ の評価が必要である．しかし，$\tilde{I}_i$ を上式のように総和形式のまま用いたのでは各積分点の位置，および重み係数の値がすべて誤差に関与することとなり，$\hat{I}_i$ の特徴を定性的に捉えることが困難になる．そこで，本研究では $\hat{I}_i$ の中の主な項を取り出し，定性的かつ定量的な評価を試みた．

まず，境界要素 $\partial\Omega_1$ 上において定義されており，次に定義した積分 I が可能な，s について対称な関数を f とする．

$$I=\int_{-l/2}^{l/2}f(s)ds=l\cdot\int_0^1 g(\xi)d\xi \quad (g(\xi)\equiv f(l\xi/2))$$

ここで，局所座標 ξ に関し，最も内側に位置する積分点の座標値 ξ_1^N を用いて新しい変数 $\eta=\xi/\xi_1^N$ を導入し，積分区間を積分点 ξ_1^N が代表する区間と，それ以外の区間とに分けて表わせば，I は次式のようになる．

$$I=l\xi_1^N\cdot\left[\int_0^{\Delta\eta_1^N}g(\xi_1^N\eta)d\eta+\int_{\Delta\eta_1^N}^{1/\xi_1^N}g(\xi_1^N\eta)d\eta\right]$$

$$(\Delta\eta_1^N=w_1^N/\xi_1^N) \cdots\cdots (6)$$

一方，I に対する Gauss の数値積分 $\tilde{I}$ は次式で与えられる．

$$\tilde{I}=l\cdot\sum_{k=1}^{N}g(\xi_k^N)w_k^N=l\xi_1^N\cdot\sum_{k=1}^{N}g(\xi_1^N\eta_k^N)\Delta\eta_k^N$$

$$(\Delta\eta_k^N=w_k^N/\xi_1^N) \cdots\cdots (7)$$

$\tilde{I}$ の精度が著しく低下するのは，被積分関数 f が $s=0$ の近傍で急激に変化することが原因である．したがって，$\tilde{I}$ における誤差の主な項は式（6）の右辺第1項の積分と，式（7）の $k=1$ の項との差 $\hat{I}^*$ で与えられる．そこで $\hat{I}$ $(=I-\tilde{I})\fallingdotseq\hat{I}^*$ とすれば次式を得る．

$$\hat{I}\fallingdotseq\hat{I}^*=l\xi_1^N\cdot\left[\int_0^{\Delta\eta_1^N}g(\xi_1^N\eta)d\eta-g(\xi_1^N)\Delta\eta_1^N\right] \cdots\cdots (8)$$

以上における定式化を式（5）に対し適用すると $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$ は次式で近似されることとなる．

$$\hat{I}_1=\frac{4}{al\xi_1^N}\left(\tan^{-1}\frac{\Delta\eta_1^N}{a}-\frac{\Delta\eta_1^N\cdot a}{a^2+1}\right) \cdots\cdots (9\cdot a)$$

$$\hat{I}_2=\left(\frac{2}{al\xi_1^N}\right)^3\cdot\left[\tan^{-1}\frac{\Delta\eta_1^N}{a}+\frac{\Delta\eta_1^N\cdot a}{a^2+(\Delta\eta_1^N)^2}-\frac{2\Delta\eta_1^N\cdot a^3}{(a^2+1)^2}\right]$$

$$\cdots\cdots (9\cdot b)$$

ただし，ここで a とは境界から内点までの距離 ρ を無次元化したパラメーターであり，$a=2\rho/l\xi_1^N$ と定義されたものである．

さらに，積分点数 N が十分大とすれば，積分点 ξ_1^N はそれが代表する積分区間（重み係数）w_1^N のほぼ中央に位置するものとなる．したがって，そのような N に対しては $\Delta\eta_1^N=w_1^N/\xi_1^N\fallingdotseq 2$ と近似できる．実際には $N=2$（4点積分）で $\Delta\eta_1^N=1.918$, $N=3$（6点積分）で $\Delta\eta_1^N=1.961$ であるから $N\geqq3$ では $\Delta\eta_1^N$ を2としても差し支えないと思われる．そこで，式（9）において $\Delta\eta_1^N=2$ とし，式（4）へ代入すれば，Δv_i は次式のようになる．

$$\Delta v_1=\frac{1}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{2}{a}-\frac{a}{1-\nu}\cdot\left[\frac{1}{a^2+4}+\frac{(1-2\nu)a^2+(3-2\nu)}{(a^2+1)^2}\right]\right\}\cdot\hat{v}_1^1 \cdots\cdots (10\cdot a)$$

$$\Delta v_2=\frac{1}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{2}{a}+\frac{a}{1-\nu}\cdot\left[\frac{1}{a^2+4}-\frac{(3-2\nu)a^2+(1-2\nu)}{(a^2+1)^2}\right]\right\}\cdot\hat{v}_2^1 \cdots\cdots (10\cdot b)$$

また，内点 x を領域内側において境界へ近づけると，式（10）より，変位誤差 Δv_i の内側境界極限値 $\gamma(\Delta v_i)|_1$ は次式で与えられる．

$$\gamma(\Delta v_1)|_1=1/2\cdot\hat{v}_1^1 \cdots\cdots(11\cdot a)$$

$$\gamma(\Delta v_2)|_1=1/2\cdot\hat{v}_2^1 \cdots\cdots(11\cdot b)$$

今後，$\gamma(\ )$ は領域内部で定義された関数の内側境界極限値を表わし，境界極限値とは，内側境界極限値を意味するものとする．

（2） 応力における誤差

変位における誤差に対して行ったと同様の手順により，変位の微分値 $\partial v_i/\partial x_j$ に対する誤差を求めることができる．ただしこの場合，基本解 p_{ij}^*, u_{ij}^* が内点 x について微分を受けるので，被積分関数は変位の算出の場合におけるものよりもさらに強い特異性を有することとなる．

まず，式（3）を内点座標 x_k で微分することにより，変位の導関数は次式のように与えられる．

$$\begin{aligned} v_{i,k}=&-\int_{\partial\Omega_1} p_{ij,k}^*\cdot\left(\hat{v}_j^1+\left.\frac{d\hat{v}_j}{ds}\right|_1\cdot s\right)d\Gamma \\ &+\int_{\partial\Omega_1} u_{ij,k}^*\cdot\left(\hat{p}_j^1+\left.\frac{d\hat{p}_j}{ds}\right|_1\cdot s\right)d\Gamma \\ &-\int_{\overline{\partial\Omega_1}} p_{ij,k}^*\cdot\hat{v}_j d\Gamma+\int_{\overline{\partial\Omega_1}} u_{ij,k}^*\cdot\hat{p}_j d\Gamma \cdots\cdots(12) \end{aligned}$$

ただし，ここで $(,k)$ とは内点 x_k による偏微分を意味する．

$u_{ij,k}^*$ の中には p_{ij}^* と同等の特異性を有するものがある．したがって，式 (12) を数値積分により評価した場合，境界近傍の内点 x において，右辺第2項より生ずる誤差は一般に無視することができない．そこで，変位における誤差の評価に対しては $\partial\Omega_1$ 上の変位の境界値しか考慮に入れなかったが，ここでは，さらに表面力の境界値も考慮に入れた誤差の定式化を行うことにする．

すると，（1）の場合と同様にして得られた変位の導関数における誤差を $\Delta v_{i,j}=v_{i,j}-\tilde{v}_{i,j}$ とするとひずみテンソルにおける誤差は以下のようにして求められる．

$$\Delta\varepsilon_{ij}=(\Delta v_{i,j}+\Delta v_{j,i})/2 \cdots\cdots(13)$$

式 (12), (13) よりさらに応力の誤差を求めることができる．ここでは，平面ひずみ問題に対して考える．その際に，次のような簡略化を行うことにする．まず，内点 x から境界 $\partial\Omega_1$ までの距離 a に関して $a\to 0$ の極限でゼロとなる項は他の項に比べ境界近傍で誤差への影響が小さいものとして省略する．すると，$\left.\frac{d\hat{p}_i}{ds}\right|_1$ を含む項は落とされることになる．また，同様に $\Delta\sigma_{22}$ については $\left.\frac{d\hat{v}_i}{ds}\right|_1$ の項が，$\Delta\sigma_{12}$ においては $\left.\frac{d\hat{v}_2}{ds}\right|_1$ の項が落ちる．さらに，$\Delta\eta_1^N=2$ とすれば結局次式を得る．

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{11}=&-\alpha\cdot\left[\frac{a^2-4}{(a^2+4)^2}-\frac{a^4-6a^2+1}{(a^2+1)^3}\right]\cdot\hat{v}_2^1 \\ &+\frac{1}{\pi(1-\nu)}\left\{\nu\cdot\tan^{-1}\frac{2}{a}-a\cdot\left[\frac{1}{a^2+4}\right.\right. \\ &\left.\left.-\frac{(1-2\nu)a^2-(1+2\nu)}{(a^2+1)^2}\right]\right\}\cdot\hat{p}_2^1 \\ &+\frac{2G}{\pi(1-\nu)}\left\{\tan^{-1}\frac{2}{a}-2a\left[\frac{a^2+8}{(a^2+4)^2}\right.\right. \\ &\left.\left.-\frac{a^2-3}{(a^2+1)^3}\right]\right\}\cdot\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{22}=&\alpha\cdot\left[\frac{3a^2+4}{(a^2+4)^2}-\frac{3a^4-6a^2-1}{(a^2+1)^3}\right]\cdot\hat{v}_2^1 \\ &+\frac{1}{\pi(1-\nu)}\left\{(1-\nu)\tan^{-1}\frac{2}{a}+a\left[\frac{1}{a^2+4}\right.\right. \\ &\left.\left.-\frac{(3-2\nu)a^2+(1-2\nu)}{(a^2+1)^2}\right]\right\}\cdot\hat{p}_2^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{12}=&-\alpha\cdot\left[\frac{a^2-4}{(a^2+4)^2}-\frac{a^4-6a^2+1}{(a^2+1)^3}\right]\cdot\hat{v}_1^1 \\ &+\frac{1}{\pi(1-\nu)}\left\{(1-\nu)\tan^{-1}\frac{2}{a}+a\left[\frac{1}{a^2+4}\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{(1-2\nu)a^2+(3-2\nu)}{(a^2+1)^2}\right]\right\}\cdot\hat{p}_1^1 \end{aligned}$$

$$\alpha=\frac{4G}{\pi(1-\nu)l\xi_1^N}$$

$$\cdots\cdots(14\cdot a\sim c)$$

ここで，$\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1=-\left.\frac{d\hat{v}_1}{ds}\right|_1$ であり，また，G はせん断弾性係数である．

（3） ゼロ次要素における誤差

これまでは，変位，応力のおのおのの計算で生ずる積分誤差を一次要素の場合について議論してきた．ここではゼロ次（一定）要素を用いた場合に生ずる誤差について考察する．一次またはさらに高次の補間関数により境界値関数を表現する場合，その近似関数は各要素上において境界線方向の導関数を有する．したがって境界値の近似関数 $\hat{v}_i$, $\hat{p}_i$ の真の境界値に対する誤差は内点での精度への影響度に関してみると，数値積分により生ずる誤差の影響に比べ十分オーダーの小さなものとなるとみなすことができるであろう．よって，一次要素以上の高次要素においては，内点における真の解と，数値積分により得られる近似解との間の誤差は，積分を解析的に求めたものと，数値的に求めたものとの間の差と同程度であると思われる．しかし，ゼロ次要素を用いた場合，境界値の近似関数は境界線方向の導関数を有しない．一方，真の境界値関数は一般に境界線方向導関数をもつので，ゼロ次要素の場合，数値積分による誤差と同等に境界値の近似度による誤差の存在する可能性がある．そこで，まず内点での誤差に対し，最近接要素 $\partial\Omega_1$ 上での数値積分により生ずる誤差と，境界値関数の近似による誤差の2つを同時に考慮に入れ，その必要性を以下で検討する．

そのために，ゼロ次要素の各節点において近似値と真の値との差は内点での誤差にほとんど影響しないほど十分に小さいものとし，ゼロ次要素による近似関数としては真の境界値関数を一定補間したものを考え，真の境界

値を各要素上一次のオーダーまで展開したものとの違いを調べることにする．

すると，ゼロ次近似境界値関数 $\hat{v}_i$, $\hat{p}_i$ および真の境界値 γv_i, p_i は $\partial\Omega_1$ 上次式で与えられることとなる．

$$\hat{v}_i=\hat{v}_i^1 \quad (\mathrm{const}),\quad \hat{p}_i=\hat{p}_i^1 \quad (\mathrm{const}) \cdots\cdots\cdots(15\cdot\mathrm{a})$$

$$\gamma v_i=\hat{v}_i^1+\left.\frac{d\hat{v}_i}{ds}\right|_1\cdot s,\quad p_i=\hat{p}_i^1+\left.\frac{d\hat{p}_i}{ds}\right|_1\cdot s \cdots\cdots (15\cdot\mathrm{b})$$

(1), (2) で述べたことと同様に，誤差は内点からの最近接要素 $\partial\Omega_1$ 上での積分項より生ずるものとし，式 (15) の定義を用いれば，変位の誤差 Δv_i は次式のようになる．

$$\Delta v_1=\frac{1}{4\pi(1-\nu)}[(3-2\nu)\rho\hat{I}_1-2\rho^3\hat{I}_2]\cdot\hat{v}_1^1$$
$$+\frac{1}{4\pi(1-\nu)}[-(3-2\nu)\rho^2 I_1+2\rho^4 I_2$$
$$+(1-2\nu)]\cdot\left.\frac{d\hat{v}_2}{dy_1}\right|_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16\cdot\mathrm{a})$$

$$\Delta v_2=\frac{1}{4\pi(1-\nu)}[(1-2\nu)\rho\hat{I}_1+2\rho^3\hat{I}_2]\cdot\hat{v}_2^1$$
$$+\frac{1}{4\pi(1-\nu)}[-(1-2\nu)\rho^2 I_1+2\rho^4 I_2$$
$$-(1-2\nu)]\cdot\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16\cdot\mathrm{b})$$

ここで，$\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$, $\left.\frac{d\hat{v}_2}{dy_1}\right|_1$ は式 (14) と同様に，それぞれ $-\left.\frac{d\hat{v}_1}{ds}\right|_1$, $-\left.\frac{d\hat{v}_2}{ds}\right|_1$ である．

上式において，右辺第1項は一次要素に対して得られた誤差式 (4) と同一のものであり，第2項目はゼロ次要素の近似境界値において境界線方向に導関数が存在しないことにより生じたものである．しかし，境界近傍において第1項目が変位自体のオーダーであるのに対し，第2項目はひずみのオーダーである．よって後者の影響は，特に考慮に入れなかった他の要因と同様，変位の誤差に対して主要な項とはならない．したがって，変位の誤差に関しては，一次要素に対する式 (10) を用いることとする．

次に応力の誤差について考える．一次要素と同様の簡略化を行い，さらに表面力の境界線方向変化率が十分小さい場合について考えれば，$\left.\frac{d\hat{p}_i}{dy_1}\right|_1$ の項は省略できる．この結果，$\Delta\sigma_{22}$, $\Delta\sigma_{12}$ は一次要素に対する式 (14・b), (14・c) でそれぞれ与えられることとなる．一方，$\Delta\sigma_{11}$ に関しては $\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$ の項が残り，次式を得る．

$$\Delta\sigma_{11}=-\alpha\cdot\left[\frac{\alpha^2-4}{(\alpha^2+4)^2}-\frac{\alpha^4-6\alpha^2+1}{(\alpha^2+1)^3}\right]\cdot\hat{v}_2^1$$
$$+\frac{1}{\pi(1-\nu)}\left\{\nu\cdot\tan^{-1}\frac{2}{\alpha}-\alpha\left[\frac{1}{\alpha^2+4}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{(1-2\nu)\alpha^2-(1+2\nu)}{(\alpha^2+1)^2}\right]\right\}\cdot\hat{p}_2^1$$
$$+\frac{2G}{\pi(1-\nu)}\left[\tan^{-1}\frac{1}{\beta}-\frac{\beta(\beta^2+2)}{(\beta^2+1)^2}\right]\cdot\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

ここで，β とは $2\rho/l$ で与えられる無次元パラメーターである．次章 (2) で述べるが，式 (17) の第3項目の影響は本質的なものである．式 (17) で $\rho\to 0$ とすると，第2, 3項目は応力 σ_{11} と同等の大きさとなり，式 (14・a) で $\alpha\to 0$ としたものと一致することがわかる．しかし，式 (14・a) の第3項目は境界積分の誤差によるもので，積分点数 N に関するパラメーター α で表わされるのに対し，式 (17) の第3項目はゼロ次要素の境界値関数が境界線方向導関数まで近似できないことによるもので積分点数に依存しないパラメーター β の関数である．

4. 誤差評価式の妥当性の検討および考察

ここでは前章で導いた内点における変位，応力の各誤差近似式の妥当性を実際の計算例を通して検討し，さらに境界近傍における誤差の挙動に関していくらかの考察を与える．

まず，検討の対象とした解析例を以下に示す．

[解析例1]：一方向一様引張を受ける正方形板の平面応力解析

Fig. 2 に示すような一方向一様引張力 $p=100$ (kgf/cm²) (981 kPa) を受ける正方形板を平面応力問題として解析した．計算にあたり，平板の弾性係数を $E=2.0\times10^6$ (kgf/cm²) (196 GPa)，ポアソン比 $\nu=0.3$ とした．なお，平面応力問題の場合は，前章で与えた諸式においてポアソン比 ν を $\nu/(1+\nu)$ で置き換えればよい．

境界の分割方法は Fig. 2 に示されているように，ゼロ次，および一次要素とも，各辺5要素等分割（一要素長 20 cm）とした．また，内点での変位，応力を計算する際に必要となる境界積分には，各要素に対し Gauss の数値積分法を適用し，4点 ($N=2$)，8点 ($N=4$)，12点 ($N=6$) の3種類の積分点数を採用した．

[解析例2]：面内曲げを受ける正方形板の平面応力解析

Fig. 3 に示すように，上部境界上に線形変化する垂直力を受ける平板を平面応力問題として解析した．形状，寸法，材料定数，要素分割法，数値積分法は [解析例1] と同じである．ただし，[解析例2] では一次要素のみを用いて計算を行った．

両解析例において内点位置は最近接要素中央より 5, 2, 1, 0.1, 0.01 (cm) なる距離に置き，この一連の内点を境界上の3つの点 (50, 0), (100, 50), (50, 100) へ接近するように取り，それぞれの場合をケースⅠ, Ⅱ, Ⅲとよんで区別することにする．

(1) 変位における誤差

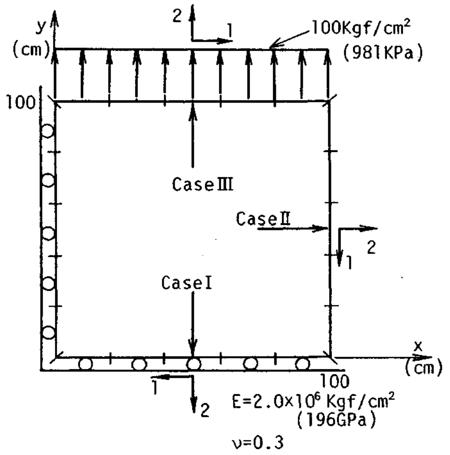

Fig. 2 Boundary conditions and discretization of Example-1.

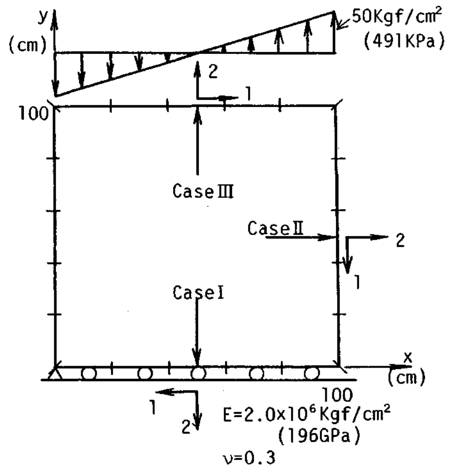

Fig. 3 Boundary conditions and discretization of Example-2.

［解析例1］に対する計算結果より得られた変位の誤差を変位の誤差近似式（10）とともに Fig. 4, 5 に示す．Fig. 4 はゼロ次要素における境界線方向変位誤差 Δv_1 をケースⅠ：$N=2$（4点積分），ケースⅡ：$N=4$（8点積分），ケースⅢ：$N=6$（12点積分）の各場合について図示したものである．同様に Fig. 5 では一次要素に対する境界法線方向変位誤差 Δv_2 をケースⅡ：$N=2$，ケースⅢ：$N=6$ の各場合について示した．

なお，計算値における誤差は，境界積分を解析的に求めたものと，数値積分により求めたものとの差より得られたものである．

Fig. 4, 5 より，変位の誤差は要素次数によらず，式(10)で十分表現できることがわかる．また，境界線方向変位の誤差 Δv_1 は境界極限への移行の過程において，$a=1$ ($\rho=l\xi_1^N/2$) の近くで一度極値を示し，その後境界への移行に伴い境界値の 1/2 へ近づくという特徴を有していることがわかる．

ところで，式（10）を用いた場合，誤差の挙動を支配する変数は境界から内点までの距離に関する無次元パラメーター a ($=2\rho/l\xi_1^N$) のみである．したがって，変位の誤差の挙動は積分点数にほとんど依存せず，a なるパラメーターで規格化できることになるわけであるが，このことはここに示した各図において，変位の誤差が N に関係なく式（10）による近似とよく一致していることから確認できる．また，前章において積分点数 $N \geqq 3$ に対しては $\Delta\eta_1^N \doteqdot 2$ となるので式（10）が適用できるとしたわけであるが，ここに示した図より，$N=2$ に対しても式（10）は十分適用できることがわかる．

以上のことから変位の誤差が著しく増大し出す内点の位置はパラメーター a のある特定値 a_0 によって与えられることになる．この a_0 の値は図より判断して約2と

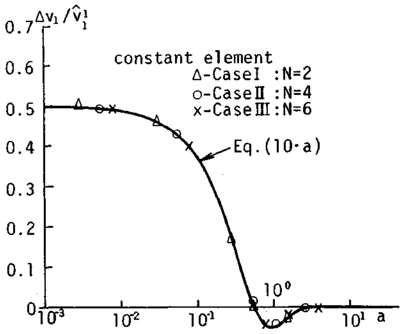

Fig. 4 Error with tangential displacement Δv_1 (Example-1).

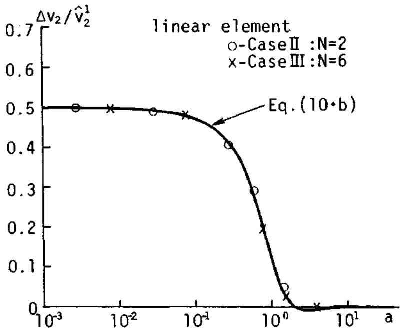

Fig. 5 Error with normal displacement Δv_2 (Example-1).

なる．すなわち変位の誤差は最近接要素上の中央からそれに最も近い左右の積分点間の距離 $l\xi_1^N$ と同程度境界より離れた位置から増大するということが結論づけられる．

（2） 応力における誤差

［解析例1］の計算結果で得られた応力の誤差を一次要素に対しては式（14）また，ゼロ次要素に対しては式

(14・b, c), (17) より得られる応力の誤差近似とともに Fig. 6～8 に示す．ここで Fig. 6 にはケースⅠの内点に対し一次要素 4 点積分 ($N=2$) を用いた場合の各応力の誤差を，Fig. 7 にはケースⅡに対しゼロ次要素 8 点積分 ($N=4$) を用いた場合の応力の誤差を，また Fig. 8 にはケースⅢに対し一次要素 12 点積分 ($N=6$) を用いた場合の各応力の誤差を示した．

なお，ここに示した計算結果の誤差は理論値との差を求めたものであり，式 (14), (17) で必要となる変位の境界線方向微分値 $\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$ は 6. で述べる方法により求めたものである．

これらの図において，実際に生じた誤差とそれに対する近似とが比較的よく一致していることより式 (14), (17) によって，一次要素，およびゼロ次要素の要素近傍での応力の誤差を表現することは妥当であるといえる．

また，近似式 (14) で与えられる応力の誤差には無次元パラメーター a のほかに，変位の境界値 $\hat{v}_i^1$ の項の分母に $l\xi_1^N$ が含まれている．したがって，変位の誤差の場合のように a だけで挙動を記述することはできない．しかし，Fig. 6, 8 から判断して応力の誤差が著しく増大し出す内点の位置は $a=2～3$ 程度であり，これによりその位置を予測することが可能である．変位において誤差の増大し出す点の位置が $a=2$ であったことと合わせると，領域内部の近似関数が数値積分により十分精度よく与えられるのは $a=2～3$，すなわち境界までの距離が $l\xi_1^N$ の 1～1.5 倍以上離れた領域であるということが結論づけられる．以上のことは式 (14) で誤差が近似され得る場合である．ゼロ次要素を用いたときには，境界線方向垂直応力の誤差 $\Delta\sigma_{11}$ は式 (17) により与えられていた．この式においては $\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$ を係数とする項が a ではなく $\beta=a\xi_1^N$ により表現されることとなる．ところで，$\rho=a\xi_1^N l/2=\beta l/2$ であるから，この項の挙動は積分点数によらない．それは，この項が本来数値積分による誤差によって生じたものではないからであった．このことより，$\Delta\sigma_{11}$ だけが比較的大きな a の値から増加し出す可能性のあることがわかる．

次に内点を境界要素中央へ極限移行させた際の応力の誤差 $\gamma(\Delta\sigma_{ij})|_1$ について多少の考察を与える．まず，式 (14) において内点を境界へ近づけ，その極限 ($a\rightarrow 0$) をとると次式を得る．

$$\gamma(\Delta\sigma_{11})|_1=\frac{5G}{\pi(1-\nu)l\xi_1^N}\cdot\hat{v}_2^1+\frac{\nu}{2(1-\nu)}\hat{p}_2^1+\frac{G}{1-\nu}\cdot\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$$

$$\gamma(\Delta\sigma_{22})|_1=\frac{5G}{\pi(1-\nu)l\xi_1^N}\cdot\hat{v}_2^1+\frac{1}{2}\hat{p}_2^1$$

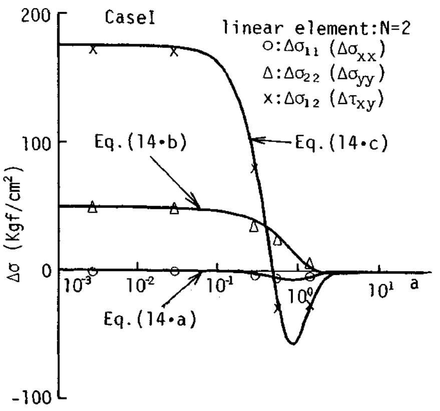

Fig. 6　Errors with stresses $\Delta\sigma_{ij}$ in case Ⅰ of Example-1.

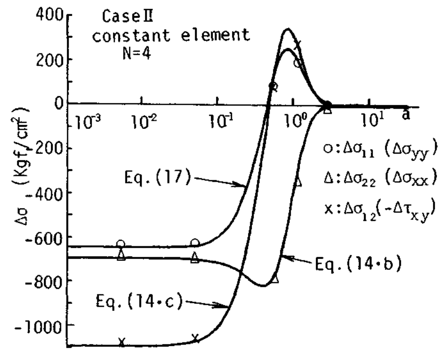

Fig. 7　Errors with stresses $\Delta\sigma_{ij}$ in case Ⅱ of Example-1.

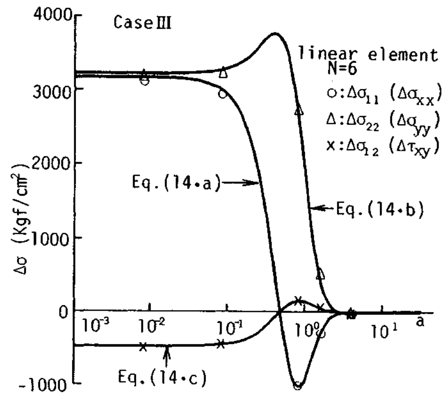

Fig. 8　Errors with stresses $\Delta\sigma_{ij}$ in case Ⅲ of Example-1.

$$\gamma(\Delta\sigma_{12})|_1=\frac{5G}{\pi(1-\nu)l\xi_1^N}\cdot\hat{v}_1^1+\frac{1}{2}\hat{p}_1^1 \quad \cdots\cdots(18\cdot a～c)$$

ゼロ次の場合は，$\Delta\sigma_{22}$, $\Delta\sigma_{12}$ に対して式 (14・b, c) が適用できたので上式で極限値を表わすことができるが，$\Delta\sigma_{11}$ に対しては式 (17) に対して極限をとらねばならない．しかし，式 (17) において a, $\beta\rightarrow 0$ とする

と結局上式 (18･a) と同一式を得ることがわかる．したがって，応力の誤差の境界極限での値は，ゼロ次，一次の別なく式 (18) を用いて求めることができる．ただし，上式において，一次要素の $\gamma(\Delta\sigma_{11})|_1$ に $G/(1-\nu)\cdot\left.\dfrac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$ の項が生じたのは被積分関数の特異性による数値積分誤差が原因であり，ゼロ次要素に同一の項が生じたのは，変位の境界値近似関数が要素上一定で，境界線方向導関数を有しないことが原因であった．なお，ゼロ次要素を使用した場合に，上述の理由で境界近傍，および極限で近似解の導関数の精度が低下することは小林，西村[10]によって示されている．

式 (18･a) において $\left.\dfrac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$ を境界線方向ひずみ $\hat{\varepsilon}^1_{11}$ と表わし，さらに $\hat{p}^1_2=\hat{\sigma}^1_{22}$ と書き改めると平面ひずみの場合，第 2, 3 項目は次のようになる．

$$\frac{\nu}{2(1-\nu)}\cdot\hat{\sigma}^1_{22}+\frac{G}{1-\nu}\cdot\hat{\varepsilon}^1_{11}=\frac{1}{2}\,\hat{\sigma}^1_{11}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

ここで $\hat{\sigma}^1_{11}$ は要素 $\partial\Omega_1$ 中央点での境界線方向垂直応力である．

式 (19) を式 (18･a) に用い，$\hat{p}^1_2=\hat{\sigma}^1_{22}$, $\hat{p}^1_1=\hat{\sigma}^1_{12}$ とすれば次式を得る．

$$\gamma(\Delta\sigma_{11})|_1=\frac{1}{2}\,\hat{\sigma}^1_{11}+\frac{5\,G}{\pi(1-\nu)l\xi^N_1}\cdot\hat{v}^1_2\cdots\cdots\cdots(20\cdot\mathrm{a})$$

$$\gamma(\Delta\sigma_{22})|_1=\frac{1}{2}\,\hat{\sigma}^1_{22}+\frac{5\,G}{\pi(1-\nu)l\xi^N_1}\cdot\hat{v}^1_2\cdots\cdots\cdots(20\cdot\mathrm{b})$$

$$\gamma(\Delta\sigma_{12})|_1=\frac{1}{2}\,\hat{\sigma}^1_{12}+\frac{5\,G}{\pi(1-\nu)l\xi^N_1}\cdot\hat{v}^1_1\cdots\cdots\cdots(20\cdot\mathrm{c})$$

式 (20) より，境界上で変位が拘束されていないようなところでは，たとえ自由境界で，かつ応力がゼロであったとしても，応力の境界極限値は誤差を含むこととなる．特に変位量の大きな境界近傍では応力の精度が大きく低下することが結論づけられる．また，式 (20) から，$l\xi^N_1$ なる値が小さいほど一般に応力の誤差は増大することがいえる．

以上に述べたことを［解析例 1］の計算結果と合わせて検討してみる．

まず，ケースⅠにおいては法線方向変位 $\hat{v}^1_2$ すなわち $\hat{v}^1_y$ は拘束されているのでゼロである．したがって，垂直応力 $\sigma_{11}(\sigma_x)$, $\sigma_{22}(\sigma_y)$ は正しい値の 1/2 へ近づくことになる．ケースⅠでは $\hat{\sigma}^1_{11}=0$, $\hat{\sigma}^1_{22}=100(\mathrm{kgf/cm^2})(981\ \mathrm{kPa})$ であるから $\gamma(\Delta\sigma_{11})|_1=0$, $\gamma(\Delta\sigma_{22})|_1=50\ (\mathrm{kgf/cm^2})$ (491 kPa) となる．このことは **Fig. 6** より確認することができる．一方，せん断応力 $\sigma_{12}=\sigma_{xy}$ の場合，誤差はかなり増大するはずである．なぜならば境界線方向変位 $\hat{v}^1_1=-\hat{v}^1_x$ が存在するからである．この傾向も **Fig. 6** より確かめることができる．

次にケースⅢを考えてみる．ここでは応力はケースⅠと同じであるが，変位 $\hat{v}^1_2$ はゼロではない．したがって，

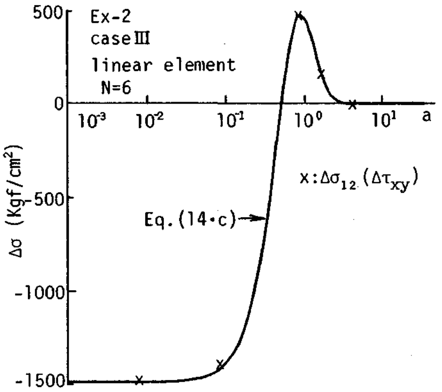

Fig. 9 Error with shear stress $\Delta\sigma_{12}$ in case Ⅲ of Example-2.

垂直応力の誤差 $\Delta\sigma_{11}$, $\Delta\sigma_{22}$ はケースⅠに比べかなり増大することになる．このことは **Fig. 6** と 8 を比較すれば確認できる．また，せん断力については変位 $\hat{v}^1_1$ も応力 $\hat{\sigma}^1_{12}$ (=0) も大きさはケースⅠの場合と同じである（ただし $\hat{v}^1_1$ の符号は逆）．しかし，**Fig. 8** では 12 点 ($N=6$) 積分を用いたので，**Fig. 6** の 4 点 ($N=2$) 積分の結果に比較すると誤差はかなり増大することとなる．これもやはり各図より確かめることができる．

次に［解析例 2］に関して得られた結果について示す．

ここでは特にケースⅢについて考えることにする．［解析例 2］のケースⅢにおいては境界上の法線方向変位，および法線方向表面力に境界線方向の微分値が存在している．しかし，前章において行ったような簡略化により変位，表面力の法線方向成分の境界上の微分値を含む項が無視され，その結果式 (14･c) を得たのであった．

一方，**Fig. 9** に示すように，実際の計算結果と式 (14･c) より得られる誤差の近似とがよく一致していることがわかる．このことから，この簡略化が妥当であることが確かめられる．

以上のことより，［解析例 1, 2］を通して式 (14), (17) による応力の誤差近似が妥当であると結論づけることができる．

5. 境界における応力の算出

応力の算出において，境界積分を数値積分法により求めた場合，前章において述べたように境界近傍ではその精度が著しく低下することとなる．しかし，物体力などが作用しない場合，物体中において応力が絶対最大となるのは表面上であり，また応力の変化の急激なところもやはり表面付近であるから，境界表面での応力状態を知ることは重要である．境界要素法においては境界値の近似解を求めることができるので，そのうちの表面力 $\hat{p}^1_i$ ($i=1, 2$) を用いれば $\hat{\sigma}^1_{12}$ と $\hat{\sigma}^1_{22}$ については比較的精度の良い値を得ることができる．しかし，境界線方向直応力

$\hat{\sigma}^1_{11}$ は何らかの方法により別途求める必要がある．

$\hat{\sigma}^1_{11}$ の値として，境界にきわめて近い内点での応力を用いたとすると，その際必要となる境界積分が数値的に求められたものであるならば，前に述べた理由により応力の計算値はかなりの誤差を含むこととなるので信頼のできる値であるとはいえない．

そこで，$\hat{\sigma}^1_{11}$ を求める方法として以下のようなものが提案されている[11]．

まず境界線方向変位 $\hat{v}_1$ を微分することにより境界線方向ひずみ $\hat{\varepsilon}^1_{11}$ を求める．次に応力 $\hat{\sigma}^1_{11}$ と $\hat{\varepsilon}^1_{11}$, $\hat{\sigma}^1_{22}$ の間の以下の関係より $\hat{\sigma}^1_{11}$ を求める．

$$\hat{\sigma}^1_{11}=\frac{1}{1-\nu}\left(2G\hat{\varepsilon}^1_{11}+\nu\hat{\sigma}^1_{22}\right)\cdots\cdots(21)$$

ただし，ここで $\hat{\sigma}^1_{22}$ には $\hat{p}^1_2$ を用いるものとする．

この手法においては $\hat{\varepsilon}^1_{11}$ を求めるために変位境界値近似関数 $\hat{v}_1$ の境界線方向微分値を求める必要がある．一次以上の高次要素を用いたならば近似関数はこの微分値を有するのであるが，ゼロ次要素においては $\hat{v}_1$ が要素上一定であり直接この微分値を求めることができないので隣接要素上の変位を用いて差分をとる必要がある．

ここでは，ゼロ次要素を用いた場合においても，高次要素と同様に一要素上での値だけから $\hat{\sigma}^1_{11}$ が求められる方法を前章で得られた結果を用いて示すことにする．

まず，式 (20) を形式的に示すと次のようである．

$$\gamma(\Delta\sigma_{11})|_1=1/2\cdot\hat{\sigma}^1_{11}+C\cdot\hat{v}^1_2\cdots\cdots(22\cdot\mathrm{a})$$

$$\gamma(\Delta\sigma_{22})|_1=1/2\cdot\hat{\sigma}^1_{22}+C\cdot\hat{v}^1_2\cdots\cdots(22\cdot\mathrm{b})$$

ここで，C とは積分点数，要素長により異なる定数であり近似的には式 (20) の右辺第2項における係数で与えられるものである．

式 (22) において，境界上における応力の値 $\hat{\sigma}^1_{ij}$ とそれに対する数値積分による計算値 $\gamma\tilde{\sigma}_{ij}|_1$ とを用いて $\gamma(\Delta\sigma_{ij})|_1=\hat{\sigma}^1_{ij}-\gamma\tilde{\sigma}_{ij}|_1$ と表わせば，次式を得る．

$$\hat{\sigma}^1_{11}=2\cdot\gamma\tilde{\sigma}_{11}|_1+2\cdot C\cdot\hat{v}^1_2\cdots\cdots(23\cdot\mathrm{a})$$

$$\hat{\sigma}^1_{22}=2\cdot\gamma\tilde{\sigma}_{22}|_1+2\cdot C\cdot\hat{v}^1_2\cdots\cdots(23\cdot\mathrm{b})$$

$\gamma\tilde{\sigma}_{ij}|_1$ は境界極限へ内点を移行したときの応力の計算値であるが，実際には境界に非常に近い内点における応力の計算値を用いることにする．式 (23) からでも $\hat{\sigma}^1_{11}$ を求めることはできるが，前章の式 (20) で示した近似値では応力の誤差 $\gamma(\Delta\sigma_{ij})|_1$ を見積るには十分な精度となるものの式 (23) に対して用いるには精度上問題がある．

そこで，式 (23) の a 式より b 式を引くことにより C の項を消去し，次の関係式を導くことにする．

$$\hat{\sigma}^1_{11}=\hat{p}^1_2+2(\gamma\tilde{\sigma}_{11}|_1-\gamma\tilde{\sigma}_{22}|_1)\cdots\cdots(24)$$

ここで，$\hat{\sigma}^1_{22}=\hat{p}^1_2$ とした．

式 (24) を用いて $\hat{\sigma}^1_{11}$ を求めれば，積分次数によらず，あらゆる次数の要素に対して比較的精度の良い値を得ることができる．

6. 実際の問題への適用について

式 (14), (17) により，境界積分に Gauss の数値積分を用いた場合に生じる応力の誤差 $\Delta\sigma_{ij}$ の近似式を示した．しかし，実際にこれらの式を用いて境界近傍における応力の誤差を予測するためには，あらかじめ境界上において $\hat{v}^1_i$, $\hat{p}^1_i$, $\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$ 等の値を求めておく必要がある．$\hat{v}^1_i$, $\hat{p}^1_i$ については内点での各値を計算する段階においては既知であるので問題ないが，$\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$ については何らかの方法で別途求める必要がある．そこで，前章で得られた結果を用い，ゼロ次要素に対しても適用できる算定方法を提案することにする．

式 (24) より，$\partial\Omega_1$ の中央点での境界線方向垂直応力 $\hat{\sigma}^1_{11}$ は

$$\hat{\sigma}^1_{11}=\hat{p}^1_2+2(\gamma\tilde{\sigma}_{11}|_1-\gamma\tilde{\sigma}_{22}|_1)$$

で与えられる．

一方，式 (21) より

$$\hat{\sigma}^1_{11}=\frac{1}{1-\nu}(2G\hat{\varepsilon}^1_{11}+\nu\hat{p}^1_2)$$

であるから，この2式を等しく置くことにより次式を得る．

$$\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1=\frac{1}{2G}[(1-2\nu)\hat{p}^1_2+2\cdot(1-\nu)\cdot(\gamma\tilde{\sigma}_{11}|_1-\gamma\tilde{\sigma}_{22}|_1)]\cdots\cdots(25)$$

ここで $\hat{\varepsilon}^1_{11}=\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$ とした．

式 (25) を用いれば $\left.\frac{d\hat{v}_1}{dy_1}\right|_1$ を求めることができるので式 (14), (17) によって一般問題に対する境界近傍での応力の誤差を評価することが可能となる．

7. 結　　論

本研究では境界要素法で領域内部の変位，応力状態等を求める際に必要となる境界上での積分を Gauss の数値積分で計算したときに生ずる誤差の挙動について考察を与えた．内点が要素の近傍に位置する場合，Gauss の数値積分によって生ずる主な誤差は，その要素の積分点のうち最も内点の近くに位置する点が代表する積分区間でのものであるとみなすことで比較的精度よく誤差の挙動を表わすことができた．その結果，変位において誤差が増大し出す内点の位置は要素より $l\xi^N_1$ 程度の距離であり，誤差の挙動は無次元パラメーター a $(=2\rho/l\xi^N_1)$ により規格化できることがわかった．

一方，応力の誤差については誤差の近似式からは明らかでないが，境界から $l\xi^N_1$ の 1～1.5 倍程度の距離から誤差が増大し出すことが実際の計算により認められた．また，応力の精度は内点近くの境界における変位が大きいところほど乱れ，要素長 l が小さいほど，また，積分

点数 N が大なるほど誤差の増大することがわかった．なお，実際の計算結果から，今回示した誤差評価式が十分妥当なものであることも確かめられた．最後に内点の境界極限への移行により求められる応力の誤差式から，物体表面での応力状態を求める方法を提案した．

なお,今回は二次元弾性問題を対象として議論したが,ここで述べたことは二次元ポテンシャル問題等他の問題に対しても適用できるものである[12]．

参考文献

1) Rizzo, F. J. : An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quart. Appl. Math., Vol. 25(1), pp. 83～95, 1967.
2) Lean, M. H. and Wexler, A. : Accurate numerical integration of singular boundary element kernels over boundaries with curvature, Int. J. numer methods eng., Vol. 21, pp. 211～228, 1985.
3) Lachat, J. C. and Watson, J. O. : Effective numerical treatment of boundary integral equations : A formulation for three-dimensional elastostatics, Int. J. numer methods eng., Vol. 10, pp. 991～1005, 1976.
4) Telles, J. C. F. : A Self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals, Int. J. numer methods eng., Vol. 24, pp. 959～973, 1987.
5) 福井卓雄：2次元問題における境界積分の数値評価について，境界要素法論文集，第4巻，1987年12月.
6) 小松定夫・長井正嗣・坂本保彦：境界要素法による薄肉構造解析に関する研究，土木学会論文報告集，第333号，1983年5月.
7) 榎園正人・戸高　孝：補正積分を使用した境界要素解析，電気学会論文誌A，106，1986年4月.
8) 東町高雄・江沢良孝・岡本紀明・相沢民王：境界要素法による構造解析の高精度化と実用化，日本機械学会論文集A，51-468，1985年8月.
9) 阿部和久：二次元静弾性問題境界要素解の境界近傍における誤差について，土木学会第42回講演概要集1，1987年.
10) 小林昭一・西村直志：積分方程式法の解析精度の向上に関する考察，土木学会論文報告集，第291号，1979年11月.
11) Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A. : On the application of the boundary element method to plasticity, Appl. Math. Modelling, Vol. 13(12), pp. 466～470, 1979.
12) 阿部和久・早川　正：境界近傍における境界要素解の挙動に関する一考察，第14回関東支部講演概要集，1987年.

(1987.9.9・受付)