委員会報告

Committee Report

【土木学会論文集　第398号／I-10　1988年10月】

委員会報告

構造力学の離散化手法に関する調査報告

RECENT ADVANCES IN DISCRETE MODELLING ON STRUCTURAL MECHANICS

構造工学委員会 構造力学小委員会 離散化解析分科会

By Discrete Modelling Working Group of Subcommittee on Structural Mechanics, Committee on Structural Engineering

当分科会は，土木学会構造工学委員会構造力学小委員会のなかの4つの分科会の1つである．主に構造力学の解析に用いられる離散化手法に関し，特定テーマの設定はせずに，広い範囲での情報交換の場として，全国の若手研究者を中心に昭和61年度から調査研究などの活動を続けてきた．

現在の構造解析は，電子計算機を用いて行われるのがほぼ常識となっている．すなわち，連続体の力学的挙動を追跡するために，何らかの方法でその対象を対応する離散系にモデル化したうえで，解析を行っているのが普通である．そこで，この報告では，昨今の離散化解析手法およびその応用における新しい試みや現状について調査した結果を，その適用範囲を明確にしながら，できるだけわかりやすく紹介するものである．

1.　有限要素法に関する最近の話題

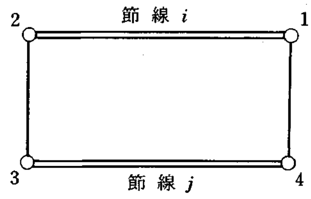
まず，離散化手法の代名詞ともいえる有限要素法（FEM）に直接関連した話題をいくつか列挙する．

（1）　節点帯板法

FEMでは，隣接する要素は節「点」で結合されるのに対して，有限帯板法[1]（FSM）では長さ方向の要素境界線である節「線」で要素が結合されるので，長大要素を用いることができる．このために，FEMに比べて入力データや未知量の次元数が少なく，また，節線上で変位が完全に適合するので解析精度がよいことが長所である．したがって，FSMはI形・箱形断面などの橋梁構造物や，円筒シェル・トンネルなどのように，土木構造物に多くみられる長大構造物の解析に適した解法として用いられてきたが，任意形状の構造物に適用することができないという短所があった．

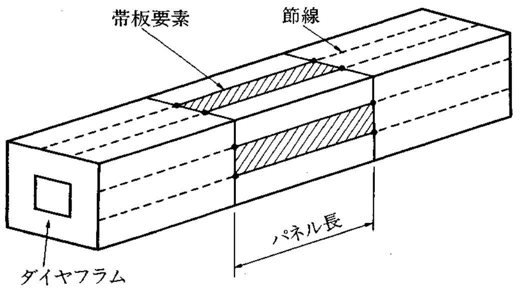
このように，FSMは長さ方向に要素分割を必要としないことが長所である反面，長さ方向に分割することができないことにより，連続構造物や格子桁のように中間支点がある場合や他の部材が結合する場合には解析がきわめて困難になる．また，要素長が極端に長い場合や集中荷重が作用する場合には，級数表示された変位の収束性が悪い．

そこで，この2つの方法，FEMとFSMの長所を活かして短所を改良するために，帯板要素を長さ方向に分割し，これを結合するために，要素の隅角点に節点を設けた節点帯板（と名付けられた）要素が考えられた（図—1）．この解析では，長大構造物を適当な長さ（たとえば，ダイヤフラム間．図—2参照）に分割し，このパネル間では幅方向（断面内）のみに要素分割を行う．これに縦・横補剛材，ダイヤフラムや対傾構などは，オフセットビームまたは節点帯板要素，FEMの平面要素，および棒要素を用いて容易に組み込むことができるので，これらの2次部材を考慮した実構造物に忠実な解析モデルを用いた長大薄肉構造物の全体解析も可能となる．箱形断面の連続桁や格子桁に適用された結果からは，従来の



図—1　節点帯板要素

Keywords: *finite element method, finite strip method, boundary element method, collocation method, discrete modelling*



図—2　箱桁の要素分割

棒要素では求めることができない局所的な応力変化がかなり正確に求められることが判明し，また，補剛円筒シェルの解析からも良好な結果が得られている[2),3)].

本解析法は，FEM に比べて計算時間と記憶容量は1/3～1/2程度であるうえに，要素上の任意点の応力を求めることができ，かつ，その精度がよいのが特徴である．近年，Mindlin 帯板要素[4)]や任意形状の帯板要素の研究が進められており，帯板法の発展が期待される．

（林　正）

（2） ブロック有限要素法[5),6)]

本手法は，箱桁橋のフランジに発生するせん断遅れ現象および横断面方向補剛材の間隔・剛度決定に密接に関連する横断面変形挙動を解明するために開発された立体解析手法である．

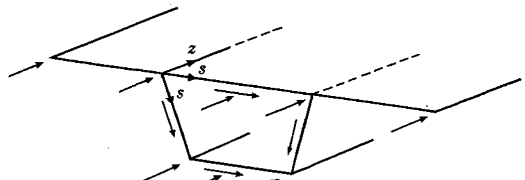
図—3 に箱断面と自由度を示す．つまり，部材を構成している平板の板曲げ作用やポアソン比は無視し，この一断面が，伸び，2方向曲げ，そり，2方向たわみ，回転（ねじり），および断面変形の自由度とせん断遅れに関する自由度をもっているとして，**図—4** のように切り出した要素をブロック要素とよび，このブロックを通常の有限要素と同様に取り扱う手法である．

この箱断面に対して，選んだ自由度 $\{D(z)\}$ を用いて，以下のように変位場を仮定する．

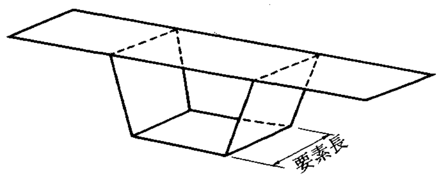
$$\{d(s,\ z)\}=[\phi(s)]\{D(z)\}$$

この $[\phi(s)]$ が断面内の変位関数に相当し，せん断遅れ，断面の変形モード等を記述する関数となる．仮想変位として，$[\phi(s)]$ を選び，平板の面内力のつり合い方程式を用いて仮想変位の原理を適用すれば，$\{D(z)\}$ に関する常微分方程式（一次元場の問題）を得る．

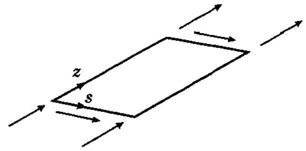
次に常微分方程式の解法としては，ガラーキン法を採用する．FSM 的に三角級数を一般化座標として選定することも考えられるが，横補剛材の設置，境界条件の取扱い，板厚変化の処理，並列・多室桁への拡張に対する容易さなどの FEM のもつ高い汎用性を利用することにする．つまり，本手法では，一般化変位として，**図—4** のように z 方向に分割した要素の節点変位，つまり $\{D(z)\}$ の両断面での値を選び，一般化座標としては多項式を採用する．



図—3　箱断面と自由度



図—4　ブロック要素



図—5　板要素と自由度

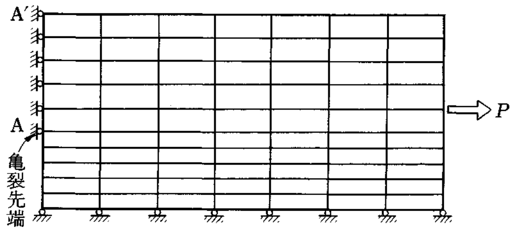
このようにして得られる剛性方程式は，**図—5** に示したような自由度を有する板要素に本法と同様の変位場を考え，変分原理を適用し有限要素法の定式化に従って得られる剛性方程式を集成した場合に一致する．

橋梁構造物の挙動を解明する場合，常微分方程式を精度よく解くことも大切であるが，s 方向の変位場 $[\phi(s)]$ をいかに仮定するかが重要であり，目的に応じた適切な変位場の設定と解法の選定が肝要となる．

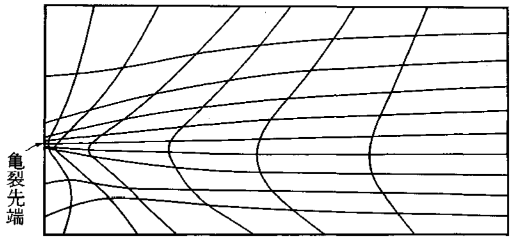
（長井正嗣）

（3） アダプティブ有限要素法

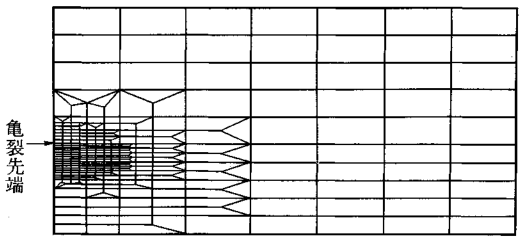
アダプティブ有限要素法（adaptive finite element method）は，FEM による計算結果から離散化誤差を評価して，有限要素分割をその誤差が最小になるように，自動的に再分割して解析を行う方法であり，Babuska[7)]によって提案された．アダプティブ FEM は，要素の再分割の方法の違いによって，r 法[8)～10)]，h 法[7),11),12)]，それに p 法[13),14)]の3つの方法に分類されている．r 法は，最初に用いられた要素の形と節点の位置を，要素分割が最適になるように変形移動する方法であり，r 法の適用の前後で要素総数と節点総数とは不変である．h 法は，誤差の大きい要素を，さらに細かい要素に分割する方法であり，要素総数と節点総数は h 法の適用により増加する．一方，p 法は，誤差の大きい要素を，さらに高次の要素に置き換える方法であり，p 法の適用により節点総数のみ増加することになる．どの方法を用いるのがよいのかという結論は，まだ得られておらず，問題



図―6 平板の有限要素分割図



図―7 r 法適用後の有限要素分割図



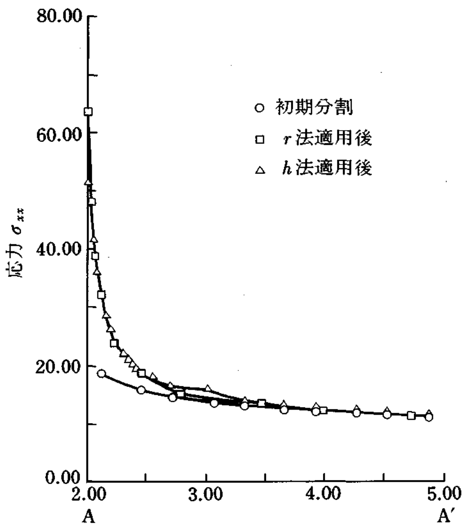
図―8 h 法適用後の有限要素分割図

に応じて種々選択されているのが現状である．

この手法の有効性を，Kikuchi ら[9] による二次元の線形弾性問題（クラックを有する平板の応力解析）の計算結果を用いて示す．図―6 が用いられた最初の要素分割図である．このモデルの有限要素解析による計算結果から離散化誤差を評価して，r 法と h 法を適用した結果得られる新たな要素分割図がそれぞれ，図―7 と図―8 である．これより，応力が無限大となるクラックの先端付近が，自動的に細かい要素分割になっていることがわかる．図―9 には A-A′ 上の σ_{xx} の分布を示した．この結果から，アダプティブ手法を適用することにより，計算結果が大幅に改善されていることがわかる．

現在，アダプティブ有限要素法の研究は精力的に進められており，線形の定常問題においてはある程度の成功を収めている[15]．今後，非線形や非定常の問題に対する研究の発展が望まれている．この方法は，離散化解析手法の問題点である，計算結果の要素分割への依存性を克服し得る方法であり，今後の FEM の研究における主要テーマの 1 つになっていくものと思われる．

（樫山和夫）



図―9 A-A′ 上の応力 σ_{xx}

2. 非線形問題の離散化および解析法に関する話題

現在，鋼およびコンクリート構造物の設計においては，その終局状態を予測した限界状態設計法が採用されつつあると考えてよい．限界状態は，材料の抵抗力自体が失われる，いわゆる材料非線形性によって決定される場合と，大きく変位するか，あるいは変形モードの急変（分岐座屈）を伴って抵抗力を失う，いわゆる幾何学的非線形性を伴う場合とがある．このような非線形問題の離散化に関する現状の把握と，幾何学的非線形問題および 2 つの非線形性を有する問題に対する新しい試みについて触れる．

（1） 幾何学的非線形問題の変位法による離散化

有限変位を考慮した弾性構造系の最初の離散化は，いわゆる線形化有限変位理論の上で展開されたものである．つまり，微小でない変位を考慮した非線形理論の第一次近似，あるいは，ある自明な解の近傍での微小な変動に関する理論である．たとえば骨組構造でのはり-柱理論，板殻構造での von Kármán の理論などが相当し，その離散化に関しても多くの報告がなされている[16),17)]．これらは，主に不安定現象の説明を目的としており，その連続系としての基礎方程式の適用は，たわみがはり高や板厚程度を越えない範囲に制限されていて，現在いわれるところの大変位問題に対処し得るものではない．

より大きい変位を扱い得る現在の多くの離散化有限変位解析は，次の事実に立脚している．すなわち，“微小ひずみの範囲での有限変位問題では，変位がいかに大きくとも，十分密な要素分割を行えば，各要素は大きい並進と回転の剛体変位を受けているものの，実質的な要素

自体の変形は，対応する連続系において線形の構成則が適用できる程度に十分小さい範囲にある．したがって，要素の剛体変位とともに移動する座標の上で，変形成分に対する力学関係を展開する限り，前述のはり-柱理論や von Kármán の理論程度の非線形基礎式の離散化で十分であるといえる．”というものである．このことを実際の離散化に具体的に反映させる手順は，次の２つに大別できる．

１つは，各要素の慣性座標上での節点変位の自由度を，要素自体の変形のパラメーターと剛体変位のパラメーターとに分離して，縮小された自由度としての変形に対して離散化の力学関係を展開した後，剛体位置を考慮して慣性座標系での力学関係に変換する手順である[18)~21)]．この場合，変形に対するひずみエネルギーを正しく評価しながら式展開がなされれば，１つの“弾性”構造系として，要素の大きい変形に対しても矛盾なく挙動を追跡できる．反面，平面骨組等以外の２軸曲げ要素や板殻要素に対する式展開は煩雑なものとなる．

もう１つは，初期状態から有限変位後の間に適当な変位段階（荷重段階）を設定して，各段階ごとに前段階での要素の剛体位置方向に定めた要素座標系の上で，次段階の全自由度としての節点変位増分（比較的小さい剛体変位増分も含む）と節点力（増分）との力学関係を，前述のような低次非線形基礎方程式を用いて展開しようとするものである[22)~28)]．この展開では，要素の変位増分に対して，変位後の要素形状の上での（剛体的）つり合い，あるいは，節点力–節点変位間での経路によらないエネルギーの存在，などの基本的力学条件を厳密に（または，解析的に）保持することが難しく，節点力の節点変位に関する微係数としての接線剛性マトリックスが非対称となる等の問題が生じる．しかし，式展開は比較的簡明であり，実際の数値計算手段としての有効性は高い．

（阿井正博）

（２） 群論による分岐現象の記述

軸対称な幾何形状を有するドーム（シェル）構造物は軸対称荷重下では，一般に軸対称性を保つように変形する．しかし，しばしば荷重の増加に伴い分岐座屈を起こし，変形パターンの対称性を喪失し崩壊する．これらの構造物の外力-変位関係（つり合い経路）は分岐点から分岐経路が次々と枝分かれする非常に複雑なものであることが知られている．この複雑な分岐現象も近年の有限変位解析の発達により追跡可能となっており，分岐座屈荷重，変形量等の定量的な側面は求められる段階に至っている．

一方，応用数学者が分岐現象の定性的な側面を群論を用いて捉える理論を提案している[29),30)]．この理論は，ある種の分岐現象が回転対称性や線対称性等の幾何学的対称性の崩壊の過程であることに着目し，その崩壊のメカニズムを求めたものである．この理論では，系（方程式）や分岐モードの幾何学的対称性を回転・鏡映等の座標変換から構成される対称群とよばれる群により記述する．ある系が，ある対称群が引き起こす座標変換に関して不変に保たれるとき，「その系はその群に共変である」という．その群共変な系の支配方程式は，その群の対称性に支配され，支配方程式の解として得られる分岐現象も必然的にその対称性に支配されることが明らかになっている．

Sattinger は対称群を用いることにより，群共変な系の分岐座屈に伴う変形モードの対称性の喪失の過程を記述している．藤井は潜在的に可能な分岐モードを群の標準分解により求めている．さらに，分岐点近傍での特異性を表わす固有値に対応する固有ベクトルで方程式を級数展開する（Lyapounov-Schmidt 展開）ことにより分岐方程式を導き，分岐点や分岐経路の局所的な性状を明らかにしている．

群論（対称群）による分岐理論の特徴はその先見性にある．この理論により潜在的に可能な分岐モードや分岐経路の階層構造を，分岐経路追跡解析に先立ち知ることができる．分岐解析手法を道を走る車だとすれば，群論による理論は道順を示す道標であるといえよう．この両者が補い合うことにより，複雑なつり合い経路も必然の結果の積み重ねとして追跡でき，理解できることになろう．

このように，群論を用いる理論により分岐現象の定性的な側面が解き明かされつつある．しかも，この理論は群共変な系に関する一般論であるので，構造系のつり合い方程式の群共変性を証明することにより，構造系の座屈現象の記述にも直接用いることができるものである．しかし，構造系の分岐現象に対するその応用は非常に限られている．わずかに，軸対称正多角形トラスドームの群共変性だけが証明され，その分岐モードや分岐経路の階層性が解明されつつある段階である[31)]．軸対称シェル構造物の分岐現象の群論による記述等は有望な将来の研究課題であろう．

（池田清宏）

（３） カタストロフィー理論の適用[32)~35)]

構造物の非線形不安定挙動，特に鋼構造物の弾塑性安定性とその強度に関する研究は構造解析の分野でも非常に興味のある問題の１つである．座屈，後座屈や耐荷力に関しては従来よりきわめて多くの解析的研究がなされてきた．近年，差分法，FEM や級数展開などによる離散化法を用いて，材料的・幾何学的非線形性を考慮した数値解法がますます盛んになってきている．

これらの解析手法の主目的は，材料特性，幾何学的諸

元や各種の不完全性のようなパラメーターの組合せの1つ1つに対して，構造物の荷重–変位曲線等の弾塑性挙動特性を，載荷の初期の段階から最終的な極限状態まで刻一刻厳密に追跡することである．

その一方，カタストロフィー理論を拡張することにより，弾塑性域における構造部材の耐荷力を評価する簡便な手法もある．この手法は中心圧縮柱，はり-柱，圧縮板，圧縮補剛板，はりの横倒れ問題，円筒シェル構造など，座屈の関与する構造への適用が可能と考えられている．その評価法の目的は構造物の荷重-変位曲線を刻一刻と追求することではなく，初期不整を有する，いわゆる不完全性をもった構造が，この初期不整の存在によってどの程度強度低下するのかを簡潔に表現することである．いいかえれば，増分型の非線形連立方程式を連続的に解くことなく強度そのものを評価できるのが特徴である．この手法の概要を述べると以下のとおりである．

（1） 構造の残留応力や材料の弾塑性特性を考慮した，弾塑性座屈荷重をまず求める．

（2） 完全系，すなわち，初期不整のない系の弾塑性後座屈曲線と塑性崩壊機構の除荷曲線をそれぞれ求める．その交点を等価な非対称分岐座屈点と考える．この塑性除荷曲線上で，不完全系構造の強度が極値として現われると考え，初期不整の存在による強度低下を，この等価分岐座屈荷重よりの低減という形で，カタストロフィー理論によって評価する．カタストロフィー理論では，このような初期不整が強度低下に与える影響を陽な形のカスプとして求めることができる．

（3） この手法を用いるにあたっては，実際の構造部材の挙動を参考にして，数値計算に用いる初期不整はそのままの形ではなく，キャリブレーションにより，等価初期不整に置き換えられ修正されたものを用いる．その等価初期不整の形はいろいろな構造形式に対して適用が可能となるよう統一的なフォーマットをとる．

（渡辺英一）

3. 最適弾塑性設計への応用

構造解析の最終目的は構造物の設計であるが，何らかの方法で離散化されたモデルに対する最適設計に関して応用例を示す．

近年，土木・建築構造物の耐震設計において，比較的頻度の高い中小地震に対しては構造物が無被害かあるいは軽微な被害にとどめ，構造物の耐用年数中に1回程度生起すると考えられる最大級の地震に対しては構造物の崩壊を防ぐという，耐震工学上の基本理念が定着しつつある．すなわち，建築の分野では，一部の建築構造物を対象として大地震時の場合に塑性解析による保有水平耐力を検討することを義務づけており[36]，また土木の分野でも地震荷重に対して地震時変形性能の照査に関する規定を設けている[37]．一方，土石流を受ける鋼製砂防構造物に対して，構造物全体あるいは，部材の塑性域までを考慮した塑性設計法の適用について検討すべきことを提示している[38]．

最適弾塑性設計法とは，このような観点から，大地震や土石流など異常時の荷重に対してある所要の耐力を保持したうえで，構造物の粘り，つまり変形性能に期待することにより，耐力と変形性能の制約を同時に考慮して構造物の安全性を図り，さらに経済性すなわち構造物全体の費用または重量を最小とするように，非線形計画法を用いて最適断面配分を決定しようとするものである．

従来，最適弾塑性設計に関する研究としては，まずRC構造に対して塑性回転角制約を考慮した研究が必要であるというMaierによるレビュー論文[39]があり，また動的地震荷重を対象として，目標塑性率制約を考慮した耐震設計法に関するもの[40]や，鋼高橋脚を取り扱ったもの[41]などがある．静的荷重を対象としたものについては，降伏部材選択方式[42]やメカニズム生起規準による方法[43]，さらに感度解析を用いた骨組構造物の最適弾塑性設計法[44),45]などがある．

ここでは，静的荷重を対象として，離散化モデルによるホロノミック弾塑性解析の基本式を用いた降伏部材選択方式による弾塑性設計法[42]について簡単に説明する．

設計手順としては，まず許容応力度制約を単に降伏応力度制約に置き換えた，弾性限界設計を行う．次に降伏状態に達した部材の中から，目標関数を最も改良するように感度解析による選択を行って，その部材の塑性変形を発生させ，最終的に降伏部材が得られなくなるまで計算を行うものである．簡単なトラス構造物を対象とした数値計算を行って，本法と最適弾性設計および最適塑性設計とを比較検討しているが，本法によって得られる設計は，ちょうど最適弾性限界設計と最適塑性設計の中間領域に存在し，許容塑性率に応じて連続した解が得られることが認められる．また確認のため，本設計法で得られた結果を用いて弾塑性増分解析を行うと，降伏部材の選択順序に至るまで一致する．さらに，現在，最適弾塑性設計法を実際の構造物へも応用し，その有用性と実用性について検討している[45]．

（石川信隆）

4. 選点法による固有値解析

次に，動的解析のための特性解析に，選点法を適用した場合について説明する．

ここでは，線形固有値問題の解（固有値，固有モード）を微分方程式の残差条件により定める場合だけを議論する．選点法は，現在最も汎用的な数値解析手法として用

いられているFEM等に比べて，その適用は幾何形状が矩形板，回転殻のように比較的簡単なものに限られるが，定式化が容易，選点の選択によっては少ない自由度で高精度な解が期待できる等の特性を有する実用的な解法である．

この手法は他の重みつき残差法と同様に，支配方程式（一次元の問題，$Lu=\lambda u$ を考える．L：微分演算子，λ：固有値）に未知の正解 u を近似する試行関数 $v\,(=\sum a_k N_k$, N_k：仮定した関数，a_k：未知パラメーター）を代入し，そのとき生じる残差 $R=Lv-\lambda v$ の重みつき平均により，未知数 a_k を決定しようとするもので，次のように表現される．

$$\int_x (Lv-\lambda v)W_k dx=\int_x RW_k dx=0 \quad (k=1\sim M) \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで，W_k は重み関数であり，その選び方によって選点法は次のように分類できる．

（a） Point Collocation 法：重み関数を $W_k=\delta(x-x_k)$ のように Dirac のデルタ関数に選ぶ場合で，式（1）によれば，一群の選ばれた点 x_k で残差を零と置くことと等価である．これに類似した概念はたとえば，補間関数の性質（$N_i(x_j)=\delta_{ij}$, δ_{ij}：Kronecker のデルタ）に基づく FEM の試験関数の決定にも用いられている．なお式（1）は $[K]\{a\}=\lambda[M]\{a\}$ と代数方程式系で表現され，行列の代表的な要素は，$K_{km}=L(N_m)|_{x=x_k}$, $M_{km}=N_m|_{x=x_k}$ である（$1\leqq k,\ m\leqq M$）．このように，行列の成分が積分形で与えられていない点が他の解法との大きな相違点である．解の精度は，選点 x_k の取り方に大きく依存するので，残差関数の高次導関数を零にする方法[46]，直交多項式の零点を選点とする方法[47]，および最小2乗法の利用[48]などにより高精度化が計られている．

（b） Subdomain Collocation 法：$W_k=\{1\,(x_k<x<x_{k+1}),\ 0\,(x<x_k,\ x>x_{k+1})\}$ の重み関数を採用する場合で，式（1）によれば，M 個の部分領域で誤差の積分を零とおくことと等価である．このときも，式（1）は代数方程式系へ帰着され，代表的な要素は，

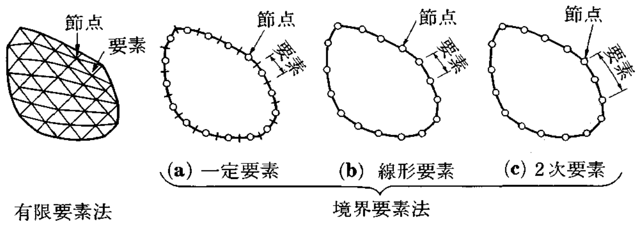
$$K_{km}=\int_{x_k}^{x_{k+1}} L(N_m)dx, \qquad M_{km}=\int_{x_k}^{x_{k+1}} N_m dx$$

である（$1\leqq k,\ m\leqq M$）．なおこの方法は，Subdomain 法あるいは，Partition 法ともよばれているもので，回転殻の安定問題[49]，固有振動問題[50]等に適用されている．

（三上　隆）

5. 境界要素法

境界要素法（Boundary Element Method, BEM）は，Green の定理を用いて，支配微分方程式を境界積分方程式に変換し，境界上の未知量を FEM と同様な離散化



図—10　二次元問題における有限要素法と境界要素法の離散化

（要素分割）を行って解析する手法である．境界要素法の定式化には直接法と間接法の2種類があるが，直接法では物理的な意味が明確な変数が用いられる．また，重み付き残差法に基づき，逆問題（inverse problem）に変換して定式化する手法[51]も提案されている．

FEM が対象とする領域内を要素分割して解析するのに対し，境界要素は，支配方程式が境界上で定義されるため，領域の境界のみに要素を設けて解析することになる（図—10）．

本手法の特長としては，1）現象の次元を1つ下げた形で取り扱えるため，データ量の大幅な低減が期待できる，2）場の支配方程式を満足する解を利用するため，精度の向上が期待できる，3）領域内部の未知力学量が任意に求まる，4）構造解析をはじめとして土質力学，流体力学での無限および半無限の問題の解析に適している，等が挙げられる．

反面，境界積分方程式を離散化して得られるマトリックスの要素はほとんどが零ではなく，マトリックスも非対称になる．たとえば，細長い閉じた構造物の解析では，領域を分割・結合する手法の併用が提案されている．このほかに，構造解析への適用にあたり，数値計算上発生する問題の処理方法は文献 52）に示されている．

本手法の適用については，静弾性解析のみならず，材料非線形問題，熱弾塑性問題，時間依存型問題および非構造問題への応用も活発であるが，幾何学的非線形問題への適用はみられない．なお，本手法の研究および実用化に関する動向は文献 53），54）に詳述されている．

FEM および BEM はそれぞれに特長を有する解法であることから，目的に応じた使い分けが肝要である．また，目的に応じて両者を混用して解析する手法も有効であり，両者の結合手法も提案されている．

（長井正嗣）

6. おわりに

以上，過去10年くらいの間の離散化に関する話題から，ごく限られたものではあるが，比較的新しい試みを含めたものを列挙してみた．汎用コードとしてブラックボックス的に使用されている離散化解析手法も，まだ，

多くの問題点・改良の余地が残っていることが明らかである．今後の研究課題の参考，あるいは，実際の設計業務における種々の改善等の一助になれば，大変幸いである．

なお，執筆者は各項の末尾に括弧書きで示した委員の方々であり，全体の編集を分科会で行った．最後に当分科会のメンバーは以下のようであった．

主査：西岡　隆

委員：阿井正博，青木徹彦，池田清宏，石川信隆，樫山和男，梶川康男，梶田建夫，川口昌宏，川原睦人，小長井一男，武田　洋，中村秀治，長井正嗣，二羽淳一郎，長谷川彰夫，林　正，三上　隆，山下清明，吉田　博，依田照彦，渡辺英一，岩熊哲夫（幹事）

参考文献

1) Cheung, Y.K.：The Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, 1976.
2) 笹戸松二：林　正・中嶋学夫・中島一朗：節点帯板法による薄肉構造物の解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，Vol. 9, pp. 103～108, 1985.
3) 笹戸松二・林　正：節点帯板法による補剛円筒殻の解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，Vol. 9, pp. 109～114, 1985.
4) Hinton, E. and Owen, D.R.J.：Finite Element Software for Plates and Shells, pp. 49～156, Pineridge Press, 1984.
5) 坂井藤一・長井正嗣・佐野信一郎：ブロック有限要素法による薄肉箱桁の立体解析，土木学会論文報告集，No. 255, pp. 17～29, 1976.
6) 坂井藤一・長井正嗣：ブロック有限要素法による薄肉曲線箱桁の立体解析，土木学会論文報告集，No. 295, pp. 1～13, 1980.
7) Babuska, I. and Rheinboldt, W.C.：A-posteriori error estimates for finite element method, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 12, pp. 1597～1615, 1978.
8) Diaz, A.R., Kikuchi, N. and Taylor, J.E.：A method of grid optimization for finite element methods, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 37, pp. 26～46, 1983.
9) Kikuchi, N.：Adaptive grid design methods for finite element analysis, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 55, pp. 129～160, 1986.
10) Kashiyama, K. and Kawahara, M.：Adaptive finite element method for linear water wave problems, Proc. JSCE (Hydraulic and Sanitary Eng.), No. 387/II-8, pp. 115～124, 1987.
11) Lohner, R., Morgan, K. and Zienkiewicz, O.C.：An adaptive finite element procedure for compressible high speed flows, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 51, pp. 441～465, 1985.
12) Demkowicz, L., Devloo, Ph. and Oden, J.T.：On an h-type mesh refinement strategy based on minimization of interpolation errors, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 53, pp. 67～89, 1985.
13) Babuska, I., Szabo, B.A. and Katz, I.N.：The p-version of the finite element method, SIAM, J. Numer. Anal., Vol. 18, pp. 515～545, 1981.
14) Zienkiewics, O.C., Gago, J. and Kelly, D.W.：The hierarchical concept in finite element analysis, Computers & Structures, Vol. 16, pp. 53～65, 1983.
15) Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computation, (Eds. Babuska, I., Zienkiewicz, O.C., Gago, J. and Oliveira, E.R. de A.), Wiley, New York, 1986.
16) Hartz, B.J.：Matrix formulation of structural stability problems, Proc. ASCE, Vol. 91, No. ST 6, pp. 141～157, 1965.
17) Vos, R.G. and Vann, W.P.：A finite element tensor approach to plate buckling and postbuckling, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 5, pp. 351～365, 1973.
18) Oran, C.：Tangent stiffness in plane frames, Proc. ASCE, Vol. 99, No. ST 6, pp. 973～985, 1973.
19) 後藤茂夫・羽根悟朗・田中達朗：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析，土木学会論文報告集，No. 238, pp. 31～42, 1975.
20) 阿井正博・西野文雄：離散化系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用，土木学会論文報告集，No. 304, pp. 17～32, 1980.
21) 阿井正博・伊東　賢：有限変位を受ける薄肉はり要素の一離散化展開，土木学会論文集（Structural Eng./Earthquake Eng.), No. 344/I-1, pp. 215～224, 1984.
22) Murray, D.W. and Wilson, E.L.：Finite-element postbuckling analysis of thin elastic plates, AIAA J., Vol. 7, No. 10, pp. 1915～1920, 1969.
23) 前田幸雄・林　正・中村　守：増分法による平面骨組構造物の大変位解析の加速計算法，土木学会論文報告集，No. 223, pp. 1～9, 1974.
24) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司：残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析，土木学会論文報告集，No. 244, pp. 1～14, 1975.
25) 前田幸雄・林　正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，No. 253, pp. 13～27, 1976.
26) 吉田　裕・増田陳紀・松田　隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性-大変位離散化要素解析法，土木学会論文報告集，No. 288, pp. 41～55, 1979.
27) Nishino, F., Ikeda, K., Sakurai, T. and Hasegawa, A.：A total Lagrangian nonlinear analysis of elastic trusses, Proc. JSCE (Structural Eng./Earthquake Eng.), No. 344/I-1, pp. 39～53, 1984.
28) Hasegawa, A., Liyanage, K.K. and Nishino, F.：A non-iterative nonlinear analysis scheme of space frames with thin-walled elastic members, Proc. JSCE (Structural Eng./Earthquake Eng.), No. 380/I-7, pp. 45～55, 1987.
29) Fujii, H. and Yamaguti, M.：Structure of singularities and its numerical realization in nonlinear elasticity, J. Mathematics of Kyoto Univ., Vol. 20, No. 3, 1980.
30) Sattinger, D.H.：Group theoretic method in bifurcation theory, Lecture Notes in Mathematics, 762, New York, Springer-Verlag, 1979.

31） Ikeda, K. and Torii, K.：Group theoretic description of bifurcation behavior of axisymmetric regular-polygonal truss domes, Proc. JSCE (Structural Eng./ Earthquake Eng.), No. 386/Ⅰ-8, pp. 21～31, 1987.

32） Niwa, Y., Watanabe, E. and Isami, H.：A new approach to predict the strength of steel columns, Proc. JSCE, No. 341, pp. 13～21, 1984.

33） Niwa, Y., Watanabe, E., Isami, H. and Fukumori, Y.：A new approach to predict the strength of compressed steel plates, Proc. JSCE, No. 341, pp. 23～31, 1984.

34） Niwa, Y., Watanabe, E. and Suzuki, S.：A new approach to the elastoplastic lateral buckling strength of beams, Proc. JSCE (Structural Eng./ Earthquake Eng.), No. 344/Ⅰ-1, pp. 79～87, 1984.

35） Niwa, Y., Watanabe, E. and Isami, H.：A new approach to predict the strength of compressed steel stiffened plates, Proc. JSCE (Structural Eng./Earthquake Eng.), No. 362/Ⅰ-4, pp. 35～44, 1985.

36） 建設省住宅局建築指導課監修，建築基準法施工令，第 82 条の 4，昭和 55 年政令 196 号昭和 56 年 6 月 1 日より施行，基本建築関係法令集昭和 56 年版，日本建築士会連合会，日本建築技術者指導センター編集，昭和 55 年 12 月，霞ケ関出版.

37） 日本道路協会，道路橋示方書・同解説，Ⅴ 耐震設計編（1980）.

38） 砂防・地すべり技術センター鋼製砂防構造物研究会，鋼製砂防構造物設計便覧，昭和 60 年版，昭和 60 年 10 月.

39） Maier, G.：Future direction in engineering plasticity, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, (ed. Cohn, M.Z.), Pergamon Press, pp. 631～648, 1979.

40） 山田善一・家村浩和・古川浩平・坂本幸三：目標塑性率に基づく最適弾塑性耐震設計法に関する研究，土木学会論文報告集，第 341 号，pp. 87～96，1984.

41） Mori, M., Ishikawa, N. and Nishio, F.：Optimum elastic-plastic design of steel pipe piers under earthquake motion, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 30, pp. 251～261, Univ. Tokyo Press, 1981.

42） 石川信隆・香月 智・三原徹治・古川浩平：降伏部材選択方式によるトラス構造の最適弾塑性設計に関する一考察，土木学会論文集 (Structural Eng./ Earthquake Eng.)，第 350 号/Ⅰ-2，pp. 321～329，1984.

43） 三原徹治・石川信隆・古川浩平・太田俊昭：メカニズム生起規準に基づく骨組構造物の最適弾塑性設計法，構造工学論文集，Vol. 33 A，pp. 715～723，1987.

44） Bendsoe, M. R. and Sokolowski, J.：Sensitivity analysis and optimization of elastic-plastic structures, Engineering Optimization, Vol. 11, pp. 31～38, 1987.

45） 三原徹治・北小路雅倫・石川信隆：感度解析を用いた鋼製砂防枠構造物の最適弾塑性設計，土木学会第 42 回年次学術講演概要集，第Ⅰ部，pp. 16～17，昭和 62 年.

46） Subramanian, G. and Mathew, T. V.：On a method of collocation by derivatives, J. Sound Vib., Vol. 71, pp. 458～461, 1980.

47） 三上 隆・芳村 仁：選点法による固有値問題の解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第 10 巻，pp. 10～15，1986.

48） Dong, S. B. and Lopez, A. E.：Natural vibrations of a clamped circular plate with rectilinear orthotropy by least-squares collocation, Int. J. Solids and Structures, Vol. 21, pp. 515～526, 1985.

49） Langhaar, H. L., Boresi, A. P., Miller, R. E. and Bruegging, J. J.：Stability of hyperboloidal cooling tower, Proc. ASCE, Vol. 96, No. EM 5, pp. 753～779, 1970.

50） Stoneking, J. E. and Boresi, A. P.：A theory for free vibration of orthotropic shells of revolution, Nucl. Eng. and Des., Vol. 14, pp. 271～285, 1970.

51） Brebbia, C. A.：The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, 1978.

52） 小松定夫・長井正嗣・坂本保彦：境界要素法による薄肉構造解析に関する研究，土木学会論文報告集，No. 333，pp. 47～58，1983.

53） 鷲津久一郎監修，田中正隆・田中喜久昭：境界要素法―基礎と応用―，丸善，1979.

54） 小林昭一：研究展望―積分方程式法（境界要素法）の発展，土木学会論文集，No. 350/Ⅰ-2，pp. 9～22，1984.

（1988. 3. 8・受付）

投稿論文

Paper