
投稿論文
Paper

亀裂をもつ板の二次元問題を解析するための 特異関数に関する研究

SINGULAR FUNCTIONS SUITED TO ANALYZE A FINITE VALUE OF STRESS CONCENTRATION NEAR THE END OF A CRACK TRAVERSING A PLATE

段 樹金*・堀 晃芳**・中川建治***

By Shujin DUAN, Akiyoshi HORI and Kenji NAKAGAWA

In this paper two singular stress functions suited to analyze crack problems of plates are presented. One of them is a stress function of two-dimensional problems which creates a crack opening displacement due to normal loads applied along the crack (mode I) in an infinite plate. The other is the same function as that but due to shear loads along the crack (mode II). The Authors define these two functions as elementary crack function with opening of unit length. Super-posing these functions with different length of elementary crack opening, the stress concentrations due to many cracks contained in the infinite plate can be analyzed numerically with good accuracy. The characteristics of this method is that the stress softening zones at both end of the crack can be constructed where either crack opening displacements or stress concentrations with finite magnitude appear.

Keywords : plane stress, crack, stress concentration, finite value

1. まえがき

亀裂に関する二次元問題は Griffith¹⁾ に始まり Westergaard²⁾, Irwin³⁾ らの解析的研究以来多くの研究が報告されている。鉄筋コンクリート造りの構造物の壁体に生じる亀裂は近似的に直線状のものとして扱えるほど単純なものではなく、亀裂の原因も一律に規定し得るものではないが、亀裂をもつ板の問題の基本的な解として最も広く活用されているものは図-1 に示すような直線状の亀裂1本を含む無限板の解析解であろう。その1つは亀裂の先端で無限大の応力集中が生じる Westergaard²⁾ による解(図-2, 曲線 W_s) である。無限大の応力は不合理ではあるが非常に簡単な解であり、実験のデータを集約して安全性を評価する指標として Irwin³⁾ によって定義されて以来広く活用されている応力拡大係数もこの解を基礎にしている。他の解析解は無限大の不合理性を解消して最大値が降伏応力 σ_{yd} で打ち切られた形の応力分布を与える Dugdale⁴⁾ の解である(図-2, 曲線 D)。

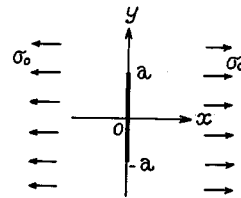


図-1 亀裂1本をもつ板の一様引張り(モードI)

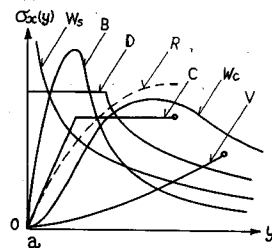


図-2 亀裂先端の応力集中(従来の研究)

これに対して実験的研究において結果を説明付けるために想定されている亀裂先端の応力集中は、滑らかに立ち上がり有限値になるものがほとんどである。その代表的なものを図-2の曲線 C, W_c , Vとして示すが、これらは自由辺上に亀裂をもつコンクリートの板等の応力集中の形状を示しているものと推定されている。曲線

* 正会員 華北水利水电学院(中国留学生)講師

** 正会員 工修 中日本建設コンサルタント

*** 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科
(〒501-11 岐阜市柳戸1-1)

CはChoら⁹⁾によるものであり、Dugdaleによる応力分布に一定の勾配で立ち上がる部分を付加したような応力分布を仮定して有限要素法で解析した結果と実験結果がよく近似すると報告されている。曲線WcはWecharatanaら⁷⁾による実験結果である。曲線VはVisalvanichら⁸⁾によるもので、ファイバー・コンクリートの亀裂ではファイバーの引き抜けや切断をマクロに考察するとこのような曲線が好ましいと報告されている。

このほかにBarenblatt⁶⁾は数式ではなく概念的に、「亀裂先端の狭い範囲で応力がヤング率程度になるがその大きさは周辺の境界条件というよりは材料の特性に支配されて曲線Bのようになる」と報告している。Reinhardt¹⁰⁾は亀裂先端部分をstress softening zoneと名付けて有限な応力集中部分を重み積分法で構成することを試みているが(図-2, 曲線R)解析的には数式は不完全なものである。

金属のように均質な材料中の亀裂の解析解(Westergaard, Dugdale)は無限大の応力や応力勾配を伴っていてもあまり不都合でないとしても、コンクリート・岩盤あるいは土質材料のように粒子の粗い混合材料内に生じる亀裂問題のマクロ的な把握においてはこのような解析解は必ずしも好ましいものではない場合が多いと思われる。亀裂先端のプロセス・ゾーンの応力勾配や相対的なずれを分子や原子のスケールで捉えてミクロに論じるのではなく、コンクリートの骨材あるいは岩盤や土質内部の粒子のオーダーで論じる場合には、無限大の勾配は現実的ではない。上記の実験的研究がこの一例であろう。Visalvanichの研究のファイバーの切断や引き抜けによるコンクリートの亀裂等もマクロな把握を必要とする現象であろう。

このような状況から推察すると、亀裂先端部分で滑らかに立ち上がり有限な応力分布を与えるようないくつかの応力関数を導くことは土木工学の分野においてこそ望ましい意義あることと思われる。著者らは亀裂の先端部分で有限かつ滑らかであり、作用している平均応力に比例した応力集中を与えるような応力関数の研究を行っている。すでに、亀裂1本をもつ板の二次元問題の解析解と¹⁷⁾、多くの交差する亀裂をもつ板の曲げの場合の数値解析法¹⁶⁾とについて報告している。本研究ではこれらの研究の一環として、交差したり接近している複数の亀裂をもつ板の二次元問題(モードIとIIの亀裂問題で有限な滑らかな応力集中を生じさせる場合)の数値解析法について報告したい。概略は次のようなものである。

複素関数の特異点の近傍における分岐の特性を活用して、有限な直線区間に滑らかな開口(変位の食い違い相当)1つをもち無限遠方で2階微分(応力成分)が0へ収束するような重調和関数(応力関数)を導く。これは

直線状の亀裂をもつ無限板において滑らかな開口を生じさせる1つの応力状態である。

しかしこの関数の単独使用では応力分布は有限で滑らかであるが亀裂部分の応力は0とはならない。この関数を要素関数と定義して、開口の長さや大きさが異なるものを数多く導いて重ね合わせて、これらの開口部で実際の板の亀裂開口部を幾重にも覆い尽くす。このような重ね合わせの付帯条件として実際の亀裂開口部の応力(重ね合わされたもの)を0に近づけて、同時に周辺で有限な応力集中を実現させるという解析法である。

これは亀裂をもつ板の曲げ問題で著者らが導いた特異関数を二次元問題へ拡張したものである。本研究のように有限な応力集中と開口変位とを同時に実現させる重調和関数を導いて組み合わせるという解析方法は他に例をみない。西谷の提案による体積力法¹⁸⁾は開口部に特殊な体積力相当の力を作用させて亀裂を形成する手法に基づいているので、本研究の要素亀裂の関数を誘導する過程には関連した思想が作用していると思われるが、有限な応力集中を指向したものではない。

2. 開口をもつ応力関数の導き方

(1) 開口関数について

xy 平面上に単位厚さの無限弾性板があり、その y 軸上の区間 $(-a, a)$ に直線状の亀裂があるものとする。亀裂の両面には互いに反対方向の面内分布外力 $p_1(y)$ が作用して(無限遠方も含めて他の外力は作用せず)、開口形状(変位 u 、あるいは v のいずれか一方の食い違い)は次のような y の3次式で表わされるものとする。

$$\left. \begin{array}{l} |y| \leq a \text{ で } g_1(y, a) = 2|y^3| - 3ay^2 + a^3 \\ |y| > a \text{ で } g_1(y, a) = 0 \end{array} \right\} \dots\dots (1)$$

$$u(\varepsilon, y) \propto g_1(y, a) \text{sign}(\varepsilon) \dots\dots (2)$$

あるいは

$$v(\varepsilon, y) \propto g_1(y, a) \text{sign}(\varepsilon) \dots\dots (3)$$

とする(図-3(1)参照)。ここに ε は0の近傍(開口面 $x = \pm 0$)を意味する。開口部先端 $y = \pm a$ で滑らかに閉じ合わされる形状を仮定するのが本研究の亀裂の特徴である。図-4は開口先端部の曲率変化を示すもので、Westergaardの解はまず円孔として解き、偏平化して楕円を経て直線状のものに至らしめたものと解釈される。先端で無限大の曲率をもつので応力も無限大となる。

これに対してDugdaleの解では亀裂の先端のプロセス・ゾーンでは σ_{ya} と開口変位が共存していて、有限な曲率の曲線が対称に接した開口となるために応力も有限となっている。著者らもこのような変位と応力の特性に着目して、この状態を生じる最低次の多項式を採用して式(1)のような開口形状を設定するのである。したがっ

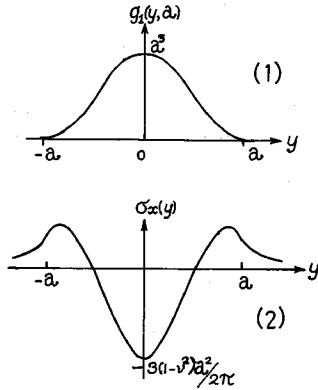


図-3 開口形状と応力（開口用外力）分布

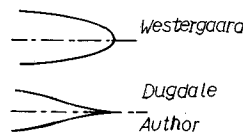


図-4 亀裂先端の曲率

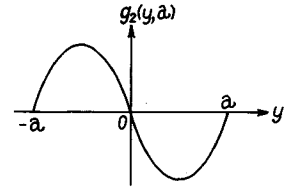


図-5 開口部の外力の補正用関数

てこのままでは亀裂開口部の応力に関する条件（応力は0）を満足するわけではない。

(2) 開口を構成する応力関数

式(2)に定義した開口を与える応力関数を導く過程を簡単に示す。記述を可能な限り簡素化するために複素変数 z , \bar{z} によって表わし、すべて平面応力状態とする。

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

無限板（亀裂をもたない）の原点で x 正軸方向に作用する面内集中力 P によって生じる応力状態の応力関数は

$$f(x, y) = R_e[(C_1 \bar{Z} + C_2 Z) \log Z] \dots \dots \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -P(1+\nu)/8\pi \\ C_2 &= P(3+\nu)/8\pi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

として与えられる¹⁴⁾。 ν はポアソン比である。図-6に示すように $-f_x(x, y)$ は原点で互いに反対方向の集中力 P が作用してピンホール状の孔が生じている状態を表わし、 $-f_y(x, y)$ は互いに食い違う P によってせん断方向の小孔が生じているものに対応する（平板の曲げ問題で任意の形状の開口を構成する手法として著者らが先の報告に述べたもの¹⁶⁾と同等）。亀裂のモード I に対応した任意の開口 $g_1(y, a)$ を y 軸上に構成するには $f_x(x, \eta)$ に $g_1(\eta - y, a)$ を重みとして乗じつつ積分すればよい。同様にモード II に対応した任意のせん断方向の食違い変位 $v = g_2(y, a)$ を与える応力関数を構成するには $f_y(x, \eta)$ と $g_1(\eta - y, a)$ との積の積分をとればよい。

$$f_{11}(x, y, a) = - \int_{-a}^{y+a} g_1(\eta - y, a) f_x(\eta, x) d\eta \dots \dots \dots (6)$$

$$f_{21}(x, y, a) = - \int_{-a}^{y+a} g_2(\eta - y, a) f_y(\eta, x) d\eta \dots \dots \dots (7)$$

このようなピンホール状の孔（特異点）をもつ関数の

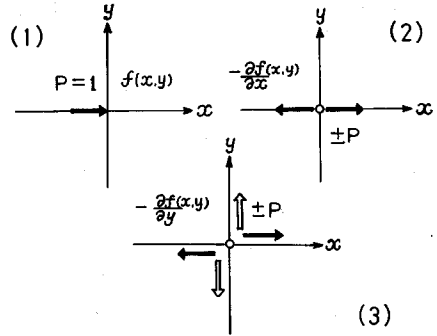


図-6 集中に対する応力関数とピンホールをもつ特異関数

重み積分は乗じた重みに比例した開口（複素関数の食違い分岐）を与えるが応力を任意に制御できるわけではない。

3. 要素亀裂 I の応力関数（モード I）

y 軸上の亀裂部分で x 方向の変位 u が $g_1(y, a)$ に比例した食違いを生じて変位 v と応力は連続しているような状態を表わす応力関数は式(6)を実際に積分することによって得られて次のように得られる。

$$f_{11}(x, y, a) = R_e[\bar{Z} f_{13}(Z) + f_{14}(Z)] \dots \dots \dots (8)$$

$$\begin{aligned} f_{13}(Z) &= C_1 \{-4Z^3 \log Z + 4a^2 Z \\ &\quad + (2Z + ia)(Z - ia)^2 \log(Z - ia) \\ &\quad + (2Z - ia)(Z + ia)^2 \log(Z + ia)\} \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{14}(Z) &= -(5C_1 + C_2) Z^4 \log Z + \{C_1(2Z + ia)Z \\ &\quad + (C_1 + C_2)(Z^2 + a^2)/2\} (Z - ia)^2 \log(Z - ia) \\ &\quad + \{C_1(2Z - ia)Z + (C_1 + C_2)(Z^2 + a^2)/2\} \\ &\quad \cdot (Z + ia)^2 \log(Z + ia) + (11C_1 + 3C_2)a^2 Z^2/2 \\ &\quad + (31C_1 + 7C_2)a^4/12 \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

ここに、 G はせん断弾性係数であり、 $f_{11}(x, y, a)$ による y 軸上の $x = \pm \epsilon$ に沿う開口変位 u を求めると

$$\begin{aligned} 2G(u + iv) &= \frac{(3-\nu)}{1+\nu} f_{13}(Z) - \overline{Z f'_{13}(Z)} - \overline{f'_{14}(Z)} \\ u(\epsilon, y) &= (1-\nu) g_1(y, a) \text{sign}(\epsilon)/4G \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

となり目的は達成されていることがわかる。しかし亀裂部分に沿って

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(\varepsilon, y) &= -3 \nu g_2(y, a) \text{sign}(\varepsilon) \dots\dots\dots(12) \\ g_2(y, a) &= y(|y| - a) \quad (|y| \leq a) \\ &= 0 \quad (|y| > a) \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

というせん断力が現われる。これは図-5に示す形状であり、開口の両面で反対符号であるから同じ方向の分布外力となり、モードIの亀裂の解析では不都合なので消去する必要がある。このためには次のような応力関数 $f_{12}(x, y, a)$ を導けばよい。原点で y 方向に集中力 P が作用する場合の応力関数 $f(y, x)$ と重み関数 $g_2(y, a)$ との合成積をとると分布外力 $g_2(y, a)$ が亀裂部分（この場合は開口せずに連続している）に作用している状態が実現する。

$$\begin{aligned} f_{12}(x, y, a) &= \int_{y-a}^{y+a} f(\eta, x) g_2(\eta - y, a) d\eta \\ &= R_e[\bar{Z} f_{15}(Z) + f_{16}(Z)] \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{15}(Z) &= -[4 Z^3 \log Z - 4 Z a^2 - (Z - ia)^2 (2Z + ia) \\ &\quad \cdot \log(Z - ia) - (Z + ia)^2 (2Z - ia) \\ &\quad \cdot \log(Z + ia)] C_1/6 \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{16}(Z) &= Z f_{15}(Z) + [2 Z^4 \log Z - 3 a^2 Z^2 - 7 a^4/6 \\ &\quad - (Z - ia)^3 (Z + ia) \log(Z - ia) \\ &\quad - (Z + ia)^3 (Z - ia) \log(Z + ia)] (C_1 + C_2)/12 \\ &\quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

この場合の y 軸に沿う応力は次のようになる。

$$\tau_{xy1}(\varepsilon, y) = -0.5 g_2(y, a) \text{sign}(\varepsilon) \dots\dots\dots(17)$$

以上の結果より目的とする関数、すなわち亀裂面に垂直な分布外力 $p_1(y)$ のみを作用させて $g_1(y, a)$ に比例した開口を生じさせる応力関数 $f_1(x, y, a)$ は

$$f_1(x, y, a) = f_{11}(x, y, a) - 6 \nu f_{12}(x, y, a) \dots\dots(18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x1}(y) &= -3(1 - \nu^2) [2 y^2 \log |y| + a^2 \\ &\quad - y(y - a) \log |y - a| - y(y + a) \\ &\quad \cdot \log |y + a|] / 2\pi \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

となる。本文ではこの応力関数を要素亀裂Iと仮称することにする。煩雑な式の誘導は割愛したが、この関数による変位と応力が亀裂の周辺で実際にどのようなかを示す。

$2a = 2m$ 、の亀裂をもち開口のために開口部に分布外力（絶対最大値を $\sigma_0 = -1 \text{ kN}$ 、とする）を受けている板を想定してポアソン比を $\nu = 0.3$ として計算して $x, y < 4m$ 、の範囲に対する変位 u, v 、応力 σ_x, τ_{xy} を（ τ_{xy} は xy 軸に関して逆対称であり煩雑になるので1/4領域のみを示す。それぞれの曲面が不合理な点をもたず目的とした状態を表現していることが推察できればよいので、縦軸は下向きを正とするが目盛りは省略している。図-7では $g_1(y, a)$ に比例した開口が生じていることが納得できよう。図-8は変位 v は連続していることと y 軸に関して対称であることを示している。図-9は σ_x の分布を示すが y 軸に沿う σ_x は図-3(2)に示すものと同じ曲線（下向きが正）であり、亀裂上の σ_x は開口させるための面内分布外力 $p_1(y)$ を表わしている。原点近傍では開口させるために外力は圧縮力である。この外力が亀裂先端近傍で正となっているのは開口を滑らかに閉じ合わせるためには亀裂開口部分からすでに引張りになる必要があることを示すものである。Dugdale⁴⁾の解でも σ_{vd} は開口部分内で生じているので先端部の引張りは不合理なものではない。図-10は亀裂部分のせん

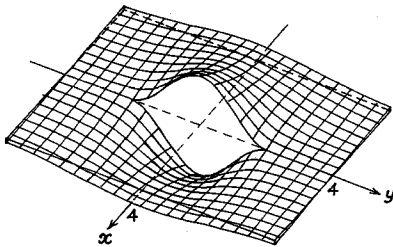


図-7 x方向の変位 u の分布

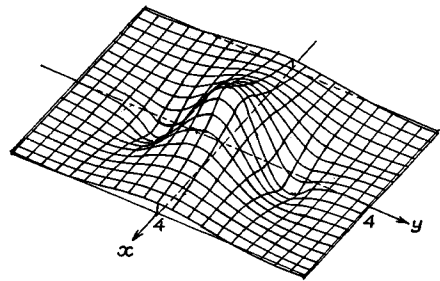


図-9 σ_x の分布

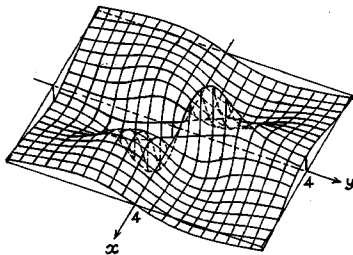


図-8 y方向の変位 v の分布

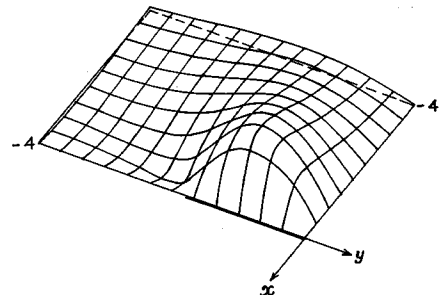


図-10 τ_{xy} の分布

断力は $f_{12}(x, y, a)$ によって完全に消去されていることを示している。

これらの要素関数は応力集中の解析において実際に活用される場合には未定係数を乗じて重ね合わされるので、関数の形状は重要であるが、全体にどのような係数を乗じてあってもよい。

4. 要素亀裂Ⅱの応力関数 (モードⅡ)

モードⅠの場合に対応させてせん断方向の食違いを与える応力関数 (モードⅡ) を導こう (図-11 参照)。この場合は亀裂部分の開口用の分布外力もせん断方向を向いていて面に垂直な成分はないものとする。y 軸上の亀裂部分で変位 v が $g_1(y, a)$ に比例した食違いを生じて変位 u と応力が連続しているような状態を表わす応力関数は式(7)を実際に積分することによって得られる。

$$f_{21}(x, y, a) = R_e [\bar{Z} f_{23}(Z) + f_{24}(Z)] \dots\dots\dots (20)$$

$$f_{23}(Z) = iC_1 [4 Z^3 \log Z - 4 a^2 Z - (2Z + ia)(Z - ia)^2 \log(Z - ia) - (2Z - ia)(Z + ia)^2 \log(Z + ia)] \dots\dots\dots (21)$$

$$f_{24}(Z) = i [5(C_1 - C_2) Z' \log Z - (11 C_1 - 3 C_2) a^2 Z^2 / 2 - (31 C_1 - 7 C_2) a^4 / 12 - (C_1 - C_2)(Z^2 + a^2) / 2 + C_1 Z (2Z + ia)(Z - ia)^2 \log(Z - ia) - (C_1 - C_2)(Z^2 + a^2) / 2 + C_1 Z (2Z - ia)(Z + ia)^2 \log(Z + ia)] \dots\dots\dots (22)$$

$$f_{21}(x, y, a) \text{ による } y \text{ 軸に沿う開口変位 } v \text{ は, } v(\epsilon, y) = -0.5 g_1(y, a) \text{sign}(\epsilon) / G \dots\dots\dots (23)$$

となって条件を満足するが、亀裂部分に沿って $\sigma_x(\epsilon, y) = 3 g_2(y, a) \text{sign}(\epsilon) \dots\dots\dots (24)$

という面に垂直な応力が現われる。これは開口の両面で符号が異なるために同方向の分布外力に相当していて、モードⅠの場合のせん断力と同様に消去するための応力関数 $f_{22}(x, y, a)$ が必要になる。原点に面内集中力 P が作用する場合の応力関数 $f(x, y)$ と重み関数 $g_2(y, a)$ との合成積をとると $g_2(y, a)$ という分布面内力が亀裂部分に作用している状態が実現する。

$$f_{22}(x, y, a) = \int_{y-a}^{y+a} f(\eta, x) g_2(\eta - y, a) d\eta$$

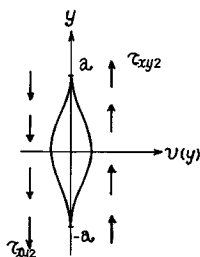


図-11 せん断方向 (モードⅡ) の要素亀裂

$$= R_e [\bar{Z} f_{25}(Z) + f_{26}(Z)] \dots\dots\dots (25)$$

$$f_{25}(Z) = -iC_1 [4 Z^3 \log Z - 4 a^2 Z - (Z - ia)^2 (2Z + ia) \log(Z - ia) - (Z + ia)^2 (2Z - ia) \log(Z + ia)] / 6 \dots\dots\dots (26)$$

$$f_{26}(Z) = -i [2(3 C_1 + C_2) Z' \log Z - (5 C_1 + 3 C_2) a^2 Z^2 + 7(C_1 - C_2) a^4 / 6 - (Z - ia)^2 \{ 2 C_1 Z (2Z + ia) - (C_1 - C_2)(Z^2 + a^2) \} \cdot \log(Z - ia) - (Z + ia)^2 \{ 2 C_1 Z (2Z - ia) - (C_1 - C_2)(Z^2 + a^2) \} \log(Z + ia)] / 12 \dots\dots\dots (27)$$

この $f_{22}(x, y, a)$ による y 軸上の応力は $\sigma_{x2}(\epsilon, y) = 0.5 g_2(y, a) \text{sign}(\epsilon) \dots\dots\dots (28)$

となる。以上より目的とする関数、すなわち亀裂面に平行な分布面内力のみを作用させて $g_1(y, a)$ に比例したモードⅡ方式の開口を与える応力関数 $f_2(x, y, a)$ は $f_2(x, y, a) = f_{21}(x, y, a) - 6 f_{22}(x, y, a) \dots\dots\dots (29)$

であり、y 軸に沿う応力 τ_{xy} (亀裂上では外力) は $\tau_{xy2}(y) = 3(1 + \nu) \{ 2 y^2 \log |y| + a^2 - y(y - a) \log |y - a| - y(y + a) \cdot \log |y + a| \} / \pi \dots\dots\dots (30)$

となる。本文ではこの応力関数を要素亀裂Ⅱと仮称することにする。この関数による変位と応力を亀裂の周辺で図化すると、要素亀裂Ⅰの場合の $u, v, \sigma_x, \tau_{xy}$ はそれぞれ要素亀裂Ⅱの場合の $v, u, \tau_{xy}, \sigma_x$ とほとんど同じような曲面となり目的が達せられていることが判明する。したがって本文では図示しないことにする。

5. 実際の亀裂の解析方法

ここに導いた要素亀裂Ⅰ, Ⅱは、複素関数の特異点の特性を活用して亀裂の不連続な変位を構成しているが、開口部の応力は0ではないのでこのままでは実際の亀裂部分を表現し得ない。したがって要素亀裂の長さ $2a$ をいろいろ変えた要素関数を平行移動させつつ数多く重ねて実際の亀裂 (1本あるいは複数の亀裂で交差したり接近したりする) の開口部を表現し (覆い尽くし) て、同時に実際の亀裂の開口部の応力を0へ収束させるという数値解析法が考えられよう。この場合の大きな特徴は応力集中は有限で滑らかなことである。境界条件を満足させる基本的な数値解析法は選点法であるから詳しく述べる必要はないであろう。著者らはすでに交差する複数の亀裂をもつ板の曲げ問題の解析方法について報告しているが¹⁶⁾、曲げ問題と本文の面内力問題とは要素関数が異なるだけで重ね合わせて実際の亀裂を数値解析する方法には基本的な相違はないので詳しくは述べないことにする。

亀裂問題の有限要素法による解析例については文献12), 13) に詳しく述べられているが, 亀裂先端の無限大の応力集中を表すために Pian¹¹⁾は Westergaard の解の特異項をハイブリッド法の特異関数として用いている. 有限な曲率の亀裂先端の形 (図-4 参照) については文献13) にも紹介されている. これらの諸研究の手法に従って本研究の要素亀裂関数の活用方法を推察すると, その1つは要素亀裂 I, II の亀裂先端近傍の応力集中の大きな部分を有限要素法のハイブリッド法の変位関数として活用することであろう. 同様に境界要素法の要素関数とすることも可能であろう. この要素関数は無限遠方で応力は0に収束する特性をもつので, 半無限板の自由辺近傍の亀裂の問題を解析するためにいくら重ね合わせても無限遠方の境界条件を乱すことはない. これは3角関数と指数関数とで表わされる一般の重調和関数を重ねて選点法で解く場合よりは好都合な場合が期待されよう.

6. 計算例

簡単な計算例によって亀裂の応力解放 (=0) 部分の閉じ合わせ誤差の様子を示そう. 図-12 に示すような直線状の亀裂1本をもつ無限板の1方向引張りを対象とする (平均応力 $\sigma_x = \sigma_0$, モード I). 本解法の特長より開口部の応力や変位は選点法で任意に拘束できるので, 次のように無拘束部分をもつものにしてみよう. すなわち, $A=1.0$ m, $B=0.25$ m として実際の亀裂の開口を全長 $=2(A+B)=2.5$ m とするが, 中心の $2A=2$ m の部分では応力を $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ とする条件を付けて両端の B の部分では変位にも応力にも何の拘束も与えないことにする (本文ではこの部分を遷移区間と仮称する). Dugdale の解でも開口変位の大きい σ_{yd} (亀裂の先端) の部分も完全な弾性領域である (σ_{yd} になるから塑性域としても支障がないだけである). 著者らの要素亀裂関数もすべて弾性範囲内であるから, たとえどのように重ね合わせて Dugdale 方式の σ_{yd} を形成しても, どのような変位を構成しても生じる応力集中は有限で滑らかなものである (関数の特性より無限大の勾配で立ち上がる

部分は構成し得ない). したがって B の部分を無拘束にするのは興味あることであろう.

① 要素亀裂 I の基本長さ a (開口長さは $2a$) と開口の中心とがそれぞれ異なるものをいくつか用意して未定係数 c_j を乗じつつ重ね合わせる.

② この重ね合わせの要領は, それぞれ長さが異なる要素亀裂の開口部が何重か重なり合って長さ 2.5 m の実際の亀裂の開口部を覆うようにする. 要素亀裂の配置の一例を図-13 に略記する. 開口部の左側の直線群は要素亀裂の長さを中心位置を表わしているもので重ねる要素数は $N=21$ の場合である.

③ 未定係数 c_j は y 軸上の開口部の区間 $(-A, A)$ における応力 σ_x と, τ_{xy} が $-\sigma_0, 0$ へ収束するように選点法, あるいは最小二乗法を用いて決定する.

④ 以上の結果に, 亀裂を含まない無限板に一樣引張り $\sigma_x = \sigma_0$ が作用している応力状態を重ね合わせる (直線状の長さ $2(A+B)$ の亀裂をもつ板の開口部にも一樣の引張り外力が作用している応力状態とみなしてもよい). これによって開口部の区間 $(-A, A)$ の $\sigma_x = 0$ が満足される.

ここに示す例では $a=B=0.25$ より $a=0.45$ として, 要素亀裂の中心点は $2A$ の区間を等分割するように要素の開口部の重なりが多くなるように, さらに亀裂の先端

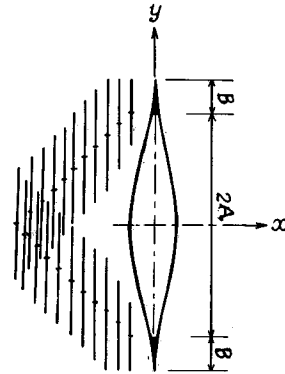


図-13 要素亀裂による実際の亀裂の覆い方

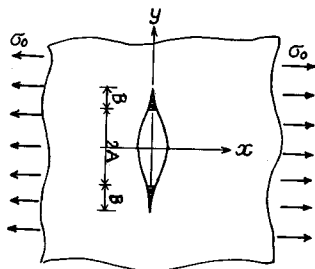


図-12 無限板の一樣引張りの計算例

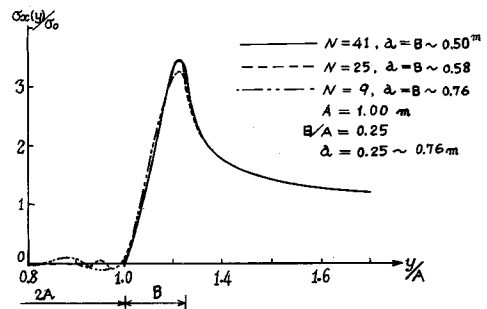


図-14 y 軸上の応力 σ_x の分布

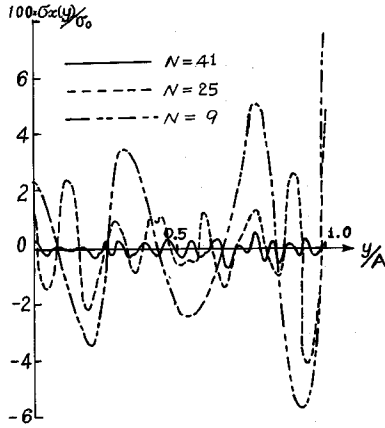


図-15 応力解放部 (2A) の閉じ合わせ誤差と要素数 N

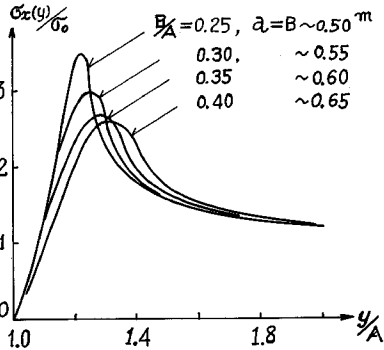


図-16 遷移区間の長さとの応力集中

では3本の要素亀裂の先端がそろそろように配慮している。図-14は実際の亀裂を表わす要素亀裂の数 N を変化させて $N=9\sim 41$ とする場合の亀裂線上の応力集中の様子を示している。2Aの区間で応力=0を近似的に成立させるような選点法ではなく、次のようにして閉じ合わせ誤差の最小化を図った。すなわち数式による積分によらず、隣接する要素亀裂の中心間隔をそれぞれ4等分して数値積分する方法で最小二乗法を用いた。

ここに得られた非常に興味ある結論は「無拘束の遷移区間(プロセス・ゾーン)で応力が滑らかに立ち上がり最大値を生じる」ということである。図-15はAの区間の σ_x の誤差を拡大したものである。要素数の増加とともに誤差は確実に収束していくことが納得できよう。図-16はB/Aの比率を変えることによって応力集中が変化の様子を示している。

本解析法は亀裂現象の物性論に立脚したものではないのでこのような結果から亀裂とその応力集中を直接論じることができないが、実験結果を数値解析によって検討する場合には有力な手法の1つであると判断されよう。

7. 結 語

ここに示した要素亀裂関数は、板の曲げの場合と同様に複数の亀裂が互いに接近したり交差している場合の数値解析に適した関数であると思われる。

要素亀裂関数による近似解析の結果はどのようなエネルギー解放率 J を与えるかということについては紙面の都合で次回に譲るが、従来の亀裂の解析法における値と大差がないことが著者らによって導かれている¹⁹⁾。

あくまでも数学的な過程として、亀裂先端の応力集中の解析方法を複素関数の特異点という観点よりまとめてみよう。これによって本研究の位置付けが明確になろう。

(1) Westergaardの解では亀裂先端は代数分岐の特異点である。特異点を2周すると応力も変位も元へ戻って母材が連続するが、2周目は陰に隠れているので(通俗な表現であるが)亀裂の両面は互いに連結せずに不連続な変位が現われて応力も必要に応じて0以外の値を任意にとり得るのである。しかし分岐の特性から特異点では応力は無限大になる。

(2) これを一般の有限要素法で近似するには先端部の要素の大きさを0へ近づけることになる。特異関数を用いたハイブリッド法によれば有限の要素で無限大の応力を実現できるが、これはWestergaardの解を併用することに相当する。

(3) Dugdaleの解は対数分岐であり、特異点を何周しても元へ戻らないが応力も変位も有限なものを構成できる点の特徴である。1周して亀裂の両面で応力が σ_{yd} となるように応力のみ条件を付けた形であり、母材は結合していないので大きな変位が現われる(互いに裏側の陰の部分からせり出して来る)。この解ではいかに小さな平均応力でも σ_{yd} が現われるので重ね合わせる解析法を併用できない。

(4) 本研究の要素亀裂関数は同じく対数分岐であり変位が $g_1(y, a)$ の食違いになる(裏側からせり出させる)ように条件を付けたものである。上記の計算例における遷移区間 B は、2Aの区間で応力を任意(この例では0)に拘束しつつ B では変位は自由にせり出してくることを認めたものと解釈できよう。結果として滑らかな応力となったのである。Bの区間で応力を拘束することも容易であることと、応力集中は平均応力に比例するので重ね合わせ法を併用できることが特徴である。

(5) 有限要素法で計算例のような結果を得るには遷移区間にばねあるいは幅が無限小の要素を挿入して連結することになる(せり出しでない)が、この場合には挿入材を実際の亀裂部分の材料の物理的特性に合わせて自由に決定できる。ただしその剛性の決定が問題になり、

変位のせり出しを任意にするという方式とは異なっている。

それぞれの解法はこのような特性をもつので目的に応じて活用するならばその真価が有効に発揮されよう。

本研究の解析法によって有限な応力集中を解析的に表現し得るとしても、遷移区間の長さ B をいかなる値とするかという問題は未解決である。これは有限要素法による亀裂の解析で挿入材の剛性をどのように決定するかという問題と同種類の大きな課題であることはいなめない。

本研究の数値解析における基礎的な検討では、石坂豊（日水コン）、水尾和久（態谷組）両氏に多大なご尽力を頂いた。ここに深甚な敬意を表します。

参 考 文 献

- 1) Griffith, A. A. : The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Series A, Vol. 22, 1, pp.163~168, 1920.
- 2) Westergaard, H. M. : Bearing Pressure and Cracks, J. of Applied Mechanics, Transactions of ASME, Vol. 33, A, pp. 49~53, 1939.
- 3) Irwin, G. R. : Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plates, J. of Applied Mechanics, Trans. of ASME, pp.361~364, 1957.
- 4) Dugdale, D. S. : Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. of the Mechanics Physics of Solids, Vol. 8, pp.100~104, 1960.
- 5) Rice, J. R. : A Path Independent Integral and the Appropriate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, J. of Applied Mechanics, Trans. of ASME, pp. 379~386, 1968.
- 6) Barenblatt, G. I. : The Formation of Equilibrium Cracks During Brittle Fracture, General Ideas and Hypotheses, Axially-Symmetric Cracks, PMM Vol. 23, No. 3, pp. 622~636, 1959 (USSR).
- 7) Wecharatana, M. and Shah, S. P. : A Model for Predicting Fracture Resistance of Fiber Reinforced Concrete, Cement and Concrete Research, Vol. 13, pp. 819~829, 1983.
- 8) Visalvanich, K. and Naaman, A. E. : Fracture Model for Fiber Reinforced Concrete, ACI Journal, March-April, pp.128~139, 1983.
- 9) Cho, K. Z., Kobayashi, A. S., Hawkins, N. M., Baker, D. B. and Jeang, F. L. : Fracture Process Zone of Concrete Cracks, No. 8, Aug., ASCE, pp.1174~1184, 1984.
- 10) Reinhardt, H. W. : Crack Softening Zone in Plain Concrete under Static Loading, Cement and Concrete Research, Vol. 15, pp.42~52, 1985.
- 11) Pain, T. H. H., Tung, P. and Luck, C. : Elastic Crack Analysis by a Finite Element Hybrid Method, Proc. of 3rd Air Force Conf. on Matrix Methods in Struct. Mechanics, Dayton, Ohio, Oct. 1971.
- 12) 鷲津久一郎, ほか 4 名 : 有限要素法ハンドブック, I, 培風館, pp.416~430, 1981.
- 13) 鷲津久一郎, ほか 4 名 : 有限要素法ハンドブック, II, 培風館, pp.305~422, 1981.
- 14) 倉西正嗣 : 弾性学, 国際理工学社, pp.332, 1949.
- 15) 岡村弘之 : 線型破壊力学入門, 培風館, 1976.
- 16) 堀 晃芳・段 樹金・中川建治 : 亀裂を持つ板の曲げ問題の解析に適した特異関数, 土木学会論文報告集, No. 374/I-6, pp.349~357, 1986.
- 17) 段 樹金・児島弘行・中川建治 : 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文報告集, No. 374/I-6, pp.399~407, 1986.
- 18) 白鳥正樹, ほか : 数値破壊力学, 実教出版社, pp.73~74, 1980.
- 19) 藤井康寿・矢崎博芳・中川建治 : クラックの先端で有限な応力集中を与える応力関数の J 積分について, 土木学会年次学術講演会予稿集, 第 41 回, I-251, pp.501~502, 1987.

(1987. 1. 19・受付)