

視覚的表現による非集計ロジットモデルの効用関数形の決定方法

GRAPHICAL METHOD FOR DETERMINING FORMS OF UTILITY FUNCTIONS OF DISAGGREGATE LOGIT MODELS

富田安夫*・林 良嗣**・奥田隆明***

By Yasuo TOMITA, Yoshitsugu HAYASHI and Takaaki OKUDA

This paper introduces a procedure for plotting partial residuals for multinomial logit models. This provides a method for graphical determination of utility functions of disaggregate logit models which offers significant advantages over the established "black box" method. An empirical example is developed in the context of revealed dwelling type choices in the Nagoya metropolitan area which shows the usefulness of the method.

Keywords: partial residual, disaggregate logit model, graphical method

1. はしがき

非集計ロジットモデルは、行動主体の選好や制約条件等、従来の集計的なモデルでは扱いきれないような要因を考慮できることから、交通および土地利用等の分野への多くの応用がなされるようになってきている。

このような非集計ロジットモデルへのニーズに対して、モデルの推定のための計算機プログラムパッケージも整備されてきている。しかしながら、それらは、モデルに含まれる効用関数の関数形を仮定した場合に、そのパラメーターを求めるためのものであり、データにフィットする関数形を見つけ出すシステムティックな方法は確立されていない。すなわち、従来では、効用関数形として、たとえば、線形関数、対数線形関数、CES関数などをアプリアリに与え、モデルの推定後に統計的に検討することにより、その適否を判定する方法を用いるのが常である¹⁾。このように、関数形のデータへの適合性を視覚的に確認することなく、ブラックボックスの

まま関数形を適合させている。

こうした状況は、非集計ロジットモデルの場合、モデル式自体がすでに非線形関数であること、また、被説明変数が離散的な確率変数であることから、通常の線形回帰モデルの場合のように容易に観測データを図上にプロットし、効用関数形を視覚的に決定することができないことに主たる原因があると考えられる。

しかし、近年、統計学の分野において、特別な二項ロジットモデルに限定すれば、効用関数の残差の定式化がなされ、これを用いた効用関数のグラフ化の方法^{2),3)}が提案されている。

本研究では、この方法を応用して、一般の非集計多項ロジットモデルにも適用できる効用関数のグラフ化の方法を開発し、これを実際に都市圏における住宅タイプ選択モデルの推定へ適用した結果、本方法の有効性が確かめられたので、ここに報告するものである。

2. 非集計ロジットモデルの効用関数の視覚的表現方法

(1) 手順の概要

本章では、以下の手順に従って非集計ロジットモデルの効用関数の残差を定式化し、こうして求められる残差の推定値をプロットして、効用関数をグラフ化する方法

* 正会員 工修 (財) 計量計画研究所 研究員
(〒162 新宿区市ヶ谷本村町2-9)

** 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科
(〒464 名古屋市中区千種区不老町)

*** 学生会員 名古屋大学大学院 工学研究科 (同上)

を示す。

① 非集計ロジットモデルのモデル式を変形し、効用関数を導く。

② 効用関数を線形式で近似した場合の残差を定式化する。

③ 観測値に基づく残差の推定式を求める。

④ 残差の推定値をプロットすることにより、効用関数をグラフ化する。

本研究の特徴は以上の手順において、従来、二項ロジットモデルに限定されていたもの²⁾を、次に示すように多項ロジットモデルに拡張しているところにある。以下に、各手順の内容を示す。

(2) モデル式の誘導

個人 n が m 個の選択肢の中から選択肢 i ($i=1, \dots, m$) を選択する確率 P_{in} は次式のように表わされるものとする。

$$P_{in} = \exp V_{in} / (\exp V_{i1} + \dots + \exp V_{im}) \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 P_{in} : 個人 n が選択肢 i を選択する確率

V_{in} : 個人 n にとっての選択肢 i の効用のうち観測可能な部分

また、個人 n の選択結果は、個人 n が選択肢 i を選択した場合 $Y_{in}=1$ 、それ以外の場合には、 $Y_{in}=0$ と表わされるものとする。

まず、式 (1) を効用関数 V_{in} ($i=1, \dots, m$) について整理するために、個人 n が選択肢 i 以外を選択する確率を式 (2) のように表わし、

$$1 - P_{in} = \sum_{j \neq i} \exp V_{jn} / (\exp V_{i1} + \dots + \exp V_{im}) \dots \dots \dots (2)$$

式 (1) を式 (2) で割り、両辺とも対数をとれば、次式のように変形できる。

$$\ln \{P_{in} / (1 - P_{in})\} = V_{in} - \ln \left(\sum_{j \neq i} \exp V_{jn} \right) \dots \dots \dots (3)$$

いま、便宜上、効用関数 V_{in} は、着目する変数 X に基づく効用 $g(X)$ と、それ以外の効用 V'_{in} によって表わされるものとするれば、

$$\ln \{P_{in} / (1 - P_{in})\} = g(X) + V'_{in} - \ln \left(\sum_{j \neq i} \exp V_{jn} \right) \dots \dots \dots (4)$$

となる。

(3) 線形効用関数の場合の残差

次に、効用関数 $g(X)$ を線形関数 θX (θ : パラメーター) で近似したとき、選択確率 P_{in} がその近似値 P'_{in} として表わされるものとするれば、式 (4) は次式のようになる。

$$\ln \{P'_{in} / (1 - P'_{in})\} = \theta X + V'_{in} - \ln \left(\sum_{j \neq i} \exp V_{jn} \right) \dots \dots \dots (5)$$

したがって、効用関数 $g(X)$ を線形関数 θX で近似したことによる残差 $r(X)$ は、式 (4) から式 (5) を差し引くことにより次式となる。

$$r(X) = g(X) - \theta X = \ln(Z) \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 $Z = P_{in}(1 - P'_{in}) / P'_{in}(1 - P_{in})$

式 (6) をさらに簡単にするために、 $\ln(Z)$ を $Z=1$ でテーラー展開し、その一次式により線形近似すれば次式となる^{注1)}。

$$r(X) \doteq P_{in}(1 - P'_{in}) / P'_{in}(1 - P_{in}) - 1 = (P_{in} - P'_{in}) / P'_{in}(1 - P_{in}) \dots \dots \dots (7)$$

(4) 観測値に基づく残差の推定

ここでは、式 (7) の残差 $r(X)$ を観測値に基づいて推定する。式 (7) の P_{in} は個人 n が選択肢 i を選択する確率であり、これは観測できないため、 P_{in} としては個人 n の選択結果 Y_{in} ($=0$ or 1) を代入することにより、式 (8) に示すような残差 $r(X)$ の近似値 $r'(X)$ を求める。

$$r'(X) = (Y_{in} - P'_{in}) / P'_{in}(1 - P'_{in}) \dots \dots \dots (8)$$

ただし、式 (7) の分母の $(1 - P_{in})$ としては、分母がゼロとなることを避けるため、その近似値として $(1 - P'_{in})$ を用いている。

ところで、このようにして求められる $r'(X)$ の期待値 $E(r'(X))$ をとると、これが残差 $r(X)$ と一致する。すなわち、

$$E(r'(X)) = E \{ (Y_{in} - P'_{in}) / P'_{in}(1 - P'_{in}) \} = (E(Y_{in}) - P'_{in}) / P'_{in}(1 - P'_{in}) \dots \dots \dots (9)$$

ここで、個人 n の選択結果 Y_{in} の期待値 $E(Y_{in})$ は、 P_{in} の不偏推定値であることは明らかであるため、式 (9) は

$$E(r'(X)) = (P_{in} - P'_{in}) / P'_{in}(1 - P'_{in}) \dots \dots \dots (10)$$

となる。式 (7) と式 (10) を比較すれば、 $P_{in} \doteq P'_{in}$ であることより、 $r(X) \doteq E(r'(X))$ となる^{注2)}。

(5) 効用関数のグラフ化

以上より、個人 n の選択結果 Y_{in} を用いて求められる残差の近似値 $r'(X)$ の期待値 $E(r'(X))$ は、残差 $r(X)$ と一致する。したがって、効用関数 $g(X)$ のグラフとしては、線形関数 θX に残差 $E(r'(X))$ を加えた $g(X) = \theta X + E(r'(X))$ を描けばよいことになる。

以上の手順においては、効用関数の近似式として線形関数を用いているが、他の関数形を用いることも可能である。よって、仮定した効用関数を逐次改善することによって真の効用関数に近づけることができる。

なお、上記の手順では、効用関数の1変数に着目して

注1) P'_{in} は P_{in} の近似値であることから、 $Z \doteq 1.0$ となる。よって $\ln(Z)$ を $Z=1.0$ でテーラー展開し、一次式により近似することが可能であり、 $\ln(Z) \doteq Z-1$ となる。

注2) 後述するように、効用関数の近似式を逐次改善することが可能であり、 P'_{in} を P_{in} に次第に近づけることができる。これによって、 $E(r'(X))$ の $r(X)$ に対する近似の程度も上昇させることができる。

いるが、ロジットモデルの推定においては、変数間の独立性が成立するものと仮定されていることから、他の変数についても同様にそれぞれの効用関数形を定めることができる。

3. 非集計ロジットモデルの効用関数形の決定手順とその有効性の検討

本章では、以上の考え方に基づいた非集計ロジットモデルの効用関数形の決定手順を示すとともに、これを実際に多項ロジットモデルの推定に適用することにより、本方法の有効性について検討する。

ここでは、多項ロジットモデルの適用例として、林・富田⁹⁾による住宅タイプ選択モデルを簡略化して用いている。このモデルは、世帯の住宅タイプ選択行動を多項ロジットモデルを用いてモデル化したものである。すなわち、住宅タイプ*i*の観測される効用が V_i のとき、住宅タイプ*i*の選択確率 P_i は次式となる。

$$P_i = \exp V_i / \sum_j \exp V_j \dots\dots\dots (11)$$

ここで、住宅タイプ*i*としては、①持家・戸建、②持家・中高層、③借家・戸建、④借家・中高層の4タイプとし、また、効用関数 $V (= \sum_i \theta_i X_i)$ の説明変数としては、 X_1 : 年齢(才)、 X_2 : 年間住宅支出/年収(万円/万円)、 X_3 : 住宅の広さ/世帯人員(畳数/人)を用いている。

なお、データとしては昭和53年建設省住宅需要実態調査のうち名古屋都市圏の住み替え世帯のデータ(サンプル数692)を用いる。

以下、4つのステップに従って、モデルの効用関数形の逐次改善を図る。

step-1 線形効用関数を用いたパラメーター推定

step-1では、効用関数として線形関数を仮定して、最尤推定法によりパラメーターを推定する。

その結果、各住宅タイプ*i*ごとに効用関数が得られたが、ここでは、持家・戸建を例として推定結果を示す。

$$V_1 = 0.034 X_1 - 3.79 X_2 + 0.181 X_3 + 1.376 \dots\dots (12)$$

(2.74) (4.34) (5.25) (2.53)

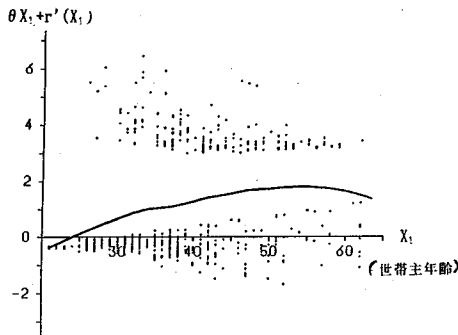


図-1 残差プロットと効用関数のグラフ化(1)

尤度比=0.271, 的中率=48%, ()内:t値
step-2 残差の推定およびプロット

step-2では、step-1で推定されたモデルにより算定される世帯*n*の住宅タイプ*i*に対する選択確率 P_{in} と、実際に住宅タイプ*i*を選択した結果 Y_{in} とを式(8)に代入し、残差 $r'(X)$ を求め、これを点($X, \theta X + r'(X)$)としてXY座標上にプロットする。

図-1は、持家・戸建の効用関数 V_1 における変数 X_1 (=年齢)について、この点をプロットしたものである。これを見ると、プロットした点が大きく上下の2つのグループに分かれている。これは、 $r'(X)$ の算定において、選択結果 Y_{in} の値は0あるいは1であり、それが選択確率 P_{in} に対して過大であったり過小であったりするためである。

step-3 効用関数のグラフ化

step-3では、step-2でプロットした残差の近似値 $r'(X)$ の期待値 $E(r'(X))$ をグラフ上で求め、各*X*について点($X, \theta X + E(r'(X))$)を結びグラフ化する。このグラフは、2.で述べたように、線形関数に残差分を加えたものであり、効用関数 $g(X)$ を表わしている。

図-1中の実線は、これを描いたものである^{注3)}。これ

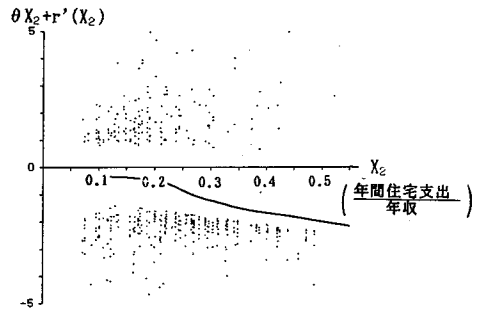


図-2 残差プロットと効用関数のグラフ化(2)

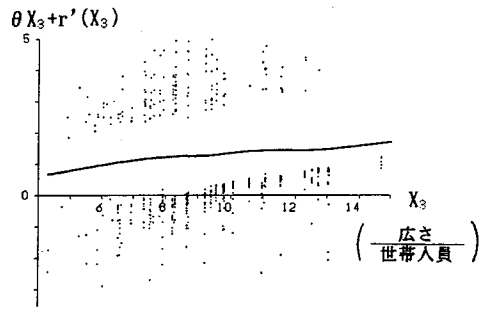


図-3 残差プロットと効用関数のグラフ化(3)

注3) 期待値の算定区間の設定によってグラフ形状は異なるが、ここでは、変数に対する効用値の全体的傾向、すなわち、グラフ形状の滑らかさを損なわない限りにおいて、区間を狭く設定している。図-1のグラフでは、年齢*X*の期待値の算定区間を±5才とした。

をみると、効用関数は必ずしも線形関数とはいえず、変数 X_1 の増大に従って 55 才までは増加しており、55 才以降やや減少傾向を示している。

step-4 効用関数形の決定と再推定

最後のステップでは、図-1 のグラフの性質を比較的良好に説明できる関数形を視覚的に判断し、この関数形を用いて再びパラメーターを推定する。ここでは、図-1 のグラフを表わす関数形として $X_1=55$ を軸とする二次関数を用いた。

なお、図-2、図-3 は、変数 X_2, X_3 について、変数 X_1 と同様に、(step-2) および (step-3) を行った結果である。これの視覚的な判断の結果、変数 X_2 の関数形としては、 X_2 が 0.2 以下において定数であり、0.2 以上において一次関数となる関数形を用い、また、変数 X_3 の関数形としては一次関数を用いることとする。

以上の関数形を用いて再推定した結果、次式を得た。

$$V_i = -0.003((X_1)^2/2 - 55 X_1) - 4.176(X_2 - 0.2)\delta \quad (3.86) \quad (2.97)$$

$$+ 0.125 X_3 - 0.965 \dots\dots\dots (13) \quad (4.46) \quad (2.03)$$

ここで、 $\delta = 0 (X_2 \leq 0.2 \text{ のとき}), 1 (X_2 > 0.2 \text{ のとき})$

尤度比 = 0.283, 的中率 = 52%, () 内: t 値

これをみると、効用関数を線形関数から非線形関数に修正することにより尤度比・的中率はともに上昇した。特に、的中率を持家・戸建の選択世帯についてみると、49% から 57% へ上昇している。また、非線形とした変数 X_1, X_2 の係数の t 値が有意なことからも、効用関数形を修正することにより、モデルの適合度は上昇したものと判定できる。

さらに、効用関数形を非線形に修正したことによる持家・戸建の選択確率 P_1 への影響をみるために、平均的

な世帯(世帯人員 3 人, 世帯年収 350 万円(S. 53 年価格))を想定し、 X_1 に対する持家・戸建の選択確率 P_1 を表わすと、図-4 の実線のようになった。これと破線で示される線形関数の場合とを比較すると、非線形の場合、30 才から 50 才にかけて急激に選択確率が上昇し、50 才以降はほぼ一定であり、線形の場合に比べて現実の傾向をよく表わしているといえる。

4. ま と め

本研究において、一般の非集計多項ロジットモデルにも適用できる効用関数の視覚的表現の方法を示し、これを名古屋都市圏における住宅タイプ選択モデルの推定に適用し、本方法が有効であることを示した。

本方法の最も大きな特徴は、視覚的に非集計多項ロジットモデルの効用関数の関数形が確かめられることであり、このことにより、以下のようないくつかの特徴も有することとなる。

(1) 効用関数として、線形関数、対数線形関数、CES 関数等の関数形を用いることの妥当性を視覚的に確認できる。

(2) 効用関数形を視覚的に決定できるため、従来のように複数の効用関数形について試行錯誤的にモデルを推定することなく、効率的に適合度の高い関数形を選択できる。

(3) 従来においては、連続変量でありながらカテゴリ変数として扱われていたような変数についても、連続変数として表現できるため、モデルの感度が上昇する。また、変数の数も減少を図ることができる。

(4) グラフ上にプロットされた残差により、特異データのチェックを効率的に行うことができる。

最後に、名古屋大学の河上省吾教授および本論文の査読者の方々から、貴重なご意見を頂いた。ここに記して感謝の意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) 森杉壽芳：非集計モデルの推定と検定，土木計画学講習会テキスト，Vol. 15, pp. 44 ~ 46, 1984.
- 2) Landwehr, J. M. et al. : Graphical Methods for Assessing Logistic Regression Models, Journal of the American Statistical Association, Vol. 79, pp. 61 ~ 83, 1984.
- 3) William, S. C. : Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots, Journal of the American Statistical Association, Vol. 74, pp. 829 ~ 836, 1979.
- 4) 林 良嗣・富田安夫：住み替え潜在需要・顕在化・住宅タイプ選択・居住ゾーン選択のプロセスを組み込んだ住宅需要・立地分析モデル，土木計画学研究・講演集，No. 10, pp. 259 ~ 266, 1987.

(1988. 3. 8・受付)

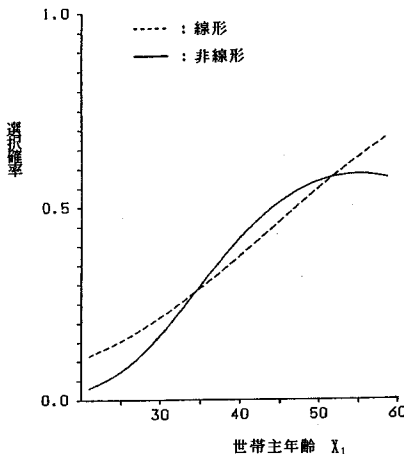


図-4 選択確率に及ぼす効用関数形の違いの影響

土木学会論文集（第6部門）購読のお願い

論文集第6部門は昭和59年度より「新しい技術の流れに対応し、大きい割合を占める現場を担当する会員の要望に応えるべく」工事マネジメントシステム、設計・施工・補修技術、現場公害対策、建設労務、契約・積算等を対象にした土木技術者として必要な広い分野をカバーした内容を目ざして編集し、全会員に無料で配布して参りました。

その内容は、63年3月発行を例にとりますと、〔招待論文〕四全総と内需拡大、〔報告〕大島大橋上部工の設計と施工／高含水比火山灰質土による高盛土の設計・施工、〔展望〕供用4000kmを迎えた高速道路、〔写真で見る技術〕青函トンネル一調査～開業まで（カラー写真使用）をはじめ、〔投稿論文〕18編、〔報告〕2編等230ページで構成されております。

第6部門は会員の皆様のご理解とご支援により内容も充実し、ページ数もふえて参りましたので、昭和63年9月発行（VI-9）より有料（年間購読料2000円／9月・3月発行）で配布することになりました。

多くの会員の方が学会誌と同様第6部門を引きつづきご購読下さるようおすすめします。

また、論文集（第1～第5部門）を購読されていない方々もこの機会にいずれかの部門を購読下さいますようお願い致します。

購読にあたっては振替用紙に必要事項をご記入のうえご送金いただければ幸いです。

論文集購読料

第 1 部 門	4 000 円	4月・10月発行
第 2 部 門	2 000 円	5月・11月発行
第 3 部 門	2 000 円	6月・12月発行
第 4 部 門	2 000 円	7月・1月発行
第 5 部 門	2 000 円	8月・2月発行
第 6 部 門	2 000 円	9月・3月発行

▶土木学会刊行物業案内

申込先：土木学会

トンネル標準示方書（昭和61年改訂）

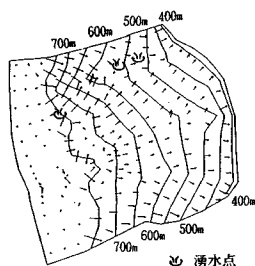
開 削 編	定価 4 800 円 会 4 000 円 下 350 円	昭和39年制定以来、技術の進展に応じて改訂や制定を行ってきたが、とくに山岳編ではNATMの概念に従った工法を標準工法に位置づけ、シールド編は各種シールドの適用性など、世界に先がけた示方書として全面改訂した。
シ ル ド 編	定価 4 800 円 会 4 000 円 下 350 円	
山 岳 編	定価 4 800 円 会 4 000 円 下 350 円	

地下水解析のことなら CRC

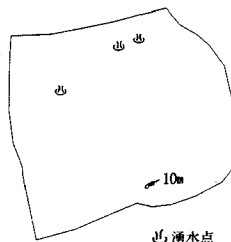
日本初!! 逆解析手法による 地下水変動解析プログラム

UNISSF

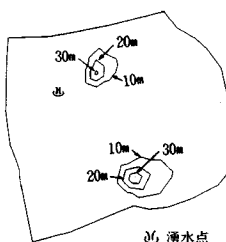
スピーディな同定・安価な解析



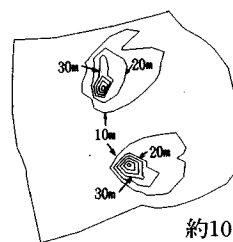
初期状態の地下水流



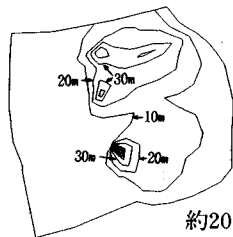
トンネル掘削開始直後



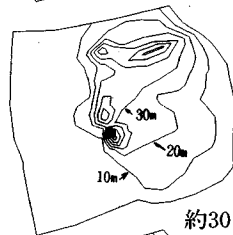
約4日後



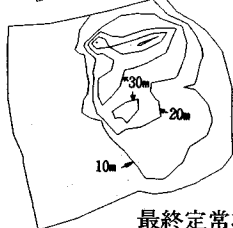
約10日後



約20日後



約30日後



最終定常状態

特長 ○有限要素法による準3次元解析を中心とした地下水の流れのトータルシステムです。

○観測水位と計算水位より、非線形最小二乗法を用いて帯水層定数の同定が可能です。(逆解析手法)

○建設・土木工事(掘削・ディープウェルその他)の解析に対応する多くの機能を備えています。

○メッシュ・ジュネレータにより、モデル(要素分割)作成の手間を軽減できます。

○図化処理プログラムにより、結果の確認が容易に行えます。

機種：FACOM-Mシリーズ, HITAC-Mシリーズ
IBM303X,308X,43XX, CRAY
NEC ACOSシリーズ, DEC VAX11 他

このシステムは、情報処理振興事業協会の委託を受けて開発したものです。

IPA 情報処理振興事業協会

CRC センチュリリサ-子センタ 株式会社

大阪市東区北久太郎町4-68
(06-241-4121) 担当:岩崎、中屋

土と水の連成逆解析プログラム (UNICOUP)

ついにペールを脱いだ! UNICOUP 新発売

CRC

今こそ、頼りがいのあるソフトを!

特長

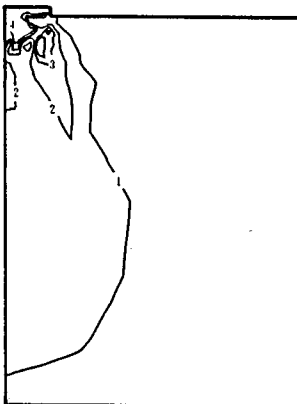
- ① 応力と地下水の流れをカップルさせた問題が解析可能です (圧密含む)
- ② 地下水の流れは飽和・不飽和域を対象としています。
- ③ 多段掘削・盛土や降雨等が扱えます。
- ④ 梁や連結要素も扱え実用的です。

- ⑤ 経時観測記録(変位・水位)があれば、非線形最小二乗法に基づき変形係数や透水係数が逆解析できます。(順解析、逆解析がスイッチにて選択可能です。)
- ⑥ 弾性・非線形弾性・弾塑性・粘弾塑性を示す地盤が扱えます。
(関口・太田モデル・カムクレイモデル使用可)

対応機種

FACOM-Mシリーズ, HITAC-Mシリーズ
IBM303X,308X,43XX, CRAY
NEC ACOSシリーズ, DEC VAX11
シグマワークステーション
(その他別途相談に応じます。)

↓ (荷重)



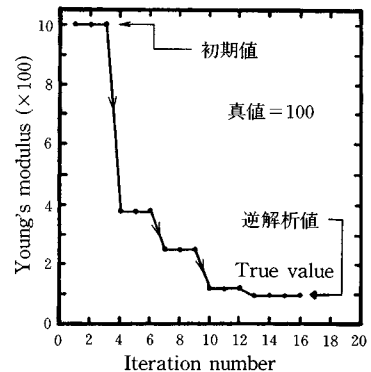
応力増分コンター(Δσv)
(10日後)



盛土(40日)後の地盤の変形



盛土(40日)後の地下水の流れと水頭
コンターおよび自由水面



ヤング率と繰り返し回数の関係

逆解析によるパラメータの推定

CRC センチュリリサーチセンタ 株式会社
IPA 情報処理振興事業協会

このシステムは、情報処理振興事業協会の委託を受けて開発したものです。

問合せ先
大阪市東区北久太郎町4-68
(06-241-4121)担当: 岩崎、今井

昭和三十七年五月二十八日 第三種郵便物認可
昭和六十三年七月十五日 印刷(毎月一回)
昭和六十三年七月二十日 発行(二十日発行)
土木学会論文集

○ 土 木 学 会 論 文 集 ○

定 価 一 五 〇 〇 円

Mr.SOILがさらに機能を充実

地盤の非線形解析ソフト

Mr. SOIL

Version-2

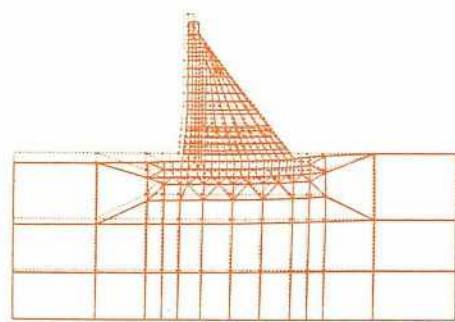
《機能》

- 弾性及び弾塑性解析が可能。
- 掘削機能、盛土機能がある。
- 地盤の不連続性や、構造物との相互作用が扱える。
- 各種要素の準備(三角形要素、四角形要素、棒要素、梁要素、JOINT要素)
- 大型モデルはそのままCRCネットワークで、メインフレーム処理が可能。
- 地震荷重、分布荷重が扱える。*
- 荷重の段階的載荷が可能。*
- 弾性解での安全率(モール・クーロン基準)評価。*
- 充実したグラフィック機能(変形図・応力ベクトル図・応力コンター図・拡大機能など)。*

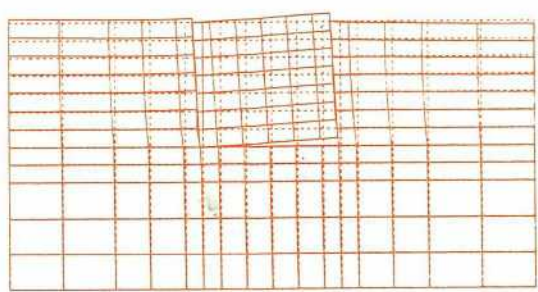
* 印はVersion-2による追加機能

販売価格：64万円 機種：NEC PC-9801シリーズ, IBM5550

150万円 機種：SONY NEWS



静水圧によるダムの解析



不連続性を考慮した地盤と構造物の解析

CRC センチュリリサーチセンター 株式会社

大阪市東区北久太郎町4-68
(06-241-4121)担当：浜口・中川