

ブール代数を用いた道路網ノード間信頼度の上・下限値の効率的算出法

AN EFFICIENT CALCULATION METHOD TO OBTAIN UPPER AND LOWER BOUNDS OF TERMINAL RELIABILITY OF ROAD NETWORKS USING BOOLEAN ALGEBRA

飯田 恭敬*・若林 拓史**

By Yasunori IIDA and Hiroshi WAKABAYASHI

This paper proposes a new method to estimate upper and lower bounds of reliability between node pairs in road networks. The conventional calculation methods using all the minimal path sets and cut sets are impractical for a large system since the path sets and cut sets include a large number of elements. The proposed method is quite useful since it requires only partial minimal path sets and cut sets. An efficient way of selection of the paths and cuts is investigated, and an algorithm for a Boolean manipulation is developed. Also a numerical example of small size network is executed to examine the validity of the method.

Keywords: road network reliability, Boolean algebra, partial minimal path sets and cut sets

1. ま え が き

道路網整備水準指標は、従来、道路延長や道路率等の量的な指標で評価されてきた。しかし、都市域の慢性的渋滞が日常化している今日、道路網の質的水準を計量化して新たな整備水準指標とする必要があると考えられる。本研究では、道路網のサービス水準の一指標として信頼性を考え、信頼性グラフ解析 (Reliability Graph Analysis, RGA) に基づいた計量化手法を提案するものである。

信頼性に関する既存研究を交通ネットワークに限定して概観すると、災害時を想定したものが主流となっている。災害時ネットワークの連結性を扱った小林^{1),2)}、川上³⁾、これに通行規制の影響を加味した深井・建部ら⁴⁾、災害時の信頼容量を求めた河上⁵⁾、FTA (Fault Tree Analysis) と FMEA (Failure Mode and Effect Analysis) を降雪期の道路網の信頼度評価に適用した岡田ら^{6),7)}の研究等がある。また、ネットワークフローに着目したものとして、地震強度とフローの期待値を関連

づけた Fenves・Law⁸⁾、道路網容量と関係づけた梶谷⁹⁾の研究等がある。これに対し、平常時のネットワークを対象とした研究には、ノード間の信頼度を定時性と速達性の積で定義し信頼性算出の簡便法とした加藤・門田ら¹⁰⁾、他の整備水準指標まで言及した岡田¹¹⁾の研究等がみられるものの、平常時の信頼性解析の研究はほとんどないのが現状である。道路網のサービス水準評価の一環として、日常的な経路選択行動に基づいた信頼性評価は、今後道路網の管理運営上の観点から重要な指標となると考えられ、今後の研究進展に期待されるところが大きい。

本研究では、ネットワークを構成するリンクの信頼度を与件として、交通ネットワークの特定ノード間信頼度の上・下限値を、一部のミニマルパス、ミニマルカットを用いて評価する方法を提案する。信頼度の上・下限値とは、信頼性工学で用いられる用語であり、システムの信頼度がこの値以上でない、あるいはこの値以下でないことを保証する数値である。信頼度の厳密値を求めることが理論的に可能であっても、システムが大規模であるため計算時間や記憶容量等、計算機の制約で計算実行が困難な場合に有効な近似値とされている。交通ネットワークは、信頼性工学で対象とされてきたシステムと比較してもきわめて大規模なものである。したがって、信頼度の厳密値を求めることは困難であり、その場合、近

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学科
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工修 大阪府立工業高等専門学校助教 土木工学科
(〒572 寝屋川市幸町 26-12)

似値の効率的算出法がきわめて重要となる。

本研究で提案する方法は、ノード間のミニマルパス、カットのうち一部を用いる方法であり、すべてのミニマルパス、カットを必要とする従来の方法に比較して大幅に計算を簡略化できる点に大きな特徴を有している。ところで、交通ネットワークの所与2地点間に対し、選択される交通の経路は限定されており、大回りの経路はあらかじめ除去して考えることができる。この点が、交通ネットワークの特殊性であり、利用可能経路が限定されていないシステムの信頼性解析と異なっている。このことにより、本論文で提案する一部のパス、カットのみを対象とする方法が実用的手法として意味をもってくる。すなわち、交通ネットワークの信頼性は、利用対象ネットワークの範囲内で議論すればよく、特に広域的道路に対して有用性が高いと考えられる。

このように、本論文で提案する方法は、交通工学的に意味のあるパス、カットを選択し、ブール演算と組み合わせた点に特徴があり、信頼度の上・下限値の効率的算出が可能となっている。

2. 一部のミニマルパス、カットによる信頼度評価法

本研究では、交通ネットワークの任意の2地点間において、円滑な走行移動が保証される状態をノード間信頼性とよび、ある期間におけるその確率をノード間信頼度と定義する。同様に、ネットワークの構成リンクに対し、円滑な走行移動が保証される確率をリンク信頼度とよぶ。本研究ではリンク信頼度を既知として理論を展開している。リンク信頼度は、リンク長や道路幅員、交通量の関数であると考えられるが、ある期間における交通事故や工事、あるいは交通量増大による渋滞を既存データから調査すれば、比較的容易に決定することができる。

ネットワークのノード間信頼度は、構造関数の期待値計算により得られる。構造関数の構成法には、モジュールや分解原理を用いてシステムを等価変換する方法があるが、ミニマルパス、カットを用いるとシステムの等価変換は不用で、オリジナルのネットワーク形状をそのまま利用することが可能である¹²⁾。このことは、多数のODを対象とする交通ネットワークの信頼性解析に有効であることから、本研究ではミニマルパス、カットを用いて信頼度を解析する。なお、ミニマルパスとは、ノード間の経路を構成するリンクのうちどれか1つでも故障になると通行が不能となり、すべてが機能していれば通行機能を保証するような部分集合である。ミニマルカットとはそれに属するすべてのリンクが故障すれば確実にノード間が通行不能となり、そのうちの1つでも機能状態となると、それに属する他のリンクすべてが故障して

いても必ずしも通行不能とはならないような部分集合である。

ネットワークの特定のノード間のミニマルパスを P_s 、ミニマルカットを K_s とすると信頼度の厳密値 R は、

$$R = E \left[\prod_{s=1}^p \prod_{a \in P_s} X_a \right] \equiv E \left[1 - \prod_{s=1}^p \left(1 - \prod_{a \in P_s} X_a \right) \right] \dots (1)$$

あるいは、

$$R = E \left[\prod_{s=1}^k \prod_{a \in K_s} X_a \right] \equiv E \left[\prod_{s=1}^k \left\{ 1 - \prod_{a \in K_s} (1 - X_a) \right\} \right] \dots (2)$$

で与えられる。ここに、 X_a は、

$$X_a = \begin{cases} 1, & \text{リンク } a \text{ の円滑な走行移動が} \\ & \text{保証される場合} \\ 0, & \text{そうでない場合} \end{cases} \dots (3)$$

で定義される確率変数であり、 p, k は、ミニマルパス、カットの総数である。演算記号 \prod, \prod はそれぞれ論理積 (AND)、論理和 (OR) を表わしている。なお、リンク信頼度 r_a は、

$$r_a = E [X_a] \dots (4)$$

で与えられる。

式 (1), (2) の計算は、すべてのミニマルパス、カットが必要であり、また、同一リンクの確率の重複計算を避けるため、論理積に関するブール演算 ($X_a \cdot X_a = X_a$) を必要とする。そのため、ネットワークが大規模になると膨大な計算が必要となる。ここで、ミニマルパスに基づく式を具体的に示すと以下ようになる。ミニマルパスを、

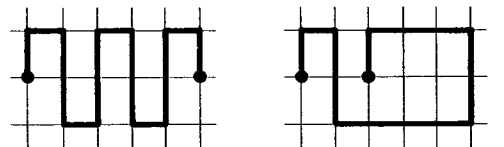
$$\alpha_s = \prod_{a \in P_s} X_a \dots (5)$$

で表わすと、式 (1) は、

$$R = E [1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_p)] \dots (6)$$

となる。式 (6) をさらに展開すると項の数は $2^p - 1$ 個となる。そして、これらの項をブール代数で整理しなければならない。したがって、ミニマルパス数が増加すると項の数が指数的に増加して、膨大な計算量となる。

ここで、仮にパスの数を1個減らせば、この部分の計算量はほぼ1/2ですむ。以下同様に、パスの数の減少に従って、計算量を1/2ずつ指数的に減少させることができる。したがって、信頼度 R の値への寄与が大きい一部のミニマルパスで十分よい近似が得られるならば、非常に効率よく信頼度を計算できることになる。寄与の小

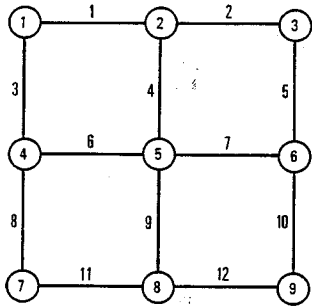


a) ジグザグのミニマルパス b) 大まわりのミニマルパス
図一 交通工学的意味の希薄なミニマルパス

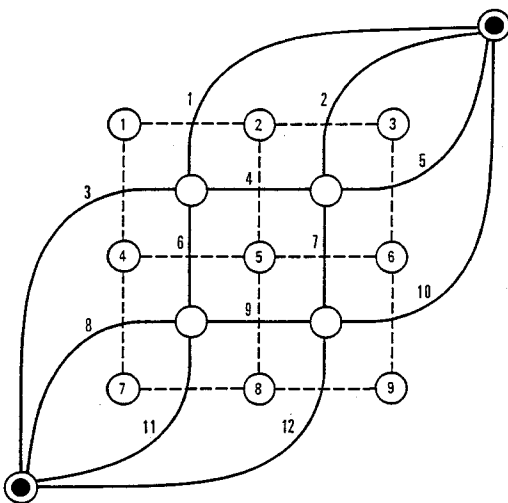
さいミナルパスとは、図-1のようにノード間をジグザグに経路をとるものや、大回りのミナルパスが考えられる。これらのパスは、利用経路としての選択率が一般的にきわめて低く、交通工学的観点からは、信頼度解析の対象経路とすることはあまり意味がない。また、ミナルカットは、双対ネットワーク（オリジナルネットワークのリンクで囲まれる領域にノードを設定したものの）でのミナルパスと等価であるので、双対ネットワークでのミナルパスを探索すればよい（図-2参照）。そしてここでも、上のミナルパスで述べたことと同様のことがいえる。

ミナルパス P_1, P_2, \dots, P_p の集合を P 、ミナルカット K_1, K_2, \dots, K_k の集合を K とする。部分集合 P', K' を $P' \subseteq P, K' \subseteq K$ で定義し、その要素の個数を $p' (\leq p), k' (\leq k)$ とする。式 (1), (2) を P', K' で評価すると、下限値 L , 上限値 U を得ることができる。すなわち、

$$L = E \left[\prod_{s=1}^{p'} \prod_{a \in P_s} X_a \right] = 1 - E \left[\prod_{s=1}^{p'} \left(1 - \prod_{a \in P_s} X_a \right) \right] \dots (7)$$



a) オリジナルのネットワーク
(ノード番号とリンク番号)



b) ノードペア(1,9)に対する双対ネットワーク
(リンク番号とオリジナルのネットワークのノード番号)

図-2 田字形ネットワークと双対ネットワーク

$$U = E \left[\prod_{s=1}^k \prod_{a \in K_s} X_a \right] = E \left[\prod_{s=1}^k \left[1 - \prod_{a \in K_s} (1 - X_a) \right] \right] \dots (8)$$

$$L \leq R \leq U \dots (9)$$

を得る。式 (7), (8) において、すべてのパス、カットを用いると厳密値に一致するのは明らかである。

3. ブール演算アルゴリズム

本節では、信頼度を計算するための計算機アルゴリズムについて述べる。最初に、ミナルパスに基づく方法を述べる。従来提案されてきた方法は、式 (1) をノード間に少なくとも1つのミナルパスが存在する確率と解釈し、ベン図で記述される論理和の期待値を求める方法である。この論理和の期待値を計算するには、含意排他公式 (Inclusion-Exclusion Formula) を利用する方法¹³⁾、Fratta・Montanari による論理和を代数和に変換する方法¹⁴⁾等が従来提案されている。これらの方法では、論理和を構成する際にすべてのミナルパスを必要とする。いずれの方法にも、計算を簡略化した近似値計算法が存在するが、近似計算は計算過程で行われるためにすべてのミナルパスを必要とする点には変わりがない。したがって、大規模ネットワークでは計算に必要なミナルパス数が膨大となり、先述した交通工学的意味の希薄なミナルパスまで探索しなければならない。さらに後者では、計算可能なネットワークの規模がきわめて限定されるという欠点がある。これに対し、これから説明する本アルゴリズムは、パス公式の直接展開法とでもいうべきもので、式 (1) あるいは (7) を直接展開する点で前2者の方法と異なっている。要するに、式 (1) を文字どおり $2^p - 1$ 個の項に展開し、各項に対してブール演算を適用するのである。近似値計算は、式 (7) から明らかのように、すべてのパスを利用しなくても計算実行が可能である点に特徴がある。このほか、本アルゴリズムの特徴として、式 (1) あるいは式 (7) を一度に展開すると、多項式の整理に計算時間を多く必要とするので、計算効率向上のためアルゴリズムに示すように展開と項の整理を交互に行っている。また、パスの構成リンクを記憶する変数に、計算機の1ビットを対応させて記憶容量の節約を計っている。アルゴリズムの概要は以下のとおりである。

① 計算に用いるミナルパス数を p' とし、それらのミナルパス a_s を記憶する。たとえば、リンク {1, 2, 5, 10} すなわち、 $a = X_1 X_2 X_5 X_{10}$ で構成されたミナルパスは記憶変数、

$$2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{5-1} + 2^{10-1} = 531$$

で記憶する。

② $m=1$ とする。

③ p' 個のミニマルパスから任意の m 個を取り出した積 (式 (7)) を $2^{p'-1}$ 個の項に展開する過程で得られる), すなわち, α_s に関する m 次項は,

$$(-1)^m \alpha_{s_1} \cdot \alpha_{s_2} \cdots \alpha_{s_m}$$

で表わせる。この積をリンクに関してブール代数で整理する。たとえば, $\{1, 2, 5, 10\}$, $\{1, 4, 9, 12\}$, $\{3, 8, 11, 12\}$ で表わされるミニマルパスの積は表-1 の手順を経て, $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9 X_{10} X_{11} X_{12}$ を表わす記憶変数に変換される。

④ 同一項の整理を行う。具体的には, ③で発生させた積とそれ以前に発生させた積とが同一であるかどうかを判断する。表-1 の例では, 3999 という記憶変数がすでに登録されているか否かを判断する。同一である場合は, 係数を更新し, 同一でない場合は, 記憶変数として新たに記憶する。

⑤ α_s に関する m 次項は, ${}_p C_m$ 個存在するので, これらを順次発生させ, ③, ④を繰り返す。

⑥ ③~⑤を, $m=2, 3, \dots, p'$ に対し繰り返す。終了すれば⑦へ進む。

⑦ 記憶変数領域に残っている記憶変数は, ブール代数による整理後の, 信頼度 R の X_a に関する多項式に対応している。たとえば, 記憶変数領域に 3999 が残っておれば, これは多項式の構成要素, $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9 X_{10} X_{11} X_{12}$ に対応する。そして, このような記憶変数が記憶領域に多数存在している。これらに, リンク信頼度 r_a を代入すれば, R の値を得ることができる。

ミニマルカットに関しては, 式 (2) において,

$$Y_a = 1 - X_a \cdots \cdots \cdots (10)$$

とすると,

$$R = E \left[\prod_{s=1}^k \prod_{a \in K_s} X_a \right] = E \left[\prod_{s=1}^k \left(1 - \prod_{a \in K_s} Y_a \right) \right] \cdots \cdots (11)$$

となり, 式 (1) とは定数部分と符号が異なるだけとなる。そのため, 上述のアルゴリズムをそのまま用いることができる。相違点は, ⑦において, r_a を代入する代わりに $(1-r_a)$ を代入する点である。

本計算法も既存の方法と同様, 計算機の計算時間の節約を受けるが, ある程度大きさのネットワークまでなら計算実行が可能であると考えられる。

4. ミニマルパス, カットの選択方法

一部のミニマルパス, カットを単純に用いた場合, その選択の方法は信頼度の計算結果に大きな影響を与える。そこで効率的に近似値を得るために, パス, カットの選択方法を考察する。まず, パス, カットの順序基準を設定する (順序基準 (I), (II))。次にこの順序基準でランクづけられたパス, カットの上位から選択ルール (①~③) により計算に用いるパス, カットを選択する。

(1) ミニマルパスの選択方法

(I) 生起確率による順序基準

パス P_s の生起確率は $\prod_{a \in P_s} r_a$ で与えられる。式 (7) において L は下限値であるから, 少ないパス数で厳密値に接近させるためには L の値を大きくするようなパスを選択すればよい。そのためには, $E[\Pi(1-\Pi X_a)]$ ができるだけ小さい方がよい。ここで最初の Π に着目すればパスの数を増やせばよいことになる。また同じパス数を選択するのであれば, $\prod_{a \in P_s} X_a$ に注目して $\prod_{a \in P_s} r_a$ の大きなパスから選択すればよいと考えられる。したがって, この基準では信頼度の高い経路からの選択が可能となる。そしてまず最初に, ミニマルパスを生起確率の大きいものから順序づけ, 以下のルールに従ってパスを選択すればよい。

ルール① リンクの重複を許さない選択ルール

生起確率の高いパスから順にリンクの重複がないように上位から p' 個のミニマルパスを選ぶ。この方法では, リンクに重複がないため計算を複雑化するブール演算を避けることが可能である。さらに, パスの生起確率 Πr_a は, 対数をとることにより次のように変形できる。

$$\log(\Pi r_a) = \log r_1 + \log r_2 + \cdots + \log r_l \cdots \cdots (12)$$

ここに, l はパスを構成するリンク数である。ここで, $0 \leq r_a \leq 1$ であることを考慮し, 各リンク長に $-\log r_a$

表-1 ブール演算の例 (ミニマルパス数が3の場合の積の計算)

ミニマルパス	記憶変数	ビット変数											
		リンク番号											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$X_1 X_2 X_5 X_{10}$	531	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
$X_1 X_4 X_9 X_{12}$	2313	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
$X_3 X_8 X_{11} X_{12}$	3204	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
積をブール代数で整理したもの $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9 X_{10} X_{11} X_{12}$	3999	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

□: 計算実行の手順

=0 の場合は無限大) を対応させると、生起確率の大きいパスから選択する問題は最短ルートを探査する問題と等価になる。リンクの重複を許さないから、選ばれたリンクをネットワークから順にはずしていき、最短経路探索を繰り返し解く問題に帰着する。

ルール② 1次独立なミニマルパスの選択ルール

リンクに関して1次独立なミニマルパスを上位から p' 個選ぶ。ルール①では、リンクの重複を許さないため、選択されたミニマルパスの数がきわめて少なくなり、良好な近似値が得られない可能性がある。そこで、 Πr_a が大きく、かつリンクが重複していないパスを多数選ぶことができれば理想的であるが、これはなかなか困難であると考えられる。そこで、リンクの重複を許すがこれを最小限にするため、ミニマルパスに関する1次独立性の概念¹⁵⁾(グラフ理論で用いられる概念であり、これにより他のどのようなパスも演算で記述できる)を導入したものである。

これは、最短経路、2番目最短経路、…を1次独立性を考慮しながら順次求める問題に帰着する。

ルール③ 上位から制約なしに選択するルール

①、②のルールを緩和し、ミニマルパスを単に上位から p' 個選ぶ。これは単純に、最短経路、2番目最短経路、…を順次求める問題となる。

(II) 経路距離による順序基準

もう1つの近似算法を考える。式(7)をリンクの信頼度に関して次数が同じものを集め再整理すれば、

$$L = \sum_a O_i(r_a) + \sum_{a_1} \sum_{a_2} O_2(r_{a_1}, r_{a_2}) + \dots \dots \dots (13)$$

を得る。ここに、 O_i は r_a の i 次の項のみからなる多項式を表わしている。 $0 \leq r_a \leq 1$ であるから式の値を規定するのは次数の小さい項である。したがって、この多項式を適当な次数の項で打ち切れば信頼度の近似値を得ることができる。式(7)が $(1 - \Pi X_a)$ の積から成り立っていることから、 X_a の次数の小さいミニマルパスから選択すればよいと考えられる。リンク信頼度 r_a はリンク長に関する減少関数であると考え、これは経路の距離に関する最短経路探索問題に帰着する。この基準では、距離の小さい経路からの選択を反映している。ミニマルパスの選択ルールは、(I)と同じである。

(2) ミニマルカットの選択方法

式(8)は上限値であるから、少ないカット数で厳密値に接近させるためには U の値を小さくするようなカットを選択すればよい。ここで最初の Π に着目すればカットの数を増やせばよいが、同じカット数を選択するのであれば、 $\Pi_{a \in K_0} (1 - X_a)$ に着目して $\Pi_{a \in K_0} (1 - r_a)$ の大きなカットから選択すればよい。

ミニマルカットは、双対ネットワークでのミニマルパスに対応する。双対ネットワークを利用すると、(1)

と同様の扱いが可能となる。

(I) 生起確率による順序基準と選択ルール

この場合は、双対ネットワークの各リンクに $-\log(1 - r_a)$ を対応させると、(1)(I)とまったく同様に扱うことが可能となる。

(II) 経路距離による順序基準と選択ルール

双対ネットワークには、経路長の概念がないので、すべてのリンクに等しいリンク長を与えると、最短経路探索問題と等価になり、(1)(II)とまったく同様に扱える。

5. モデル計算

本節では、簡単なネットワークを対象にモデル計算を行い、パス、カットの順序基準と選択ルールを比較する。

4. では、パス、カットの順序基準として、(I)と(II)の2とおりを提案したが、ここでは、これに(I)と(II)を組み合わせた方法を加えて考察する。すなわち以下の3とおりである。

(I) 生起確率による順序基準

(II) 経路距離による順序基準

(III) 経路距離と生起確率による順序基準

(III)は、(II)において同じ距離(リンク数)のパス、カットがある場合には、(I)を適用する順序基準である。

モデル計算の対象は、図-2 a) の田字形ネットワー

表-2 ミニマルパスの順位表およびルール①、②による計算結果 [$r_a=0.9$, ノードペア (1, 9), 順序基準 (I)]

パス順位 (No.)	構成リンク	リンク数	生起確率	選択されたパス	
				ルール①	ルール②
1	{1,2,5,10}	4	0.8561000	*	*
2	{3,8,11,12}	4	0.8561000	*	*
3	{1,4,9,12}	4	0.8561000		*
4	{3,6,7,10}	4	0.8561000		*
5	{1,4,7,10}	4	0.8561000		*
6	{3,6,9,12}	4	0.8561000		
7	{1,2,5,7,9,12}	6	0.5314410		
8	{3,8,11,9,7,10}	6	0.5314410		
9	{1,4,6,8,11,12}	6	0.5314410		
10	{3,6,4,2,5,10}	6	0.5314410		
11	{1,2,5,7,6,8,11,12}	8	0.4304672		
12	{3,8,11,9,4,2,5,10}	8	0.4304672		
下限値の計算値				0.8817328	0.9662445

表-3 種々の r に対するルール①、②の計算結果

リンク信頼度	$r=0.9$	$r=0.8$	$r=0.7$
厳密値	0.9725022	0.8695023	0.6914186
ルール① 上限値	0.9799040	0.9186532	0.8147391
ルール① 下限値	0.8817328	0.6514278	0.4225520
ルール② 上限値	0.9749515	0.8877507	0.7388213
ルール② 下限値	0.9662445	0.8414665	0.6440391

クにおけるノードペア (1, 9) の信頼度である。このノードペアに対するミニマルパス、カット数はそれぞれ12個、30個であり、そのうち1次独立なパス、カット数はそれぞれ5個、8個である。

最初に、すべてのリンクの信頼度 r_a が一定値 r の場合を考察する。一例として、 $r=0.9$ の場合、(I) の順序基準でミニマルパスを並べたものを表-2 に示す。この場合、信頼度の厳密値 R は、0.9725022 である。ルール① (非重複のルール) によると表-2 の*印のように、No.1 と No.2 のパスが選択され、式 (7) により下限値は 0.8817328 となる。ルール② (独立のルール) によると、下限値は、0.9662445 となる。他のいくつかの r の値に対して、ミニマルカット (式 (8)) に基づく上限値とともにルール①、②の計算結果を表-3 に示す。ルール①はルール②に比較して、厳密値に対し乖離が大きいことがわかる。計算に用いるパス、カット数が少ないのが理由である。ルール③では、ミニマルパスに関しては、表-2 のパスを上位2個から12個まで変化させて下限値を計算し、その結果を表-4 に示す。ミニマルカットについても同様の計算を行った。その結果を図-3 に示す。下限値の場合、パスの選択数を増すと下限値は大きくなり、すべてのミニマルパスを用いると厳密値を与えることが確認できる。上限値についても、カット数が増加するにつれて厳密値に接近する。カット数が12までしか図示していないが、さらにカット数を増加させると、最終的には厳密値に一致する。この図から、最初の数個のパス、カットで上・下限値は、急速に厳密値に接近することがわかる。そして、それ以後は、パス、カット数を増加させてもそれほど値の改善はみられない。このことは、ミニマルパスやカットの中にも、厳密値に大きく寄与するものと、そうでないものがあることを示している。また、CPU タイムについてみると (表

表-4 ルール③による計算結果
[ノードペア (1, 9), $r=0.9$, 順序基準 (I)]

パス数	信頼度	CPUタイム
2	0.8817328	1157
3	0.9299174	1182
4	0.9625622	1237
5	0.9662445	1336
6	0.9699268	1559
7	0.9705491	2002
8	0.9711714	2958
9	0.9717938	5036
10	0.9724161	9536
11	0.9724591	19587
12	0.9725022	40834

CPUタイム：単位 mS(FACOM M-340)

—4)、パス数が少ないうちは漸増しているが、パス数が増加すると2. で述べたように指数的に増加している。これらのことから、パスやカット数を多くとっても、値の改善の割には計算効率が悪いことを示している。なお、順序基準 (II), (III) は、順序基準 (I) と同一となるので計算結果も同じとなる。

本計算例だけではパス、カットの選択ルールの優劣は判断できず、また、リンク信頼度 r_a を一定値としたので、順序基準 (I) ~ (III) の差異を検討できなかった。そこでパスやカットの順序基準や選択ルールの優劣をさらに明確にするため、リンク信頼度 r_a の値を乱数を発生させて与え、多数のリンク信頼度の組合せ (これをパターンとよぶ) に対し、統計的な考察を加える。このようなリンク信頼度の与え方は現実を必ずしも反映しないが、順序基準やルールの比較検討のためには有効であると考えた。パターン数は50とした。

最初にルール①は、順序基準 (I) ~ (III) に共通して、厳密値との乖離が大きく、近似値として適切でないと判断した。一度選択されたリンクは重複して選択しないため、パス、カットの選択数が非常に少なくなるのが理由である。これは、表-2, 3 の結果からも明らかであると

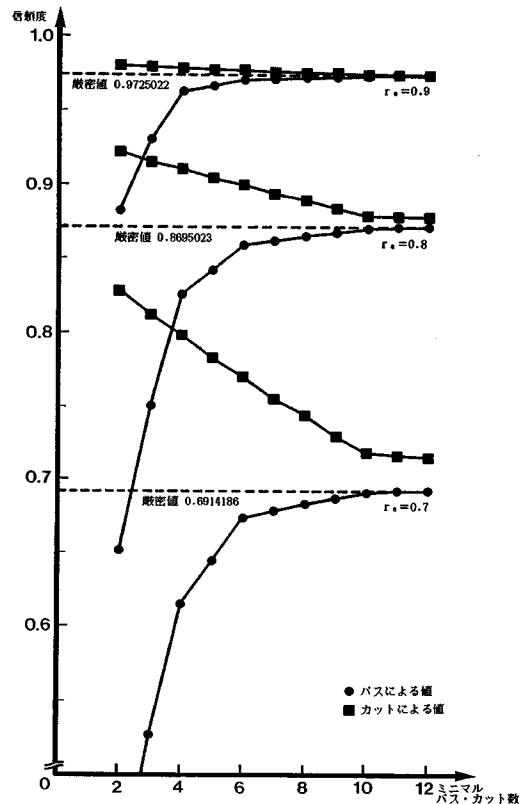
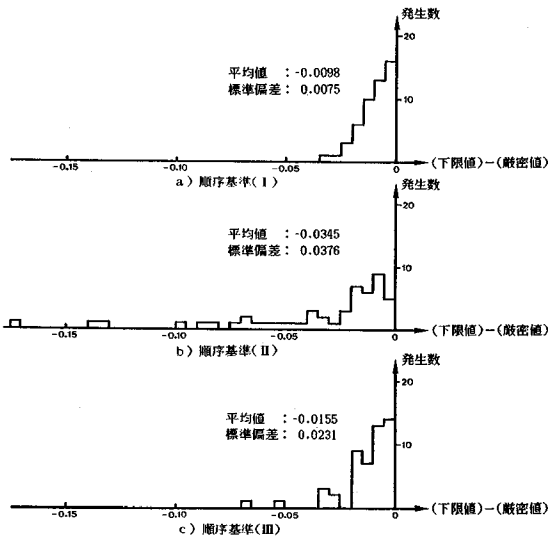
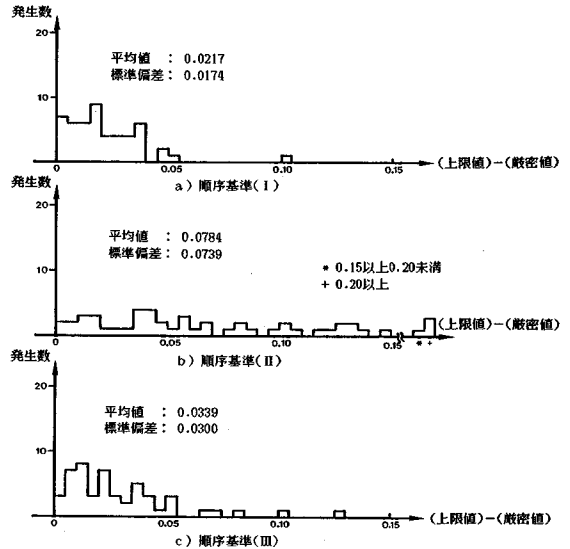


図-3 パス、カット数の変化によるルール③の計算結果
[ノードペア (1, 9), 順序基準 (I)]



図—4 ルール②による下限値と厳密値との誤差の度数分布



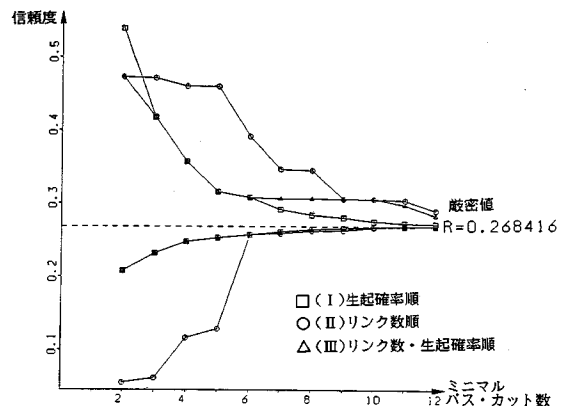
図—5 ルール②による上限値と厳密値との誤差の度数分布

考えられる。

次に、ルール②の結果を順序基準 (I)~(III) 間で比較する。得られた上・下限値と厳密値との誤差をヒストグラムにしたものが図—4, 5である。この図から明らかに順序基準 (II) は、近似値決定の基準として適切でないことがわかる。順序基準 (II) は、パスの経路 (カットについては、双対ネットワークのパスの経路) の距離のみを考慮したものであり、その生起確率はまったく考慮していない。したがって、生起確率の小さいパス、カットであっても経路の距離が小さければ、優先的に計算対象になり、これが厳密値との乖離を大きくする理由と考えられる。また、同一経路長 (モデル計算では、リンク長一定のため同一リンク数) のパス、カットの順序に規約がないために、計算結果に安定性が保証されないという欠点がある。このことから、生起確率の考慮が非常に重要であることがわかる。このことは、順序基準 (II) で生起確率を考慮すると順序基準 (III) となり、その結果は (II) に比べると大幅に厳密値との誤差が小さくなることでも明らかである。(I) と (III) とを比較すると結果に大差はないが、厳密値との乖離の大きいパターンも若干あることがわかる。本例では、ほとんどの場合、(I) と (III) は、ほぼ同一の計算結果を与え、その優劣はつけがたいが、リンク信頼度の組合せが特殊な場合、両者の結果に大きな差を生ずることがある。これについては後述するが、(I) に関しては厳密値との誤差はおおむね ± 0.05 以内に収まっており、この程度の誤差が許容されるとすれば十分実用的であると考えられる。

次にルール③について述べる。ルール③では、パス、カット数を増加させると、上・下限値は徐々に厳密値に

接近する性質がある。50のパターンのうち多くのパターンで、順序基準 (I) と (III) とは厳密値に対し、同じような接近の様子を示すが、それに対し (II) の接近は概して遅いことが明らかとなった。(II) の接近が遅いのは、先述と同様の理由である。その接近の様子の典型例を図—6に示す。順序基準 (I) と (III) による値の相違は多くの場合、あまり大きくはなく、一方が他方に比べ常により近似値を与えるといった優劣関係はない。順序基準 (I) と (III) に差異が現われるのは次のような場合である。すなわち、図—2 a) でノードペア (1, 9) の信頼度を考えるとき、たとえばリンク 3 の信頼度がリンク 1 に比較してきわめて小さい場合、順序基準 (I) では構成リンクにリンク 1 を含むものが上位を占めてしまう。順序基準 (III) ではリンク数を考慮するため生起確率の小さなものも上位にランクされ、そのため厳密値



図—6 ルール③による厳密値への接近の典型例

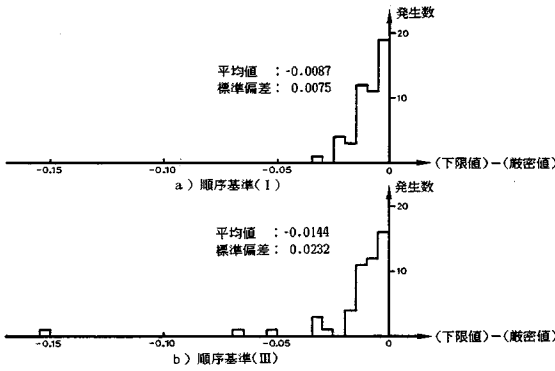


図-7 ルール③による下限値と厳密値との誤差の度数分布

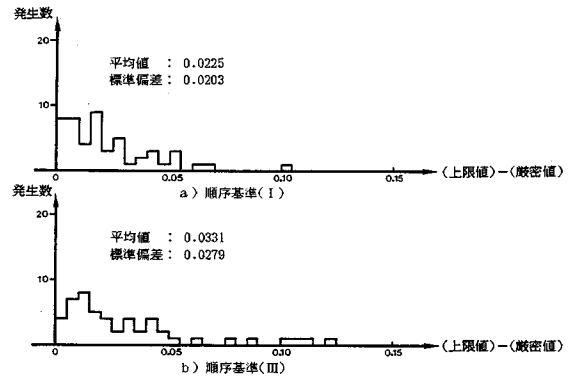


図-8 ルール③による上限値と厳密値との誤差の度数分布

への接近は、(I)に比較して大きく遅れたものとなる。このように、生起確率に関して上位にランクされるパスが、リンクに関して偏っている場合、順序基準 (I) と (III) の差異が現われる。このような場合には、式 (13) で述べたリンク信頼度 r の次数 (つまりリンク数) を考慮せず、単純にパスを生起確率の順に並べた方がよいことになる。順序基準 (I) と (III) を比較すると、(III) の方がより早く厳密値に接近する例もみられたが、上述のように誤差の大きい例もみられ、この点で比較的無難な結果を与え、かつ計算実行上簡便な順序基準 (I) が優れていると考えられる。

このように③の特性は、パス、カット数を増加させればさせるほどよい近似値が得られる。しかし逆に、適切なパス、カット数の停止基準がないことが欠点となっている。②は、1次独立性の判定計算が一般に複雑となる点に欠点がある。そこで、この両者を組み合わせ、③のパス、カット数に、②の独立なパス、カット数を用いることを考える。下限値に関してはパス数5、上限値に関してはカット数8として、順序基準 (I) と (III) による上・下限値と厳密値との誤差をヒストグラムにしたものが図-7, 8である。厳密値との誤差が大きい値が少ないという意味で、順序基準 (I) が優れているといえる。そして、ルール②による結果と比較しても、順序基準 (I) とルール③の組合せは十分実用的であるといえる。この場合も、厳密値との誤差はおおむね±0.05以内であると考えてよい。この方法ではパス、カットを生起確率順に順序づけ、上位から必要なパス、カット数を単純に選択するだけでよく、構成リンク数の考慮 (順序基準 (III)) や1次独立性の判定計算 (ルール②) が不要であるのが特徴である。

6. 確率重要度

本手法は、計算過程で確率変数の情報が保存されるため、解析的な分析が可能である。その一例として、確率

重要度を計算する。リンク a の確率重要度を次式によって定義する¹⁶⁾。

$$I_a = \partial R(r) / \partial r_a \dots \dots \dots (14)$$

確率重要度には、 $0 < I_a \leq 1$ という性質があり、リンク信頼度の増減がノード間の信頼度にどのように影響するかを知ることができる。すなわち、確率重要度の大きいリンクの信頼度が下がれば、ノード間信頼度は大きく低下し、逆にそのリンク信頼度を上げれば、ノード間信頼度を効率よく向上させることができる。

ノードペア (1, 9) の確率重要度を図-9のリンク信頼度で計算する。結果を表-5に示す。まず、厳密値から得られる確率重要度について考察する。得られた確率重要度は、数個のリンクが突出した値をもち、他の多数のリンクは小さな値で、その値にはほとんど差がない。計算結果では、重要なリンクは、リンク 3, 12, 10, …の順となっている。本例では、{3, 8, 11, 12}, {3, 6, 7, 10}, {3, 6, 9, 12}, …のパスが生起確率の上位にランクされており、これら生起確率の高いパスに共通して含まれているリンクが重要と判断されている。また、起終点ノード①, ⑨に直結しているリンクの数が少なく、これらの信頼度がノードペア (1, 9) の連結信頼度に大きな影響を与えると考えられることから、これらのリンクの重要度が高く計算されたとみることが出来る。他のノードペア

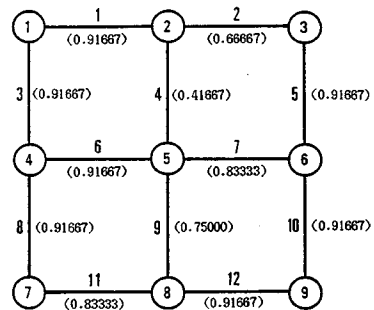


図-9 リンク信頼度の値

表-5 確率重要度の計算結果 (ノードペア (1, 9))

リンク 番号	厳密値による値		順序基準(1)ルール②		順序基準(1)ルール③($p'=5$)	
	確率重要度	順位	確率重要度	順位	確率重要度	順位
1	0.0836474	4	0.0834395	5	0.0685884	6
2	0.0658367	5	0.0682387	6	0.0943090	5
3	0.2816201	1	0.3447436	1	0.4567090	1
4	0.0364981	11	0.0289269	11	0.0000000	12
5	0.0478813	9	0.0496282	9	0.0685884	6
6	0.0637048	6	0.0835385	4	0.1000139	4
7	0.0506325	7	0.0610235	7	0.0480301	10
8	0.0440462	10	0.0459210	10	0.0538782	9
9	0.0309282	12	0.0273756	12	0.0290091	11
10	0.1286980	3	0.1796790	2	0.1678669	2
11	0.0484511	8	0.0505135	8	0.0592665	8
12	0.1353375	2	0.1407835	3	0.1327013	3

アに対し同様の計算を行った結果、起終点ノードに直結するリンク数が多くなるノードペアでは、起終点ノード直結リンクの重要度は低下する。

以上述べた確率重要度は、信頼度の厳密値から得られる値で、厳密値計算そのものが膨大な計算を必要とする。そのため、確率重要度にも近似計算法があることが望ましい。前節で述べた近似計算法は、確率変数が保存される点は厳密計算法と変わらないので、次にこの近似値から得られる確率重要度を求め、厳密値から得られる確率重要度と比較する。ここではミニマルパスに基づく近似計算を取り上げ、前節の検討で有効とされた、順序基準(1)におけるルール②(独立のルール)とルール③での上位5パスを比較する。結果を表-5に示す。近似計算法による確率重要度は、厳密値による確率重要度と比較して、重要なリンクはさらに大きな値として計算される。重要度の低いリンクについては、大きな変動はない。つまり、近似計算から得られた結論も厳密計算による結論と同様に、生起確率の高いパスに共通して含まれているリンクや、起終点ノードに直結するリンク数が少ない場合の起終点ノード直結リンクの重要度が高く評価されている。重要度の高いリンクの判別が重要であるとすると、この近似計算法は信頼度の近似計算法と同様、実用性が高いと考えられる。

7. ま と め

本論文では、プール代数を用いて、交通ネットワークのノード間信頼度の上・下限値を効率的に求める方法を提案した。本研究での成果を要約すると以下のとおりである。

(1) 本研究で提案した方法は、ノード間のミニマルパス、カットのうち一部を用いる方法であり、すべてのミニマルパス、カットを必要とする従来の方法に比較して大幅に計算を簡略化できる点に大きな特徴を有している。このことは、きわめて有用な結論を与えている。すなわち、規模の大きいネットワークを対象としたとき、

従来の方法ではすべてのパス、カットを必要とし、これらを探索するのは相当困難である。また、これらの中には交通工学的意味が希薄なものが多数含まれている。本論文で提案した方法では、これら実際のでないパス、カットを計算対象から除外でき、その結果、交通工学的に意味のある、ネットワーク上の実際の経路を利用して信頼度を計算することが可能となっている。

(2) 計算対象とする一部のミニマルパス、カットの効率的な選択方法を考察した。モデル計算を行い統計的な考察を加えた結果、順序基準(1)すなわちミニマルパス、カットを生起確率順に順序づけ、選択ルール③すなわち上位から単純にパス、カットを選択する方法が、良好な上・下限値を与えることが明らかとなった。ただし、パス、カットの選択数は、1次独立なパス、カット数とする。この方法には、計算が簡便であるという利点も有している。そして、この方法は、ミニマルパス、カットを生起確率順に探索する問題となるが、これが n 番目最短経路探索問題 ($n=1, 2, \dots, p'$ または k' ; p', k' は独立なパス、カット数) に帰着することが示された。

(3) 本研究では、信頼度計算のためのプール演算アルゴリズムを作成した。本アルゴリズムは、パス公式の直接展開法とでもいうべきもので、すべてのパスを対象としなくても計算実行が可能である点に特徴がある。カットに対する計算も、定数部分と符号を変えることによって対応が可能である。

(4) 本手法では確率変数の情報が保存されるため解析的な分析が可能である。本論文では、一例として確率重要度を計算した。確率重要度を求めることにより、リンク信頼度の増減がノード間信頼度に与える影響を知ることができる。計算の結果、確率重要度が高く計算されるリンクは、そのリンクが生起確率の高いパスに共通して含まれる場合や、対象ノードペアの起終点ノードに直結しており、かつそのリンク数が少ない場合であることが明らかとなった。

今後の課題を述べる。

(1) 本論文ではノードペア (1, 9) を中心に述べてきた。本論文では述べていないが、他の代表的なノードペアに対しても計算を行い、上・下限値の精度はほぼ同様であるとの結論を得ている。今後、ネットワーク形状やネットワーク規模が変化した場合の有効性を検討することが必要である。

(2) 本論文ではパス、カットの順序基準について、計算の簡便性から生起確率による順序基準 (I) を採用したが、交通工学的には経路長も考慮する (III) の方が意義があると考えられる。しかし、順序基準 (I) および (III) で並べたパス、カットは最初の数個の序列は異なるものの、計算に用いる選択数の範囲では一致することが多かった。このため、経路長を考慮しないが計算の簡単な順序基準 (I) を採用しても問題は少ないと考えられる。この傾向は現実のネットワークでも、保持されるものと考えられるが、順序基準 (I) と (III) の比較および実用性を実際の道路網で検証してみることが必要と考えられる。

(3) 本論文で考察したのはノード間信頼度であるが、ネットワーク全体の信頼度の算出も重要な課題である。すべてのノード間信頼度をそれぞれの OD 交通量で重みづける方法等が考えられるが、計算時間が膨大となる欠点があり、数個のノードペアで代表させる等、効率的な方法の開発を今後の課題としている。

(4) 本研究ではリンク信頼度を与件として扱っているが、実際のネットワークに適用するにはこのリンク信頼度をいかにとらえるかが課題として残されている。本文中でも触れたように統計的な調査を行えば比較的容易に決定することができるが、さらに実用的な方法を検討している。

(5) 本手法ではプール演算を必要とするので、大規模ネットワークでは計算時間が膨大になるという欠点を有している。高速演算の可能な計算機を用いることにより解決するのも可能であろうが、計算をより簡便化した方法も必要である。そのため、プール演算の省略等を考えており、本論文での成果を踏まえた近似計算法の開発を考えている。

法に関する研究，都市計画別冊，No. 15，pp. 385～390，1980。

- 2) 小林正美：道路交通網の地震時信頼度解析に関する研究，都市計画別冊，No. 16，pp. 205～210，1981。
- 3) 川上英二：道路交通システムの機能上の耐震性の一評価方法，土木学会論文報告集，No. 327，pp. 1～12，1982。
- 4) 深井俊英・建部英博・林 寿郁：異常気象時における道路網の信頼性評価手法について，土木学会第 41 回年次学術講演会概要集第 4 部，pp. 13～14，1986。
- 5) 河上省吾：道路網の災害時信頼性の指標化について，第 16 回日本道路会議特定課題論文集，pp. 25～27，1985。
- 6) 岡田憲夫：信頼性からみた道路整備水準の分析・評価手法について，第 16 回日本道路会議特定課題論文集，pp. 28～30，1985。
- 7) 岡田憲夫・後藤忠博・田中成尚：降雪期における道路ネットワーク・システムの信頼性評価法に関する研究，土木学会第 41 回年次学術講演会概要集第 4 部，pp. 15～16，1986。
- 8) Fennes, S. J. and Law, K. H. : Expected Flow in a Transportation Network, Proceedings of the 2nd U.S. National Conference on Earthquake Engineering, pp. 673～682, 1979.
- 9) 榎谷有三：震災時における道路網の機能性能の評価法，交通工学，Vol. 19，No. 5，pp. 3～17，1984。
- 10) 加藤文教・門田博知・浜田信二：道路の信頼性評価の簡便法，土木計画学研究・論文集 4，pp. 181～188，1986。
- 11) 岡田憲夫：道路の整備度指標の諸問題と性能評価法の開発，高速道路と自動車，Vol. 30，No. 3，pp. 17～25，1987。
- 12) 若林拓史・飯田恭敬：交通ネットワーク信頼性解析への信頼性グラフ理論適用の考え方，土木計画学研究・講演集 10，pp. 125～132，1987。
- 13) 井上絃一・稲垣敏之：大規模システムの信頼性解析へのグラフ理論の応用，システムと制御，Vol. 20，No. 12，pp. 641～648，1976。
- 14) Fratta, L. and Montanari, U. G. : A Boolean Algebra Method for Computing the Terminal Reliability in a Communication Network, IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-20, No. 3, pp. 203～211, 1973.
- 15) R. G. バサッカー・T. L. サーティ：グラフ理論とネットワーク／基礎と応用，pp. 123～124，培風館，昭和 45 年。
- 16) 井上絃一：FTA の基礎理論と数値的解析法，井上威恭監修，総合安全工学研究所編【FTA 安全工学】，第 2 章，pp. 99～100，日刊工業新聞社，昭和 54 年。

(1987. 11. 14・受付)

参 考 文 献

- 1) 小林正美：道路網・ネットワークシステムの信頼度解析