

土質定数の空間分布推定法を用いた確率有限要素法

STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD USING ESTIMATIONS OF
SPATIAL DISTRIBUTIONS OF SOIL PROPERTIES

鈴木 誠*・石井 清**

By Makoto SUZUKI and Kiyoshi ISHII

When geotechnical reliability analysis are performed using the stochastic finite element method, a proper estimation of the spatial distributions of soil properties is important. In this paper, to give the best linear unbiased estimator of the unknown space parameter of soil properties, the local estimation technique, which is called "kriging", is incorporated in the stochastic finite element method so that the estimation is made based on the in-site sampling data. This paper discusses the applicability of this proposed approach using the first-order Gaussian approximation by comparing the results with those obtained by the conditional simulation for the same problem.

Keywords: probability theory, finite element method, soil mechanics, space exploration, statistical analysis

1. はしがき

有限要素法に関する新しい研究分野の1つに、確率有限要素法 (stochastic finite element method) に関する研究がある¹⁾。確率有限要素法は、材料定数、荷重 (外力)、境界条件などに含まれる不確定性を認めて、構造モデルの応答、たとえば変位や応力などを確率論的に算定して、構造モデルの信頼性や安定性を定量的に評価する解析手法である。地盤工学においても、土質定数をもつ不確定性を無視して、技術者の工学的判断をもって確定値とするといった作業を省くことができるので、地盤工学への確率有限要素法^{2)~4)}の適用性はさらに向上することになる。

もちろん、確率有限要素法は研究途上にあることから、実際の問題への適用には、次に述べるような問題点が残されている。

- ① 数値計算の効率化と高精度化
- ② 要素分割と各要素に対する材料定数の与え方
- ③ 材料定数に有する空間分布のモデル化

①に関するものは、線形一次近似理論を適用した研究^{5)~10)}をはじめとして、摂動法 (perturbation method) を基礎とする中桐・久田の一連の研究¹¹⁾や、モンテカルロ法を用いたシミュレーション解析による Shinozuka らの研究^{12),13)}がある。

②の問題として、要素分割と解析精度との関係や材料定数の空間分布から有限要素に変換する場合の材料定数の取扱いが、確率有限要素法における1つの重要な研究課題になる¹⁴⁾。また、要素間における材料定数の空間的な相関係数をどのように評価するといった問題もこの中に含まれる^{15)~17)}。

次に、材料定数の空間分布に対するモデル化の問題、すなわち③について考える。確率有限要素法では、材料定数の空間分布を確率場 (random field) あるいは確率過程 (random process) (正確にはエルゴード過程) と仮定して、一般には平均値、分散値および相関モデル (自己共分散関数など) の3つにより与えられる確率特性を満足する母集団すべてを解析の対象としている。しかし、土質調査が行われた地点 (観測点) におけるサンプル値は、測定・実験誤差を無視すれば確定値として与えられるはずであるため、地盤工学のように特定のサイトにおける自然地盤を対象とする場合には必ずしも適合しない。すなわち、解析の対象とする地盤モデルは母集団で

* 正会員 清水建設 (株) 大崎研究室
(〒100 千代田区内幸町 2-2-2 富国生命ビル)

** 正会員 工博 清水建設 (株) 大崎研究室主任研究員
(同上)

はなく、土質調査により一部の土質定数がわかっているサンプル過程（母集団からの1つの標本）であると考えの方が妥当である。したがって、土質調査を対象とする地盤全体にわたってくまなく行えば、測定誤差を除くことにより不確定性はなくなり、地盤モデルは確定的に作成できることになる。もちろん、このようなことは現実的には不可能であるため、有限個のサンプル値から土質定数の空間分布を合理的に定めることが重要となり、この問題の解決を含めた③および②の一部の取扱いが本研究の主題である。

本研究では、土質調査資料から土質定数の空間分布を推定するために、クリッキング (kriging) とよばれている手法^{18),19)}を導入する。この手法は、提案者である南アフリカ共和国の大学教授 Krige から名付けられており、フランスの統計学者 Mathoron が理論的な定式化を行った。そして、鉱山工学や水文工学などの数多くの問題に適用され実績をあげている^{20)~22)}。

さて、本研究では2.においてクリッキングにおける定式化を示し、簡単な例題を用いてクリッキングを確率有限要素法に適用することの有効性を示す。3.では、地盤工学における例題として、1層地盤に載荷荷重（盛土載荷を仮定）が作用した場合の地盤表面の沈下量と不等沈下量の予測を、確率有限要素法により行った。なお、検討に用いた確率有限要素法は、著者らにより開発された一次ガウス近似法を導入した線形一次近似理論による方法である。また、この方法の適用性を示すために、条件付シミュレーション法^{25),26)}による確率有限要素法解析を行い、両者による解を比較した。条件付シミュレーション法は、土質調査位置において判明しているサンプル値およびその統計量をもつ土質定数の空間分布を、確率過程としてシミュレートして、しかる後、有限要素法を直接に適用して地表面の沈下量と不等沈下量を求め、同様のシミュレーションを多数回行うことにより解の統計量を算定する方法である。さらに4.では、本研究のまとめを示している。

2. クリッキングによる土質定数の空間分布の推定

(1) 概 説

クリッキングは、土質定数の空間分布を確率過程の1つの標本であるサンプル過程として、土質調査の結果得られたサンプル値より、残りの部分の土質定数を推定する手法である。このような手法として最も広く知られ、用いられているのが、重回帰分析法（最小二乗法）である¹⁸⁾。しかし、重回帰分析法は空間分布の内挿ではなく回帰であるため、全体的なトレンドの推定を行っていることになり、サンプル点における推定値は必ずしもサン

プル値を通るとは限らない。これに対して、クリッキングはこのような不都合を生じさせることがない推定法であり、土質定数のもつ不確定性を、空間分布の推定に伴う誤差として確率的に取り扱うことができる手法である。すなわち、クリッキングは推定値の不偏性と推定値の分散を最小にするという条件をもって求められる線形推定法であり、クリッキングにより求められる空間分布の推定値はサンプル値を通り、サンプルのない点の推定誤差はサンプル点からの距離が増加するに従って大きくなるという特徴がある。

クリッキングは、定常確率過程の推定法であるため、エルゴード性を仮定して統計量（平均、分散、共分散関数）の推定を行い、統計量とサンプル値を用いてサンプル過程の推定を行う。しかし、対象が非定常確率過程と考えられるときには、統計量を推定することができない。よって、確率過程を確定値として与えられるトレンド成分と定常確率過程として与えられるランダム成分の和として表現できると仮定する。このようなクリッキングをユニバーサル・クリッキング (universal kriging)²³⁾とよび、定常確率過程を扱ったパンクチュアル・クリッキング (punctual kriging)²⁵⁾はその特殊なケースである。ユニバーサル・クリッキングでは、トレンド成分の決定とランダム成分の統計量の推定を同時に行わなければならないが、一般的には、トレンド成分を重回帰分析法などにより決定し、次にランダム成分の共分散関数を推定する。また、データ数の不足などにより、共分散関数を正しく推定することは難しい問題であるが、工学的判断により実用化できると考えられている¹⁹⁾。

本章では、クリッキングの定式化について簡単に述べ、一次元の例題で確率過程とサンプル過程について比較して、地盤工学におけるサンプル過程の有効性を検討する。

(2) クリッキングの定式化

a) ユニバーサル・クリッキング (Universal Kriging)

クリッキングにより内挿を行うサンプル過程 $Z(x)$ を、確定値として与えられるトレンド成分 $m(x)$ と、ランダム成分 $W(x)$ の線形和として表現できると仮定する。ここでは、 x は座標を表すベクトルであり、ランダム成分 $W(x)$ が、平均値が0となる定常 (エルゴード) 確率過程となるようにトレンド成分 $m(x)$ を考える。

$$Z(x) = m(x) + W(x) \dots \dots \dots (1)$$

まず、トレンド成分 $m(x)$ は、 x に関する多項式によって表現できると仮定する。

$$m(x) = \sum_{l=1}^L \beta_l f_l(x) = \{f(x)\}^T \{\beta\} \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 $f_l(x)$ ($l=1, 2, \dots, L$) は x に関する多項式で、

β_i はその係数であり、 T は転置を表わしている。また、 $\{f(x)\}^T = \{f_1(x), \dots, f_L(x)\}$ と $\{\beta\}^T = \{\beta_1, \dots, \beta_L\}$ である。

さて、次に、 N 個のサンプル点 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ において、サンプル値が $Z(x_i)$ として与えられていると、任意点の推定値 $Z^*(x)$ はサンプル値 $Z(x_i)$ の線形和として式(3)により表わせると仮定する。

$$Z^*(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i) = \{Z_N\}^T \{\lambda\} \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 $\{Z_N\}^T = \{Z(x_1), \dots, Z(x_N)\}$ と $\{\lambda\}^T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ である。式(3)の重み係数 λ_i は次の2つの条件を満たす必要がある。

- 重み係数 λ_i に対する条件1: 不偏推定値 $Z^*(x)$ 多くの推定値に対して誤差は平均的に0となる。

$$E[Z(x) - Z^*(x)] = 0 \dots \dots \dots (4)$$

式(1)より、 $Z^*(x)$ の期待値はトレンド成分 $m(x)$ となる。

$$E[Z^*(x)] = m(x) \dots \dots \dots (5)$$

式(2)と式(3)より、式(5)は次のようになる。

$$E[Z^*(x)] = E\left[\sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i)\right] = \sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=1}^L \beta_j f_j(x_i) \\ = \sum_{i=1}^N \lambda_i \{f(x_i)\}^T \{\beta\} = \{\lambda\}^T [F] \{\beta\} \dots \dots \dots (6)$$

ここで、

$$[F] = \begin{bmatrix} \{f(x_1)\}^T \\ \vdots \\ \{f(x_N)\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1), & \dots, & f_L(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_N), & \dots, & f_L(x_N) \end{bmatrix}$$

である。式(2)、式(5)および式(6)より、

$$\{\lambda\}^T [F] \{\beta\} = \{f(x)\}^T \dots \dots \dots (7)$$

となる。

- 重み係数 λ_i に対する条件2: 最小推定誤差分散 $\sigma_z^2(x)$ 推定誤差分散は次のように表現する。

$$E\{[Z(x) - Z^*(x)]^2\} = E\{[W(x) - \sum_{i=1}^N \lambda_i W(x_i)]^2\} \\ = \text{Var}\{W(x)\} - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{Cov}\{W(x_i), W(x)\} \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \text{Cov}\{W(x_i), W(x_j)\} \dots \dots \dots (8)$$

これより、推定誤差を最小とするため最小二乗法を用いる。式(8)をベクトルとマトリックスで表現すると、次のようになる。

$$\sigma_z^2(x) = \min E\{[Z(x) - Z^*(x)]^2\} \\ = \min [\text{Var}\{W(x)\} - 2\{\lambda\}^T k(x) + \{\lambda\}^T [K] \{\lambda\}] \dots \dots \dots (9)$$

ここで、 $\{k(x)\}$ 、 $[K]$ は以下に示す。サンプル値よりトレンド成分を除いた $W(x_i)$ から共分散関数を求め、この共分散関数を用いて $\{k(x)\}$ および $[K]$ を求める。

$$\{k(x)\} = \begin{bmatrix} \text{Cov}\{W(x), W(x_1)\} \\ \vdots \\ \text{Cov}\{W(x), W(x_N)\} \end{bmatrix} \\ [K] = \begin{bmatrix} \text{Var}\{W(x_1)\}, & \dots, & \text{Cov}\{W(x_1), W(x_N)\} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}\{W(x_N), W(x_1)\}, & \dots, & \text{Var}\{W(x_N)\} \end{bmatrix}$$

さて、 $\sigma_z^2(x)$ を求めるためには、式(7)の条件下で式(9)を最小としなければならない。そこで、ラグランジェの未定係数法を用いて、重み係数 $\{\lambda\}$ を求める。ラグランジェ乗数を $\{\mu\}$ とすると、式(9)は次のようになる。

$$\text{Var}\{W(x)\} - 2\{\lambda\}^T k(x) + \{\lambda\}^T [K] \{\lambda\} \\ + 2(\{f(x)\}^T - \{\lambda\}^T [F]) \{\mu\} \dots \dots \dots (10)$$

この式が極小値をとるために、

$$[K] \{\lambda\} = \{k(x)\} + [F] \{\mu\} \dots \dots \dots (11)$$

となる。

次に、式(7)と式(11)を式(9)に代入し、 $\{\lambda\}^T k(x)$ の項について整理すれば、

$$\sigma_z^2(x) = \text{Var}\{W(x)\} - \{\lambda\}^T k(x) + \{\mu\}^T f(x) \dots \dots \dots (12)$$

となる。したがって、 $\{\lambda\}$ と $\{\mu\}$ が求めれば、 $\sigma_z^2(x)$ を求めることができる。

さて、計算では、未知数である $\{\lambda\}$ と $\{\mu\}$ を統合した新たなベクトル $\{L\}$ を考えることにより、式(11)を次のように表現する。

$$[K'] \{L\} = \{M\} \dots \dots \dots (13)$$

ここで、マトリックス $[K']$ 、ベクトル $\{L\}$ と $\{M\}$ は次のように与えられる。

$$[K'] = \begin{bmatrix} \text{Var}\{W(x_1)\}, & \dots, & \text{Cov}\{W(x_1), W(x_N)\}, & 1, & f_2(x_1), & \dots, & f_L(x_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}\{W(x_N), W(x_1)\}, & \dots, & \text{Var}\{W(x_N)\}, & 1, & f_2(x_N), & \dots, & f_L(x_N) \\ \hline 1, & \dots, & 1 & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ f_2(x_1), & \dots, & f_2(x_N), & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_L(x_1), & \dots, & f_L(x_N), & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{L\}^T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N, -\mu_1, \dots, -\mu_L\} \\ \{M\}^T = \{\text{Cov}\{W(x_1), W(x)\}, \dots, \text{Cov}\{W(x_N), W(x)\}, 1, f_2(x), \dots, f_L(x)\}$$

また、 $f_1(x_i)$ あるいは $f_1(x)$ は、 x に関する多項式における定数項として、1.0としている。これより、 $|\lambda|$ および $|\mu|$ が求められ、これを式(3)と式(12)に代入することにより推定値と推定誤差分散が求められる。さらに、推定誤差共分散も式(13)より求められた $|L|$ を次式に代入することにより求められる。

$$E\{|Z(x) - Z^*(x)| | Z(x') - Z^*(x')\} \\ = Cov\{W(x), W(x') - |\lambda'|^T k(x) - |\lambda|^T k(x')\} \\ + |\lambda'|^T [K] \lambda \\ \dots\dots\dots(14)$$

ここで、 $|\lambda'|$ は x' のときの $|\lambda|$ である。

b) ブロック・クリッキング (Block Kriging)

確率有限要素法にクリッキングによる推定値を用いるときには、要素の大きさを考慮する必要がある。ブロック・クリッキングは、要素に対して局所平均を用いてクリッキングを行う推定法である。定式化はユニバーサル・クリッキングと同様で、式(3)、式(12)、式(14)において、 $Var\{W(x)\} \rightarrow Var\{V\}$ 、 $Cov\{W(x), W(x_i)\} \rightarrow Cov\{V, W(x_i)\}$ 、 $Cov\{W(x), W(x')\} \rightarrow Cov\{V, V'\}$ および $\{f(x)\} \rightarrow \{f_v\}$ を用いればよい。ここで、 $Var\{V\}$ は要素 V の局所平均をとった分散であり、 $Cov\{V, V'\}$ は要素 V, V' で局所平均をとった共分散である。これらは、任意の三角形要素について小要素に分割し、数値積分により求めることができる¹⁰⁾。また、 $Cov\{V, W(x_i)\}$ は x_i 点のランダム成分の値と要素 V の共分散で、 $\{f_v\}$ は要素 V のトレンド成分の多項式の局所平均である。両者とも、同様の数値積分により求めることができる。これより、要素 V の推定値 Z^* と推定誤差分散および共分散が求められる。

(3) 適用例

クリッキングの内容をより直感的に理解してもらうために、図-1に示した一次元のモデルについてクリッキングを適用した。まず、図-1の実線で示したような土質定数が存在し、◎印のサンプル値が得られたとする。次にこのサンプル値から統計量を推定し、前節で説明したユニバーサル・クリッキングにより推定値と推定誤差を求めた。この例では、計算を簡単にするためトレンド成分を0次(パンクチュアル・クリッキング)とし、単位は無次元とした。また、統計量は平均値を1.0、変動係数を0.2として、自己相関係数を次のように定めた。

$$\rho(\Delta x) = \exp\left[-\left(\frac{\Delta x}{5.0}\right)^2\right] \dots\dots\dots(15)$$

なお、実際の問題への適用にあたっては、これらの統計量もまた、調査結果から得られたサンプル値あるいは経験的な知識等も合わせて設定することになる。

図-2において実線が推定値を、破線が推定値±推定誤差を示している。図-1に比べて、図-2の推定値が

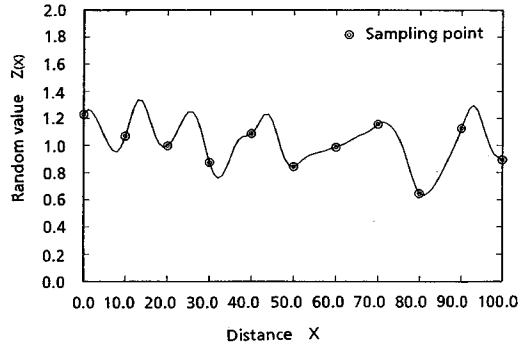


図-1 土質定数とサンプル値

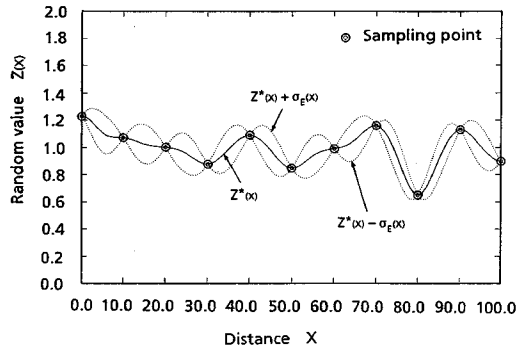


図-2 クリッキングによる推定値と推定誤差

なめらかになっているのは、推定値は平均的な変動のみを表わしているためである。また、推定値がサンプル値を通り、推定誤差がサンプル点では0、サンプル点から離れるに従って大きくなるのがわかる。したがって、サンプル点を多くすれば推定誤差は小さくなり、推定値は真の値に近づくことになる。

次に、サンプル過程と確率過程を比較した。統計量である平均値、分散および共分散関数より求められた確率過程を示したものが図-3である¹⁰⁾。図中の実線は、確率過程のいくつかの標本を表わしたものである(作成法については、3.(2)を参照)。また、図-4にサンプル過程の標本を示した。図-4より、サンプル過程では確率過程の標本の中から、特にサンプル値を通る標本だけを扱っていることがわかる。すなわち、サンプル過程はサンプル値から得られる情報として、統計量だけでなくサンプル値自体も考慮しており、土質定数の不確定性はサンプル点以外の値を推定するときのみ問題としている。土質調査結果から土質定数を決定する地盤工学において、土質定数をサンプル過程として扱うことは、不確定性を小さくすることができる有効な考え方である。

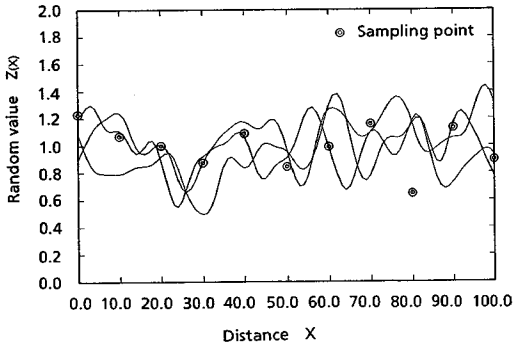


図-3 確率過程の標本

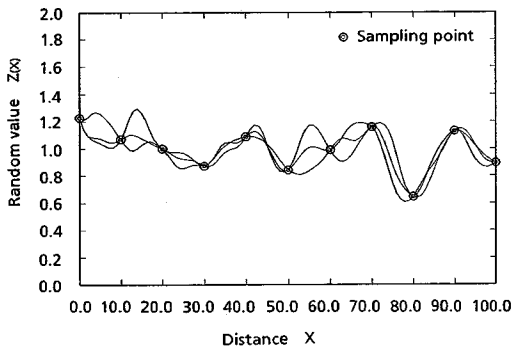


図-4 サンプル過程の標本

3. 確率有限要素法による沈下量と不等沈下量の予測

本章では、土質定数の空間分布をサンプル過程（確率過程の1つの標本）として、一次ガウス近似法による確率有限要素法を用いて沈下量および不等沈下量の予測を行った。さらに、条件付シミュレーション法による確率有限要素法の結果と比較することにより、一次ガウス近似法による確率有限要素法の精度を検討した。

(1) 一次ガウス近似法による確率有限要素法

一次ガウス近似法は、変位や応力などを求める非線形の式（性能関数）を破壊点においてテーラー展開し、確率変数が非正規分布のときは正規化近似を行う手法である²⁸⁾。本研究では、2. で述べたブロック・クリッキングによる推定値およびその共分散を用いることにより、サンプル過程を対象とした一次ガウス近似法による確率有限要素法に拡張されている。

一次ガウス近似法では、破壊を定義する性能関数を破壊点まわりにテーラー展開するため、直接に沈下量 δ の累積分布を求めることはできない。そこで、求めたい節点の沈下量 U を変化させることにより、 U を超える確率（超過確率）を求めて累積分布を作成した。性能関数 G は、次式で定義した。

$$G = U - \delta \dots \dots \dots (16)$$

ここで、 δ は一次ガウス近似法を適用して求められる節点の沈下量である。また、 G が負になる確率が超過確率となる。さらに、不等沈下量 ΔU の性能関数 G は次式で定義した。

$$G = \Delta U - \Delta \delta \dots \dots \dots (17)$$

ここで、 $\Delta \delta$ は一次ガウス近似法を適用して求められる2点の沈下量の差を不等沈下量としたものである。

(2) 条件付シミュレーション法による確率有限要素法

ある領域の土質定数は、ある確率過程の1つの標本（サンプル過程）と考えられる。シミュレーションは、この確率過程から他の標本を作成することであり、作成された標本のうち、サンプル点でサンプル値と同じになるものを保存する。このような条件を設けたシミュレーションは、条件付シミュレーションとよばれている^{25), 26)}。

実際の条件付シミュレーション法によるサンプル過程作成法¹⁹⁾は、2. で述べたクリッキングによる推定法を用いており、その要点は次に述べる部分にある。サンプル値と同じ統計量をもつ常確率過程において、シミュレーション法より得られた標本 $S(x)$ から、クリッキングによる推定誤差 $\epsilon (= (S(x) - S^*(x)))$ を求め、サンプル値からの推定値 $Z^*(x)$ に加えて作成する。すなわち、サンプル過程の標本 $c(x)$ は次式で求められる。

$$c(x) = Z^*(x) + (S(x) - S^*(x)) \dots \dots \dots (18)$$

このようにして計算されたサンプル過程の標本 $c(x)$ を確率有限要素法に入力して、沈下量や不等沈下量を予測する。条件付シミュレーション法においても、サンプル過程と要素の値の間には変換が必要となる。以下の解析では、条件付シミュレーションにより、細かい格子状の点においてサンプル関数の値を求め、次に、三角形要素の頂点、辺の中央および重心の7か所を用いて、サンプル関数の平均値を求め、三角形要素の土質定数とした。

(3) 適用例

解析モデルは、深さ6m、幅24mの地盤を図-5に示すように168個の三角形要素に分割し、地盤の弾性定数を確率過程とした。統計量は、平均値を500 tf/m²、変動係数を0.3として、自己相関係数を水平方向は鉛直方向に比べて強い相関性を有するモデルとして、以下に示される式に従うものとした。

$$p(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{5.0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{1.0} \right)^2 \right\} \right] \dots \dots \dots (19)$$

解析条件として、平面ひずみ条件を仮定して、荷重として図に示されるような単位体積重量 $\gamma = 1.85 \text{ tf/m}^3$ の盛土を想定した。図-5は架空のモデルであることから、確率場を1つ発生させ、それを実際の弾性定数の空間分布と仮定し、◎印の位置でサンプル値を入力データとし

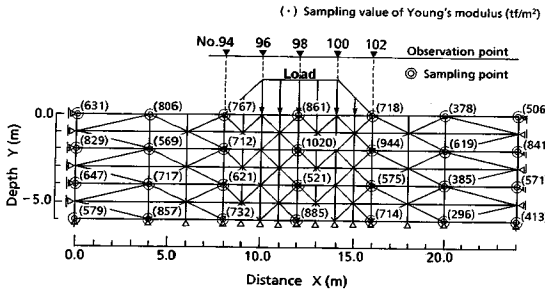


図-5 解析モデル

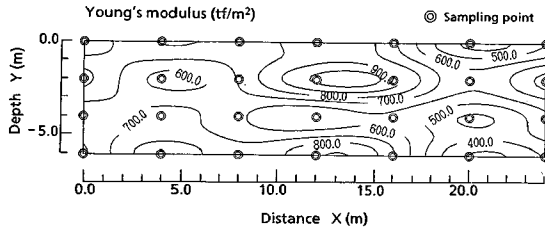


図-6 クリッキングによる推定値

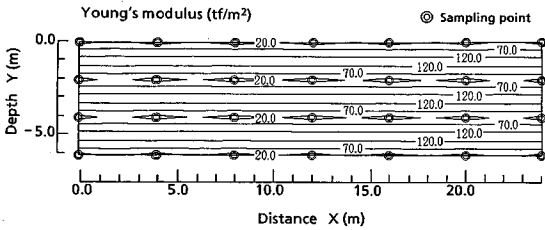


図-7 クリッキングによる推定誤差

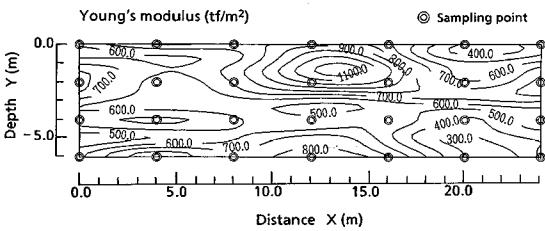


図-8 条件付シミュレーション

た。そして、クリッキングを適用して、地盤の弾性定数について推定値と推定誤差を求め、その結果を確率有限要素法に入力した。解析対象節点は、No. 94, No. 96, No. 98, No. 100, No. 102の5節点として、各節点の沈下量とNo. 100とNo. 96の間の差から求められる不等沈下量(No. 100-No. 96)に対して、それぞれの累積分布関数を算定した。

クリッキングによる推定値を図-6に、推定誤差を図-7に示す。ここで、 x 方向、 y 方向はそれぞれ水平および鉛直方向の距離を示している。また、地盤の弾性定数の自己相関係数は既知であると仮定して計算を行っ

た。図-7によれば、◎印のサンプル点では推定誤差は0となり、サンプル点から離れるに従って推定誤差は大きくなるのがわかる。しかし、水平方向の弾性定数は鉛直方向に比べて強い相関性を有しているため、推定誤差は水平方向ではほとんど変動していない。図-8には、条件付シミュレーションにより発生させた弾性定数の標本例を示した。図-6と図-8は、わずかではあるが異なる結果となっている。これは、条件付シミュレーションとクリッキングによる推定値とは、基本的に同じものではないからである。すなわち、クリッキングによる推定値は2.(3)で述べたように、実現可能な標本の不偏推定量であり、標本そのものではない。一方、条件付シミュレーションの値は標本そのもので、真の土質定数の空間分布と同様の統計量となる。もちろん、サンプル点が多くなれば、条件付シミュレーションの値は、クリッキングによる推定値と一致する。

解析の結果として、5節点の沈下量の累積分布を図-9に示す。ここで、実線が条件付シミュレーション法による試行回数1000回の結果であり、破線が一次ガウス近似法による結果である。図-9に示すように条件付シミュレーション法と比較すると、累積確率を50%としたときに沈下量の誤差は2%以下になった。これは、土質定数の変動係数が大きくても、クリッキングによる推定誤差が図-7に示すように小さくなっているためである。また、No. 100とNo. 96は中心軸から左右対称の位置にあるが、両者の沈下量が異なっており、確率過程では考慮できないサンプル値の偏りを考慮できていること

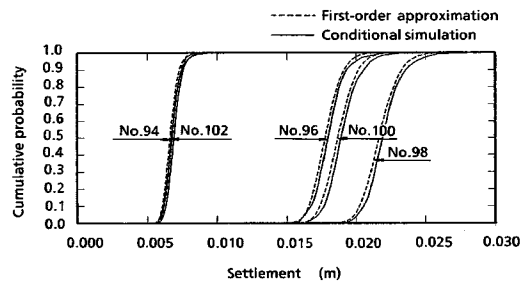


図-9 沈下量の累積分布

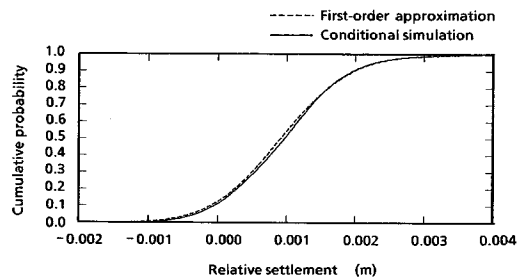


図-10 不等沈下量の累積分布

がわかる。

図-10には不等沈下量の累積分布を示す。実線および破線は図-9と同様である。この図においても、累積確率を50%としたときの誤差は約5%であった。

特定した節点の沈下量や不等沈下量を検討する場合に、FACOM-M 380 QのCPUでは、一次ガウス近似法は約90sとなり、条件付シミュレーション法は約500sとなった。これらより、一次ガウス近似法は、精度と計算時間を考慮すると有効な手法であることがわかった。

文献10)によれば、土質定数を確率過程として、変動係数を0.3と比較的大きな値にしたときは、一次ガウス近似法を用いた確率有限要素法の精度が性能関数の非線形性のためにあまりよくなく、土質定数の変動係数を考えると適用性に限界があった。しかし、今回の手法では、土質定数の変動を推定誤差と考えることにより、変動係数が比較的大きな場合でも精度がよい。

4. 結 論

本研究は、地盤における土質定数の空間分布の扱いを、従来の確率過程から確率過程の中の1つの標本(サンプル過程)であることに着目して、確率有限要素法の適用を試みた。帯状に載荷される地盤を二次元でモデル化し、5節点の沈下量と2節点間の不等沈下量に対して検討した。結果は次のようにまとめることができる。

(1) 地盤において、すべての位置でサンプル値を取ることが可能であれば、もはや土質定数のばらつきは存在しなくなる。しかしこのようなことは不可能であるため、サンプル点の間の値を推定する必要がある。土質定数のばらつきはこの推定誤差ということになる。クリッキングはこのような問題に適用できる有効な推定法であり、土質調査された地盤に対しては、従来の確率過程の確率有限要素法に比べて、クリッキングを用いた確率有限要素法が適している。

(2) 特定した沈下量や不等沈下量の超過確率を評価する場合に、一次ガウス近似法を用いた有限要素法はFOCOM-M 380 QでCPUが約90s、条件付シミュレーション法を用いた有限要素法は1000回の試行でCPUが約500sとなった。この結果より、一次ガウス近似法を用いた有限要素法は、条件付シミュレーション法を用いた有限要素法に比べて、計算時間が短く、土質定数の変動係数が0.3と大きくても誤差は5%以下になり、実用的な手法である。

今回の検討では、手法の有効性を示しており、手法の基礎となる統計量の推定については触れなかった。たとえば、地盤のサンプル値からトレンド成分を除去し、共分散関数を推定する方法などの開発は、クリッキングを

適用する場合に避けては通れない重要な研究課題である。これらの問題については、今後、数値解析例題を実施して問題点をつめるとともに、実際の問題への適用を通して、検討を進める予定である。

参 考 文 献

- 1) Vanmarcke, E., Shinozuka, M., Nakagiri, S., Schuëller, G.I. and Grigoriu, M.: Random Fields and Stochastic Finite Elements, Structural Safety, Vol. 3, pp.143~166, 1986.
- 2) Desai, C.S.: Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill, N.Y., 1977.
- 3) Gudehus, G.: Finite Elements in Geomechanics, John Wiley & Sons, London, 1977.
- 4) Goodman, R.E.: Methods of Geological Engineering in Discontinuous Rocks, West Publishing Company, 1976.
- 5) Cambou, B.: Application of First-order Uncertainty Analysis in the Finite Element Method in Linear Elasticity, The Second Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Eng., Aachen, pp.67~87, 1975.
- 6) 桜井春輔・土居康成: 有限要素法による斜面の信頼性解析, 土木学会論文報告集, No. 330, pp. 87~97, 1983.
- 7) Kiureghian, A.D.: Numerical Methods in Structural Reliability, The Fourth Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Universita di Firenze, Italy, pp.769~784, 1983, Pitagora Editrice.
- 8) Vanmarcke, E.H. and Grigoriu, M.: Stochastic Finite Element Method, Journal of Engineering Mechanics, ASCE., Vol.109, No.EM 5, pp.1203~1214, Oct. 1980.
- 9) 鈴木 誠・石井 清: 確率有限要素法による斜面安定解析, 土木学会論文集, 第364号/Ⅲ-4, pp.199~208, 1985.
- 10) 鈴木 誠・石井 清: 確率有限要素法と要素分割, 土木学会論文集, 第386号/I-8, 1987.
- 11) 中桐 滋・久田俊明: 確率有限要素法入門, 不確定構造の解析, 培風館, 1985.
- 12) Shinozuka, M. and Dasgupta, G.: Stochastic Finite Element Methods in Dynamics, The Third Conf. on Dynamic Response of Structures, EM Div./ASCE, University of California, L.A. pp.44~54, 1986.
- 13) Yamazaki, F. and Shinozuka, M.: Safety Evaluation of Stochastic Systems by Monte Carlo Simulation, Transactions of the 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol. M, pp.63~68, Lausanne, Switzerland, 1987.
- 14) Vanmarcke, E.H.: Random Fields, The MIT Press, 1983.
- 15) Vanmarcke, E.H.: Probabilistic Modeling of Soil Profiles, Journal of the Geotech. Eng. Div, ASCE, Vol.103, No.GT 11, pp.1227~1246, Nov. 1977.
- 16) Matsuo, M. and Asaoka, A.: Probability Models of

- Undrained Strength of Marine Clay Layer, Soils and Foundations, Vol. 17, No. 3, pp. 53~68, 1977.
- 17) Alonso, E. E. and Krizek, R. J. : Stochastic Formulation Soil Properties, The Second Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Eng., Aachen, pp. 9~33, 1975.
- 18) Ripley, B. D. : Spatial Statistics, John Wiley and Sons, 1981.
- 19) Journel, A. G. and Huijbregts, Ch. J. : Mining Geostatistics, Academic Press, 1978.
- 20) Gambolati, G. and Volpi, G. : A Conceptual Deterministic Analysis of the Kriging Technique in Hydrology, Water Resources Research, Vol. 15, No. 3, pp. 625~629, 1979. 6.
- 21) Virdee, T. S. and Kotlegoda, N. T. : A Brief Review of Kriging and Its Application to Optimal Interpolation and Observation Well Selection, Hydrological Sciences, Vol. 29, pp. 367~387, 1984.
- 22) 上田貴夫・本城勇介・波多野敬・坂口修司：造成工事における残留沈下量の平面的予測および誤差，土と基礎，Vol. 34, No. 6, pp. 51~58, 1986.
- 23) Webster, R. and Burgess, T. M. : Optimal Interpolation and Isarithmic Mapping of Soil Properties, 3, Changing Drift and Universal Kriging, Vol. 31, pp. 505~524, 1980.
- 24) Burgess, T. M. and Webster, R. : Optimal Interpolation and Isarithmic Mapping of Soil Properties, 2, Block Kriging, Vol. 31, pp. 333~341, 1980.
- 25) Dagan, G. : Stochastic Modeling of Groundwater Flow by Unconditional and Conditional Probabilities, 1, Conditional Simulation and the Direct Problem, Water Resources Research, Vol. 18, No. 4, pp. 813~833, 1982. 8.
- 26) Journel, A. G. : Geostatistics for Conditional Simulation of Ore Bodies, Economic Geology, Vol. 69, pp. 673~687, 1984.
- 27) Burgess, T. M. and Webster, R. : Optimal Interpolation and Isarithmic Mapping of Soil Properties, 1, The Semi-Variogram and Punctual Kriging, Journal of Soil Science, Vol. 31, pp. 315~331, 1980.
- 28) Ang, A. H. -S. and Tang, W. H. : Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. II - Decision, Risk, and Reliability, John Wiley and Sons, 1984.

(1987. 9. 12・受付)